East Asian Math. J.
Vol. 30 (2014), No. 4, pp. 451-474
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.031

이차함수 그래프에 관련된 중학교 3학년 학생들이 범하는 오류와 교정

A study on the Analysis and the Correction of third-year Middle School Students Error Related to Graph of Quadratic Function

구 영 화 · 강 영 욱[1] · 류 현 아[2]

ABSTRACT. The purpose of this study is to analyze error patterns third-year middle school students make on quadratic function graph problems and to examine about the possible correct them by providing supplementary tutoring. To exam the error patterns that occur during problem solving processes, to 82 students, We provided 25 quadratic function graph problems in the preliminary-test.

The 5 types of errors was conceptual errors, false intuition errors, incorrect use of conditions in problems, technical errors, and errors from slips or carelessness.

Statistical analysis of the preliminary-test and post-test shows that achievement level was higher in the post-test, after supplementary tutoring, and the t-test proves this to be meaningful data.

According to the per subject analyses, the achievement level in the interest of symmetry, parallel translation, and general graph, respectively, were all higher in the post-test than the preliminary-test and this is meaningful data as well. However, no meaningful relation could be found between the preliminary-test and the post-test on other subjects such as graph remodeling and relations positions of the parabola. For the correction of errors, try the appropriate feedback and various teaching and learning methods.

2014년 7월 30일 투고, 2014년 8월 19일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D70
Key word: 이차함수, 함수의 그래프, 오류
1) 교신저자
2) 교신저자

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

Ⅰ. 서론

함수는 수학의 각 분야에서 여러 형태로 나타나고 있다. 예를 들면, 산술에서의 함수는 수의 연산으로, 대수에서의 함수는 변수 사이의 관계로, 기하에서의 함수는 점들의 집합을 대칭이동, 평행이동, 회전이동 시키는 것으로, 확률에서의 함수는 사건과 일어날 가능성과의 관계 등으로 나타난다. 이처럼 함수는 산술, 대수, 기하, 확률에 이르기까지 수학 교육과정 전반에 걸쳐 공통된 주제이다. 이뿐만 아니라 함수는 과학 및 우리 생활 주변에서 일어나는 현상이나 자연 현상에서 찾아볼 수 있는 투입에 대한 결과의 유일함을 수학적으로 나타내는 것이기도 하다. 사실 결과의 유일함이 없이는 어떠한 현상도 설명할 수도 없고 그 결과를 이용할 수도 없다. 따라서 함수적 사고는 과학과 지식 시대에 살아가는 우리에게 꼭 필요하므로 이러한 사고 능력을 배양하기 위해 함수에 관한 학습이 필요하고 중요하다.

함수 개념을 잘 이해하기 위해서는 다양한 표현 방식을 통해 함수를 이해할 수 있어야 한다. 함수는 대응도, 히스토그램, 그래프, 그림, 수, 도표, 순서쌍, 문자기호, 식, 사상 등 여러 가지 방식으로 표현할 수 있다. 그래프는 수치적인 체계와 기하학적인 체계를 통합한 형태로써 수학의 여러 영역에서 수학적 개념의 이해를 강화시키고 더 높은 수준으로 전이시키는 표현 수단이다. 또한 실세계의 다양하고 수많은 정보와 상황을 한눈에 알아보기 쉽게 나타내고 변화하는 현상을 예측하고 분석할 수 있는 중요한 표현 도구로 쓰이고 있다.

그러나 학생들은 대수식은 즉각적으로 확인할 수 있는 그래프에 비해 상대적으로 복잡함에도 불구하고, 그래프를 해석하는 것보다 대수식을 다루는 것이 더 쉽다고 생각하는 경향이 있다. 또한, 그래프를 그리고, 해석하며, 이해하는데 많은 어려움을 겪고 있다. 그뿐만 아니라, 문제 상황에 알맞은 그래프 표상을 연결 짓지 못하고, 문제를 해결하는데 그래프가 필수적인 도구가 될 수도 있다는 사실을 인식하지 못한 채 수학에서 부가적인 표현 양식으로만 생각하는 경향이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해, 여러 가지 방법이 시도될 수 있으나 무엇보다 함수의 그래프를 구성하거나 해석할 때 학생들이 자주 범하는 오류를 파악하여, 그 오류에 대한 지도 방법을 고안하는 것이 학생들의 성취도 향상에 직접적인 효과를 줄 수 있을 것이다.

이에 본 연구는 중학교 3학년 학생들이 이차함수의 그래프에 관한 문제 해결 과정에서 나타나는 오류를 분석하고 그 원인을 파악하여, 그 오류를 교정할 수 있는 지도 방안을 모색하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 함수 교수·학습에서 그래프 표현의 유용성

수학 교과에서 함수 개념은 변화하는 현상들을 모델링하고 그 속에 내재된 관계

성을 유도하며 현상을 추측하기 위해 사용되는 핵심적 아이디어로서, 다양한 하위 개념들과 영역들을 포함하며, 여러 가지 표현 체계로 정리될 수 있다. 이러한 표현들 간의 연결은 학생들로 하여금 자신들의 수학적 사고 능력을 반성하고 구체화하게 함으로써 함수라는 복잡한 개념을 여러 측면에서 인식할 수 있게 한다. 여러 표현들 중에서 가장 널리 사용되는 시각적 표현이 바로 그래프 표현인데, 이것은 수치적인 체계와 기하학적인 체계를 통합한 형태로써 변화하는 현상에 대한 예측과 분석에 효과적으로 사용될 수 있다는 점에서 함수 학습에 중요하다(NCTM, 2000).

그래프를 통해 함수를 교수·학습하는 것은 다음과 같은 점에서 유용하다(안가영, 2002).

첫째, 그래프는 함수와 관련된 복잡한 개념과 아이디어를 간결하고 순차적인 방법으로 의사소통할 수 있게 하는 매개체의 역할을 담당한다. 질문제기, 자료 수집, 자료 분석, 결과 해석의 단계를 거치는 함수 과제에서, 그래프 표현은 자료 분석 단계에 해당되며 주로 이차원 표면 위에 있는 점이나 선, 영역의 위치를 통해 정보를 전달하는 역할을 담당한다. 특히 그래프는 함수와 관련된 수치적 자료들의 관계성, 경향, 과정, 결과를 간단하고 순차적으로 보여줄 수 있다. 그러므로 그래프를 통해 학생들은 일상생활로부터의 경험적 함수와 대수적 형식에 의해 정의된 수학적 함수와의 관계를 효과적으로 의사소통할 수 있다.

둘째, 그래프는 언어적, 대수적으로 의미 전달 시 한계가 있는 정보들을 시각적 형태로 요약하여 효과적으로 제시해 줄 수 있다. 특히 대수적 표현은 표나 그래프보다 간결하고 정확하며 변수들 간의 관계를 쉽게 해석할 수 있다는 장점에 비해, 현상에 대한 직접적인 해석이나 그 변화 양상을 시각적으로 파악하기 힘들다는 한계점을 가진다. 그러나 그래프 표현은 함수의 변화상태, 주기성, 패턴 등의 전체적인 성질들을 한눈에 시각적으로 쉽게 알아볼 수 있게 한다. 그러므로 학생들은 그래프 표현을 통해 대수 방정식에서 쉽게 인지하지 못했던 함수적 관계와 특징들을 역동적, 전체적으로 인식할 수 있을 뿐만 아니라, 함수적 관계에 대한 개별적이고 고립적인 경험 대신 전체적이고 질적인 경험을 할 수 있다. 또한, 학생들은 그래프 표현을 통해 함수 관계들에 대한 패턴을 시각적으로 인식하고 더 나아가 변수들 간의 관계를 예측하여 그 성질을 구체화시킬 수 있다.

셋째, 함수의 시각적 표현과 관련된 그래프는 변화 현상을 해석하며 구체적인 수학적 지식과 추상적인 수학적 지식을 연결시킬 수 있다는 점에서 함수 개념 이해를 위한 효과적인 수단이 된다. 이는 그래프가 문자적인 표현 수단으로서의 역할을 담당하면서 일종의 그림 형태로 존재하기 때문에 현상과 수학적 지식을 연결시켜 줄 수 있음을 의미한다. 이러한 연결 과정을 통해 학습자는 그래프로부터 무엇을 해야 할지, 왜 그렇게 해야 하는지에 대한 관계적 이해를 할 수 있다.

2. 함수 그래프에 대한 오류

본 연구에서 분석을 위한 틀로서 오류 유형을 범주화하기 위해 함수 그래프와 관련하여 학생들의 오류를 분석한 선행 연구를 살펴보았다.

성종기(2000)는 학습 능력(상, 중, 하)에 따른 중학교 3학년 학생을 대상으로 이차함수의 그래프에 대한 오류를 분석하여 다음과 같이 네 가지로 분류하였다. 첫째, 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류는 문제에 주어진 자료와 학생들이 그 자료를 다루는 방법 사이의 어떤 모순과 관련된 오류이다. 둘째, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류는 한 상징적인 언어 안에 표현되어 있는 수학적 사실들을 다른 상징적인 언어로 잘못 해석하는 오류이다. 셋째, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류는 특정하고 동일한 규칙, 원칙, 정리 혹은 정의 등이 잘못 이해되어 쓰여 지는 경우에 있어서의 오류이다. 넷째, 기술적인 오류는 문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류이다.

이경도(2003)는 이차함수 성질에 관한 오류를 분석하여 다음과 같이 다섯 가지로 분류하였다. 첫째, 개념적인 오류는 문제에 관한 기본 지식 및 기본 개념이나 원리를 모르거나 잘못 이해하여 표현을 잘못하는 경우와 이러한 잘못된 개념으로 인해 계산하는 과정에서도 잘못된 경우의 오류를 말한다. 둘째, 기술적인 오류는 문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류를 말한다. 셋째, 검토하지 않은 해답의 오류는 학생들의 풀이 과정 각 단계들 그 자체는 옳은데, 검토하지 않았기 때문에 마지막에 제시된 해는 옳지 않은 오류를 말한다. 넷째, 잘못 이용된 자료에 의한 오류는 문항에 주어진 자료와 학생들이 사용한 자료 사이의 불일치로 인한 오류이다. 다섯째, 애매한 오류는 학생들이 문제를 풀이한 과정이 애매모호하여, 학생이 제시한 답을 보고 학생의 의도를 정확히 알 수 없는 경우를 말한다.

최은형(2004)은 함수의 그래프에 대한 이해와 오류를 분석하는 연구에서 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 기술적인 오류, 요구되지 않은 해답의 오류 등의 유형을 분류하였다.

이현화(2006)는 이차함수의 성질에 관한 오류 분석과 인지갈등 유발을 통한 오류 교정에 관한 연구에서 오류 유형을 이차함수에 대한 기본 개념을 부적절하게 사용하는 오류, 계산상의 오류, 풀이 과정을 생략하고 답만 제시한 경우, 대수적 기호 처리에 익숙하지 않아 생긴 오류, 기본 지식의 결여에서 오는 오류, 풀이 과정만 내고 답을 내지 않는 경우로 분류하였다.

위의 선행 연구들에서 나타난 오류 유형을 비교해 보면 정의, 정리, 개념, 지식과 관련된 오류는 모든 연구에서 나타나고 있다. 여기서 정리나 정의를 부적절하게 사용하거나 기본 지식이 결여된 경우는 모두 문제와 관련된 기본 지식이나 기본 개념 및 원리를 잘 모르거나 잘못 이해하는 경우로 해석할 수 있으므로 개념적인 오류라 할 수 있다. 문제의 자료를 잘못 사용하는 경우나 문제의 내용을 잘못 해석하는 경우로 나누어진 경우가 있는데, 이는 문제에 대한 이해가 부족한 경우이다. 일반적으로 조건을 잘못 사용할 때는 문제의 조건을 잘못 해석하는 것이 앞서 발생한 결과로 볼 수 있으므로 문제의 조건을 잘못 이용한 오류로 묶어서 생각할 수 있다. 문제 풀이 과정에서 연산이 잘 못 시행되거나 대수적 기호

처리로 인해 발생하는 경우는 모두 기술적인 오류로 분류하고 있다. 검토하지 않거나 요구하지 않은 답을 쓰거나 풀이 과정만 있는 경우는 모두 실수나 부주의로 인해서 발생하는 오류로 생각할 수 있다. 그리고 답만 제시하는 경우와 애매한 경우의 오류도 나타남을 볼 수 있다.

이와 같이 선행 연구들에서 나타난 오류 유형과 이를 기초로 한 본 연구에서 분석의 틀로 사용되는 오류 유형은 <표 Ⅲ-2>와 같다[3].

<표 Ⅲ-2> 선행 연구의 오류 유형과 본 연구의 오류 유형

<table>
<tr><th>성종기(2000)</th><th>이경도(2003)</th><th>최은형(2004)</th><th>이현화(2006)</th><th>본 연구</th></tr>
<tr><td rowspan="2">정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류</td><td rowspan="2">개념적인 오류</td><td rowspan="2">정리나 정의를 부적절하게 사용</td><td>기본 개념을 부적절하게 사용하는 오류</td><td rowspan="2">개념적인 오류</td></tr>
<tr><td>기본 지식의 결여에서 오는 오류</td></tr>
<tr><td></td><td>애매한 오류</td><td></td><td>답만 제시한 경우</td><td>잘못된 직관의 오류</td></tr>
<tr><td>문제의 자료를 잘못 사용하는 오류</td><td rowspan="2">잘못 이용된 자료에 의한 오류</td><td>문제의 자료를 잘못 사용하는 오류</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">문제의 조건을 잘못 이용한 오류</td></tr>
<tr><td>문제의 내용을 잘못 해석하는 오류</td><td>문제의 내용을 잘못 해석하는 오류</td></tr>
<tr><td>기술적인 오류</td><td>기술적인 오류</td><td>기술적인 오류</td><td>대수적 기호 처리에 익숙하지 않아 생긴 오류</td><td>기술적인 오류</td></tr>
<tr><td></td><td>검토하지 않은 해답의 오류</td><td>요구되지 않은 해답의 오류</td><td>풀이 과정만 내고 답을 내지 않는 경우</td><td>실수나 부주의로 인한 오류</td></tr>
</table>

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 대구시 달성군에 소재한 S중학교 3학년 학생 82명(3개반)을 대상으로 하였다. 수준별 수학 학습을 시행하고 있지 않은 일반 학급으로, 연구를 진행할 시점에서 이 학급의 학생들은 이차함수에 관하여 학습한 상태였다.

2. 연구 절차

3) 분석 과정에서 답만 제시한 경우와 의도를 알 수 없는 애매한 답은 쓴 경우에 대해 경험이나 추리 등의 사고 과정을 거치지 않고 직접적으로 파악하여 답하는 경우로 판단하여 잘못된 직관의 오류라 명명함.

본 연구에서는 이차함수를 학습한 학생들에게서 나타나는 함수 그래프에 대한 오류를 분석하고, 이를 교정하기 위한 수업을 진행하였으며, 그 효과를 분석하였다.

대상은 중학교 3학년 3개 반으로 총 82명이며, 같은 교사가 수업을 맡고 있다. 같은 주에 각 반에서 사전 검사를 시행하고 연속 3차시 수업 후에 사후 검사를 실시하였다. 검사의 소요 시간은 40분으로 충분한 시간을 제공하여 학생들로 하여금 분위기에서 문제를 풀게 하였다. 사전 검사에서의 학생들의 답지를 분석하여, 오답들 중에서 오류 유형을 분류하였다. 여기서 나타난 학생들의 오류를 교정하기 위하여 수업 활동지를 만들고 연속 3차시 수업을 진행하였다. 수업을 통해 오류가 교정되었는지 확인하기 위해 사전 검사와 동형의 사후 검사를 실시하였다. 사후 검사 결과와 사전 검사 결과를 T-test로서 분석하였는데, 25문제 전체에 대하여 시행하고, 문제 내용별로 묶어서 시행하였다.

3. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사 도구는 선행 연구(성종기 2000, 장양순, 2010)의 검사지들을 참고하여 <표 Ⅲ-1>과 같이 구성하였다. 그 내용은 이차함수 그래프의 대칭성과 개형, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 x축으로 평행이동한 $y=a(x-p)^2$,y축으로 평행이동한 $y=ax^2+q$, x, y축으로 평행이동한 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 성질 그리고 이차함수의 일반형 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 성질이다.

<표 Ⅲ-1> 검사지 문항의 내용 및 평가 목표

내용	문항 수	문항 번호	평가 목표
대칭성 이해	2	1	그래프 식에서 y축에 대한 대칭을 알 수 있다.
		2	그래프 식에서 x축에 대한 대칭을 알 수 있다.
y축에 관한 평행이동	3	3	이차함수 그래프에서 y축에 관한 평행이동을 알 수 있다.
		4(1)	$y=ax^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.
		4(2)	$y=ax^2+q$의 그래프의 축의 방정식을 구할 수 있다.
		5	$y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 수 있다.
x축에 관한 평행이동	3	6	이차함수 그래프에서 x축에 관한 평행이동을 알 수 있다.
		7(1)	$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.
		7(2)	$y=a(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식을 구할 수 있다.
		8	$y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 그릴 수 있다.
x, y축에 관한 평행이동	3	9	이차함수 그래프에서 x, y축에 관한 평행이동을 알 수 있다.
		10(1)	$y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.
		10(2)	$y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 축의 방정식을 구할 수 있다.
		11	$y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있다.

이차항의 계수가 1인 일반형 그래프	4	12	$y=x^2+bx+c$의 그래프에 대한 x절편을 구할 수 있다.
		13	$y=x^2+bx+c$의 그래프에 대한 y절편을 구할 수 있다.
		14(1)	$y=x^2+bx+c$를 $y=(x-p)^2+q$꼴로 나타내어 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.
		14(2)	$y=x^2+bx+c$를 $y=(x-p)^2+q$꼴로 나타내어 축의 방정식을 구할 수 있다.
		15	$y=x^2+bx+c$를 $y=(x-p)^2+q$꼴로 나타내어 그래프를 그릴 수 있다.
이차항의 계수가 1이 아닌 일반형 그래프	4	16	$y=ax^2+bx+c$의 그래프에 대한 x절편을 구할 수 있다.
		17	$y=ax^2+bx+c$의 그래프에 대한 y절편을 구할 수 있다.
		18(1)	$y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$꼴로 나타내어 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.
		18(2)	$y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$꼴로 나타내어 축의 방정식을 구할 수 있다.
		19	$y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$꼴로 나타내어 그래프를 그릴 수 있다.
그래프 개형	3	20	$y=a(x-p)^2+q$의 그래프 개형에서 a, p, q의 부호를 알 수 있다.
		21	$y=ax^2+bx+c$의 그래프 개형에서 a, b, c의 부호를 알 수 있다.
		22	$y=ax^2+bx+c$에서 각항의 계수 부호에 따른 그래프 개형을 구할 수 있다.
포물선의 위치관계	3	23	$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점에서 만난다는 의미를 이해할 수 있다.
		24	$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다는 의미를 이해할 수 있다.
		25	$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나지 않는다는 의미를 이해할 수 있다.

4. 교정 학습 활동지

교정 학습 활동지는 사전 검사지에서 나타난 오류를 교정하기 위하여 그것과 유사한 난이도의 다른 문제들로 구성하였다. 활동지 체계는 '함께하기', '스스로하기', '정리하기'로써 먼저 교사의 안내에 따라 문제를 해결한 다음 점차 혼자서 해결하도록 하고, 학습한 개념을 정리하는 순서 형태로 이루어진다.

첫 번째, 함께하기에서는 교사가 내용을 설명하고 학생들과 함께 문제를 읽고 풀이한다.

두 번째, 스스로하기에서는 학생들이 함께하기에서 했던 교사의 설명과 풀이 방법에 따라 스스로 문제를 풀이한다. 이때 충분한 시간을 주어 풀이과정을 검토할 수 있도록 한다. 또한, 교사는 학생들이 오류를 스스로 찾아낼 수 있도록 돕는다.

세 번째, 정리하기에서는 학생들은 빈칸에 알맞은 말이나 식을 채우면서 앞의 내용을 확인하고, 교사는 핵심 내용을 정리해 준다.

이는 지식의 내면화 과정에서 모방이 하는 역할에 대한 긍정적인 평가와 적극적인 활용을 제시한 비고츠키(Vygotsky)의 이론에 근거한다.

비고츠키(1978)는 혼자서 문제를 해결하는 것으로 결정되는 실제적 발달수준과 어른의 안내나 좀 더 능력 있는 또래들과 협력하여 문제를 해결하는 것으로 결정되는 잠재적 발달수준 사이를 근접발달영역이라 부른다. 근접발달영역에서 학생은 교사의 안내를 받거나 능력이 있는 또래와 협력하면서 잠재적 발달수준을 달성하

게 된다. 안내를 받거나 협력하는 동안에 학생은 자신의 인식 영역의 바깥에서 이루어지고 있는 활동을 모방하면서 배우게 된다. 결국 학생은 학습 과정에서 먼저 다른 사람과 능동적으로 문제를 해결하는 경험을 한 다음에, 점차 혼자서 문제를 해결하면서 개념을 내면화하는 것이다.

[그림 Ⅲ-1]과 [그림 Ⅲ-2]는 교정 학습지의 일부분이다. [그림 Ⅲ-1]과 같이 x^2의 그래프에 대해 교사의 도움을 받아 함께 활동하고, 스스로하기에서 같은 방법으로 과제를 해결하면서 개념을 내면화 하며, 정리하기에서 개념이 형성되도록 하였다. 또는 학습 내용에 따라 [그림 Ⅲ-2]와 같이 스스로하기에서 함께하기와 다른 방식의 과제를 해결하도록 구성하기도 하였다.

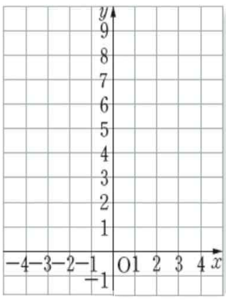
♣ **함께하기**

1. 이차함수 $y=x^2$에 대하여 x의 값이 변함에 따라 x^2의 값을 조사하여 다음 표를 완성해 봅시다.

x	⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	⋯
$y=x$	⋯			1	0		4	9	⋯

2. 위의 표를 바탕으로 순서쌍 (x , y)를 구하고, 그 순서쌍을 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내 봅시다.

순서쌍
⋮
(3, 9)
(2, 4)
(0, 0)
(-1, 1)
⋮



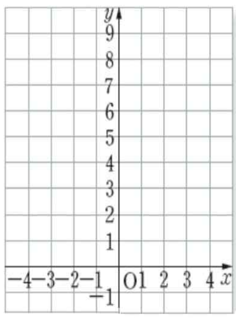
♣ **스스로하기**

1. 이차함수 $y=2x^2$와 $y=\frac{1}{2}x^2$에 대하여 x의 값이 변함에 따라 $2x^2$의 값과 $\frac{1}{2}x^2$의 값을 조사하여 다음 표를 완성하여라.

	x	⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	⋯
(1)	$2x^2$	⋯	18		2	0		8		⋯
(2)	$\frac{1}{2}x^2$	⋯		2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{9}{2}$	⋯

2. 위의 표를 바탕으로 순서쌍 (x,y)를 구하고, 그 순서쌍을 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어라.

순서쌍	
(1)	(2)
⋮	⋮
	(3, $\frac{9}{2}$)
(2, 8)	
	(1, $\frac{1}{2}$)
(0, 0)	(0, 0)
(-1, 2)	(-1, $\frac{1}{2}$)
	(-2, 2)
(-3, 18)	
⋮	⋮



♣ **정리하기**

【 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프의 성질 】

① 꼭짓점의 좌표 : (   )

② (위로 볼록, 아래로 볼록) 한 포물선

③ (   )축에 대하여 대칭

④ 축의 방정식 : (   )

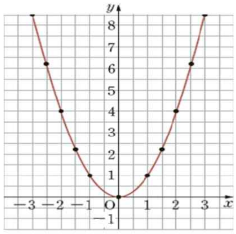
[그림 Ⅲ-1] 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$그래프의 성질에 관한 학습의 일부

♣ 함께하기

1. 이차함수 $y=x^2$, $y=(x+2)^2$, $y=(x-2)^2$에 대하여 x의 값이 변함에 따라 x^2, $(x+2)^2$, $(x-2)^2$의 값을 조사하여 다음 표를 완성해 봅시다.

x	··	-3	-2	-1	0	1	2	3	··
x^2	··	9	4	1	0	1	4	9	··
$(x+2)^2$	··	1	0	1					··
$(x-2)^2$	··					1	0	1	··

2. $y=x^2$ 그래프를 이용하여 $y=(x+2)^2$, $y=(x-2)^2$의 그래프를 그려 봅시다.



	꼭짓점의 좌표	축의 방정식
$y=x^2$		
$y=(x+2)^2$		
$y=(x-2)^2$		

♣ 스스로하기

1. 이차함수 $y=(x-1)^2$의 그래프에 대하여 괄호 안에 알맞은 답을 구하여라.
- 이 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 ( )축의 방향으로 ( )만큼 평행이동한 것이다.
- 꼭짓점의 좌표 : (,)
- 축의 방정식 :
- y축과의 교점의 좌표 : (,)
- 포물선 모양 :
- 점 (-3 ,)을 지난다.

2. 이차함수 $y=-3(x+2)^2$의 그래프에 대하여 괄호 안에 알맞은 답을 구하여라.
- 이 그래프는 $y=-3x^2$의 그래프를 ( )축의 방향으로 ( )만큼 평행이동한 것이다.
- 꼭짓점의 좌표 : (,)
- 축의 방정식 :
- y축과의 교점의 좌표 : (,)
- 포물선 모양 :
- 점 (1 ,)을 지난다.

♣ 정리하기

【 이차함수 $y=a(x-p)^2(a\neq 0)$의 그래프의 성질 】

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

② 꼭짓점의 좌표 : $(p, 0)$

③ 축의 방정식 : $x=p$

[그림 Ⅲ-2] 이차함수 $y=a(x-p)^2$ $(a\neq 0)$그래프의 성질에 관한 학습의 일부

5. 분석 방법

이차함수 그래프에서 학생들이 범하는 오류를 살펴보기 위해 사전 검사지의 답안을 분석하였다. 이때 사전 검사지에 학생들이 직접 작성한 풀이 과정을 보고 분석하였으며, 답지 중에서 문항에 대한 완전한 답을 제시한 경우, 전혀 어떠한 답도 제시하지 않은 경우, 풀이 과정에서 글자가 흐릿하고 무슨 글자인지 식별하지 못하는 경우는 제외하였다. 그리고 같은 문제의 풀이 과정에서 연속하여 오류가 발생할 경우에는 단순성을 위하여 첫 번째 오류만 분석하고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다. Ⅱ장에서 선행 연구를 통해 살펴본 함수 그래프에 대한 오류 유형을 개념적인 오류, 문제의 조건을 잘못 이용한 오류, 기술적인 오류, 실수나 부주의로 인한 오류로 분석하였다. 학생들의 답안을 분석하면서 답만 제시한 경우와 풀이 과정을 끼적이기는 하나 의도를 알 수 없는 애매한 답을

쓴 경우를 발견할 수 있었다. 이에 대해 경험이나 추리 등의 사고 과정을 거치지 않고 직접적으로 파악하여 답하는 경우로 생각할 수 있다고 판단하여 잘못된 직관의 오류라 하여 오류 유형에 포함시켰다.

위와 같이 학생들의 사전 검사에서 분석한 오류에 대하여 수업 후 교정되었는지 분석하기 위해 IBM SPSS Statistics 20을 이용하여 대응표본 T-test를 하였다. 이 때 사전·사후 검사지 문항의 전체를 하나로 보아 분석하고, 또한 사전·사후 검사지 문항의 내용별로 대칭성의 이해, 평행이동, 일반형 그래프, 그래프 개형, 포물선의 위치관계 각각에서 향상되었는지 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 이차함수 그래프에 관한 오류 유형

학생들에게 실시한 검사지의 전체 문항 수는 25개이며 그 중 문제 4번, 문제 7번, 문제 10번, 문제 14번, 문제 18번은 각각 2개씩 소문항을 갖고 있으므로 총 30문항에 대해 분석하였다. 이 때 82명을 대상으로 하였으므로 총 2460개의 답안에 대해 정답, 오답, 무응답의 빈도를 구한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 전체 학생들의 검사지에 대한 정답률

	정답	오답	무응답	합계
빈도(명)	1088	1291	81	2460
백분율(%)	44.2	52.5	3.3	100

<표 Ⅳ-1>에서와 같이 전체 문항에 대한 정답률은 44.2%, 오답률은 52.5%, 무응답률은 3.3%로 나타났다. 52.5%의 오답 중에서 오류 유형에 따라 분석한 결과는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 각 오류 유형별 빈도

오류의 유형	빈도(개)	백분율(%)
개념적인 오류	662	51.3
잘못된 직관의 오류	426	33
문제의 조건을 잘못 이용한 오류	161	12.5
기술적인 오류	22	1.7
실수나 부주의로 인한 오류	20	1.5
합계	1291	100

<표 Ⅳ-2>에서와 같이 개념적인 오류가 51.3%로 가장 많이 나타났고, 그 다음으로 잘못된 직관의 오류가 33% 나타났다. 문제의 조건을 잘못 이용한 오류는 12.5%이며, 기술적인 오류는 1.7%이고, 실수나 부주의로 인한 오류는 1.5%로 가장 낮은 빈도를 보였다.

또한 문항 내용별로 오류 유형의 빈도를 분석한 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다. 대칭성의 이해나 평행이동과 관련된 문제는 기본적인 개념 지식을 묻는 형태로 오답들 대부분이 개념적 오류로 나타났다. 일반형 그래프 문제는 기본 개념을 바탕으로 식을 변형하는 과정이 포함되므로 여러 유형의 오류가 나타났다. 그래프 개형 문제에서의 오답들은 모두 주어진 조건을 잘못 해석하거나 잘못 이용하는 오류를 보였고, 포물선의 위치관계 문제에서의 오답들은 대부분 잘못된 직관의 오류로서 답만 쓰거나 의도를 알 수 없는 답을 쓴 경우였다.

<표 Ⅳ-3> 문항 내용별 오류 유형의 빈도

	개념적 오류	잘못된 직관의 오류	문제의 조건을 잘못 이용한 오류	기술적인 오류	실수나 부주의로 인한 오류	합계
대칭성의 이해	67(85.9%)	0	0	0	11(14.1%)	78
평행이동	415(100%)	0	0	0	0	415
일반형 그래프	180(39.2%)	249(54.2%)	0	21(4.6%)	9(2.0%)	459
그래프 개형	0	0	161(100%)	0	0	161
포물선의 위치관계	0	177(99%)	0	1(1.0%)	0	178
	662	423	161	22	20	1291

2. 오류 유형별 내용

앞에서 분석한 다섯 가지 오류 유형에 포함된 구체적인 오류 내용은 다음과 같다.

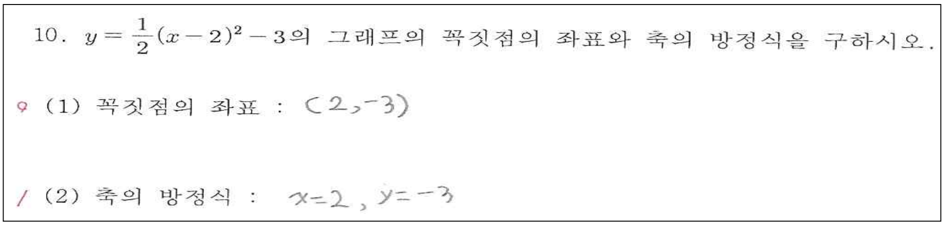
1) 개념적인 오류

문제에 관한 기본 지식 및 기본 개념이나 원리를 모르거나 잘못 이해하여 표현을 잘못하는 경우의 오류를 말한다. 세부 내용을 정리하면 대체로 다음과 같다.

(1) 이차함수와 관련된 용어의 개념을 이해하지 못한 경우

[그림 Ⅳ-1]은 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴은 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식이므로 축의 방정식은

$x=p$이다. 위의 내용은 꼭짓점의 좌표는 맞는 답이나, 축의 방정식의 의미를 바르게 알지 못한 경우이다.

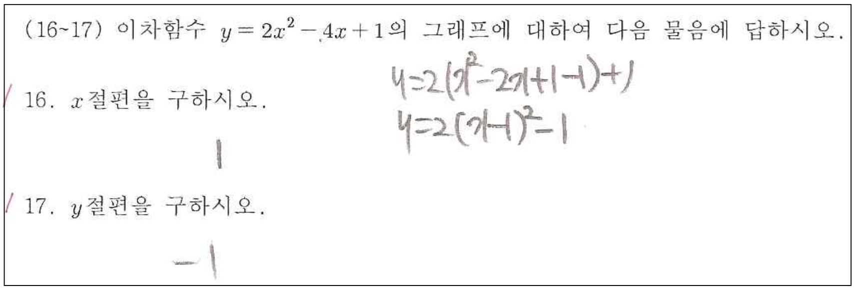

10. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하시오.

(1) 꼭짓점의 좌표 : $(2,-3)$

(2) 축의 방정식 : $x=2$, $y=-3$

[그림 Ⅳ-1] 문항 10번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-2]는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 그래프의 x절편과 y절편의 의미를 잘 알지 못하는 경우이다. x절편은 함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이므로 $y=0$일 때의 x의 값이고, y절편은 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표이므로 $x=0$일 때의 y의 값이다. [그림 Ⅳ-2]에서 이 학생은 식을 $y=2(x-1)^2-1$로 정리한 후 꼭짓점 $(1,-1)$에서 x좌표를 x절편으로 생각하고, y좌표를 y절편으로 생각하여 적은 것으로 보인다.


(16~17) 이차함수 $y=2x^2-4x+1$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.

16. x절편을 구하시오.

$y=2(x^2-2x+1-1)+1$

$y=2(x-1)^2-1$

1

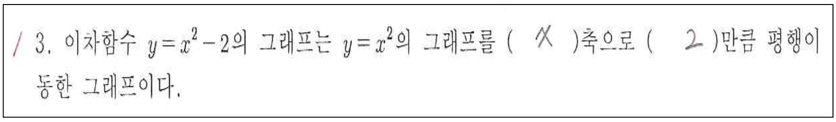
17. y절편을 구하시오.

-1

[그림 Ⅳ-2] 문항 16, 17번에서의 문제 풀이

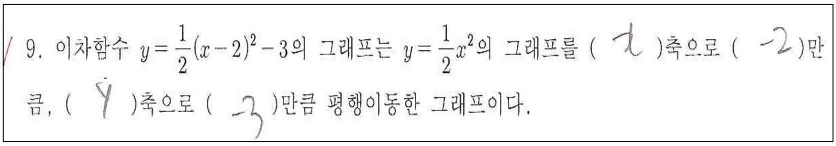
(2) 이차함수 그래프의 개념을 이해하지 못한 경우

[그림 Ⅳ-3]은 $y=ax^2+q$의 그래프에 대한 개념의 이해 부족으로 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 y축으로 -2만큼 평행이동한 그래프이라고 생각해야 하는데 이 학생은 $y=x^2-2$에서 x^2을 보고 x축 방향으로 평행이동한 것으로 생각하고 x축 방향으로 평행이동하면 부호를 반대로 쓴다고 생각하여 2를 적은 것으로 보인다.


3. 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 (x)축으로 (2)만큼 평행이동한 그래프이다.

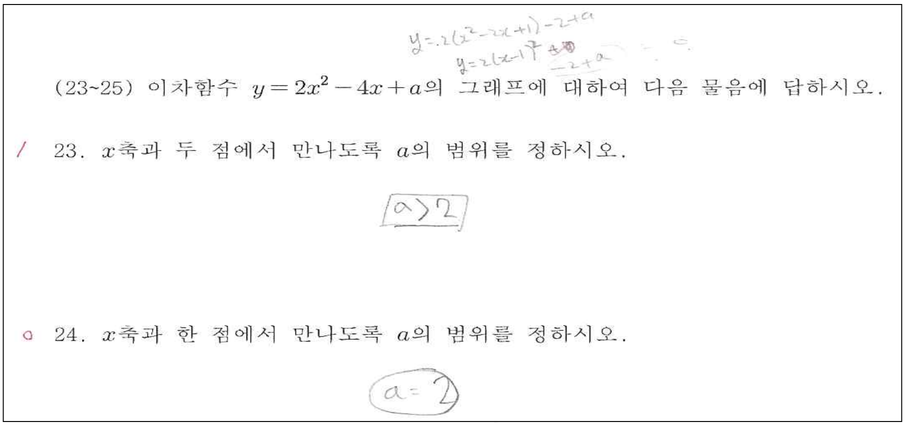
[그림 Ⅳ-3] 문항 3번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-4]는 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에 대한 개념의 이해 부족으로 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축으로 2만큼, y축으로 -3만큼 평행이동한 그래프이다. 이 학생은 y축으로 평행이동한 것은 맞는 답이고 x축으로 평행이동한 것은 y축으로 평행이동하는 것과 같다고 생각하여 -2를 적은 것으로 보인다.


9. 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 (x)축으로 (-2)만큼, (y)축으로 (-3)만큼 평행이동한 그래프이다.

[그림 Ⅳ-4] 문항 9번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-5]에서 $y=2x^2-4x+a$의 표준형은 $y=2(x-1)^2-2+a$이다. 이 그래프는 아래로 볼록하므로 x축과 두 점에서 만나려면 꼭짓점이 x축의 아래쪽에 있어야 한다. 즉, $-2+a<0$이다. 따라서 $a<2$이다. 또는 x축과 만나는 점의 y좌표는 0이므로 $2x^2-4x+a=0$이고, 이 이차방정식의 근이 2개이므로 판별식 $D=(-4)^2-4\times 2\times a>0$이다. 따라서 $a<2$이다. 위의 풀이 과정에서는 $-2+a=0$이 되게 하는 값 a을 찾고, 문제가 두 점에서 만나도록 a의 범위를 찾는 것이므로 $D>0$임에 주목하여 답이 아닌 $a>2$라 했고 한 점에서 만나도록 a의 범위를 구하는 것은 이 그래프에서 꼭짓점이 x축과 만나는 것이므로 이차방정식의 근이 1개 일 때와 같은 의미이다. 즉, $D=0$이고 $a=2$라고 정답을 쓴 것으로 보인다.


$y=2(x^2-2x+1)-2+a$
$y=2(x-1)^2-2+a$

(23~25) 이차함수 $y=2x^2-4x+a$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.

/ 23. x축과 두 점에서 만나도록 a의 범위를 정하시오.

$\boxed{a>2}$

○ 24. x축과 한 점에서 만나도록 a의 범위를 정하시오.

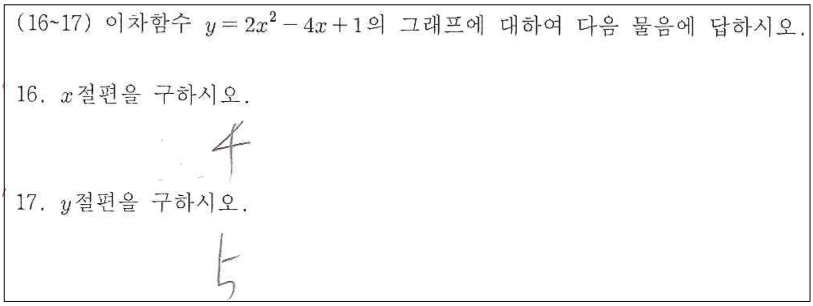
$a=2$

[그림 Ⅳ-5] 문항 23, 24번에서의 문제 풀이

2) 잘못된 직관의 오류

문제를 해결하기 위해 문제를 읽기는 하지만 풀이를 시도하지 않고 직관적으로 답을 하지만 정답과는 무관한 경우 또는 아무런 의미 없는 값을 기록하는 경우이다.

[그림 Ⅳ-6]은 문제를 읽기는 하지만 풀이를 시도하지 않고 직관적으로 x절편과 y절편의 값만 제시한 경우로 아무런 의미 없는 값이다.


(16~17) 이차함수 $y=2x^2-4x+1$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.

16. x절편을 구하시오.

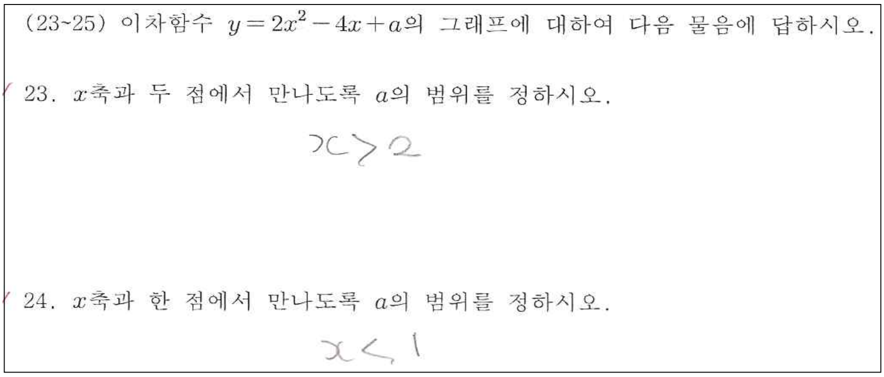
4

17. y절편을 구하시오.

5

[그림 Ⅳ-6] 문항 16, 17번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-7]은 a의 범위를 구해야 하는데 문제를 읽었어도 정답과는 무관하게 x의 범위를 적으므로 아무런 의미가 없는 것으로 보인다.


(23~25) 이차함수 $y=2x^2-4x+a$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.

23. x축과 두 점에서 만나도록 a의 범위를 정하시오.

$x>2$

24. x축과 한 점에서 만나도록 a의 범위를 정하시오.

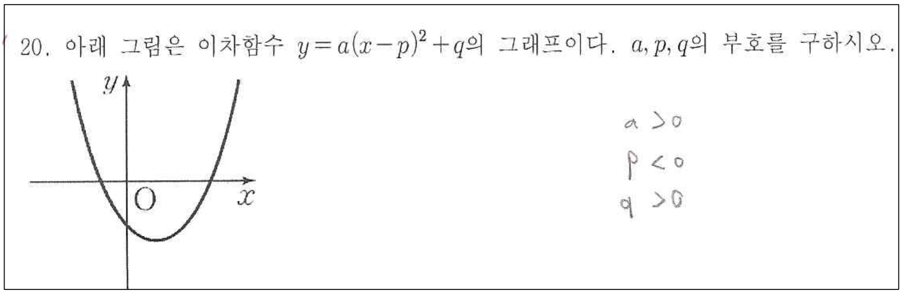
$x<1$

[그림 Ⅳ-7] 문항 23, 24번에서의 문제 풀이

3) 문제의 조건을 잘못 이용한 오류

주어진 전제 조건을 잘못 이해하거나 활용을 잘하지 못하여 생기는 오류를 말한다.

[그림 Ⅳ-8]에서 그래프의 모양이 아래로 볼록이므로 $a>0$이며 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q<0$이다. 이 학생은 문제의 조건으로 그래프를 제대로 이용하지 않은 것으로 보인다.

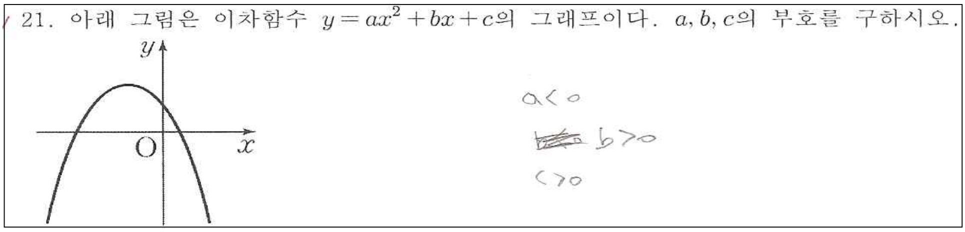

20. 아래 그림은 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프이다. a, p, q의 부호를 구하시오.

$a>0$
$p<0$
$q>0$

[그림 Ⅳ-8] 문항 20번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-9]는 먼저 주어진 그래프의 모양이 위로 볼록이므로 $a<0$이고 일반형 $y=ax^2+bx+c$을 표준형 $y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$으로 고쳐서 꼭짓점 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$을 찾아내고 축의 방정식이 $x=-\frac{b}{2a}$임을 알 수 있다. 또한 그래프는 축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 $-\frac{b}{2a}<0$이다. 그래서 a, b는 같은 부호이고 $b<0$이다. c는 y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치해서 $c>0$이다. 이 학생은

그래프의 형태를 보고 a의 부호를 옳은 답으로 적었고 c도 y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치한다는 것을 알고 옳은 답을 적었다. 하지만, b의 부호를 결정할 때 문제의 조건인 그래프를 잘못 이용한 경우이다.

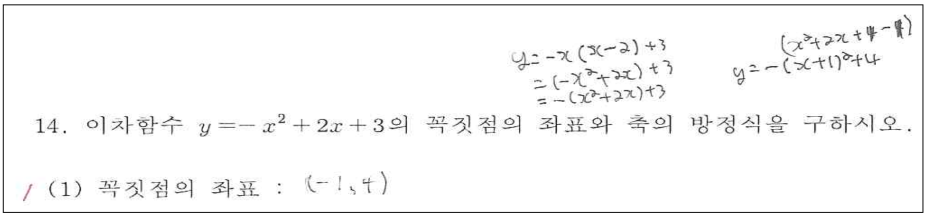

21. 아래 그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다. a, b, c의 부호를 구하시오.

[그림 Ⅳ-9] 문항 21번에서의 문제 풀이

4) 기술적인 오류

문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류를 말한다.

[그림 Ⅳ-10]은 꼭짓점을 구하기 위하여 계산을 하는 중간에 −부호를 빠뜨린 경우이다. $-(x^2+2x)+3$이 아니고 $-(x^2-2x)+3$이므로 기술적인 오류이다.

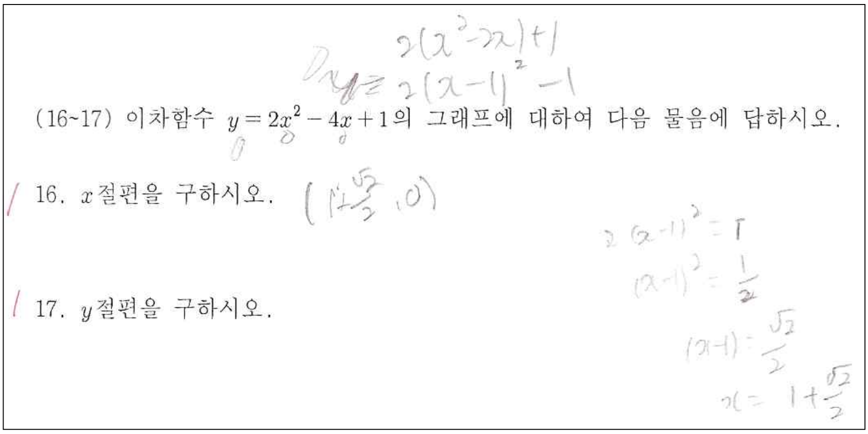


14. 이차함수 $y=-x^2+2x+3$의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하시오.

(1) 꼭짓점의 좌표 : $(-1, 4)$

[그림 Ⅳ-10] 문항 14번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-11]은 먼저 표준형으로 고친 다음에 $y=0$을 한 경우이다. 그래서 $2(x-1)^2=1$로 두고 계산하는 과정에서 $x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$을 적어야 하는데 −부호를 쓰지 않고 $x-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$이라 쓴 경우이다.


$2(x^2-2x)+1$

$y=2(x-1)^2-1$

(16~17) 이차함수 $y=2x^2-4x+1$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.

16. x절편을 구하시오. $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

17. y절편을 구하시오.

$2(x-1)^2=1$

$(x-1)^2=\frac{1}{2}$

$(x-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

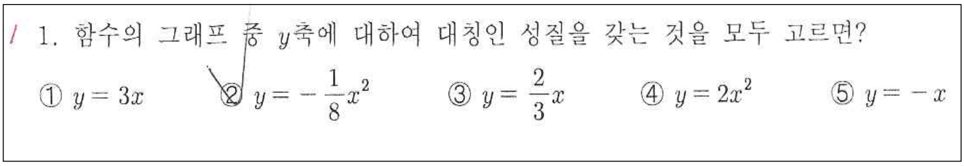
$x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

[그림 Ⅳ-11] 문항 16, 17번에서의 문제 풀이

5) 실수나 부주의로 인한 오류

풀이 과정이 정확하고 합리적이지만 답안을 옮길 때 조심하지 않고 잘못 기록하는 것으로 실수나 부주의로 인한 경우를 말한다.

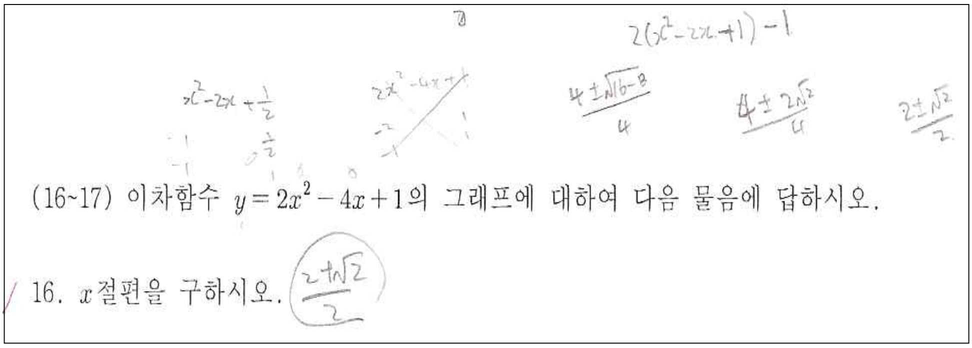
[그림 Ⅳ-12]는 y축에 대하여 대칭인 성질은 이차함수를 의미한다. 위의 내용은 이차함수가 2개임에도 불구하고 한 개의 답만을 적었으므로 실수나 부주의로 인한 오류이다.


1. 함수의 그래프 중 y축에 대하여 대칭인 성질을 갖는 것을 모두 고르면?

① $y=3x$ ② $y=-\frac{1}{8}x^2$ ③ $y=\frac{2}{3}x$ ④ $y=2x^2$ ⑤ $y=-x$

[그림 Ⅳ-12] 문항 1번에서의 문제 풀이

[그림 Ⅳ-13]은 x절편을 구하기 위하여 y에 0을 대입하고 인수분해가 되지 않는 이차방정식이므로 근의 공식을 사용하였다. 근의 공식을 사용해서 정확한 답이 나왔지만, 답안에 옮길 때 −부호는 빼고 적었으므로 실수나 부주의로 인한 오류이다.


(16~17) 이차함수 $y=2x^2-4x+1$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.

16. x절편을 구하시오. $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

[그림 Ⅳ-13] 문항 16번에서의 문제 풀이

3. 교정 학습 결과

1) 사전·사후 검사 결과 분석

두 번째 연구 문제에서 사전 검사에 비해 사후 검사의 향상 정도를 파악하기 위해 SPSS를 이용하여 T-test를 하였다. 그 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 전체에 대한 통계 분석

	평균	N	표준편차	상관계수	t (사전-사후)	유의확률
전체-사전	43.5366	82	26.83889	.769	-6.880	.000
전체-사후	58.3659	82	29.90376			

<표 Ⅳ-3>을 보면 사전 검사의 평균은 43.54이고 사후 검사의 평균은 58.37로서 사후 검사의 평균이 약 15점 높다. 대응표본 상관계수를 살펴보면 사전 검사와 사후 검사의 상관계수가 0.769이므로 큰 유의성이 있는 것으로 나타났다. 95%의 신뢰구간은 (−19.11, −10.54)이다. T통계량 값은 −6.880이고, 자유도 81의 T분포에 의한 T통계량 값의 양쪽 유의확률은 0.000으로 나타나므로 사전 검사와 사후 검사는 유의하게 차이가 있다고 말할 수 있다. 따라서 이차함수 그래프 학습에서 학생들이 범하는 오류를 중심으로 함께하기, 스스로하기, 정리하기로 교정한 학습 결과 성취도가 향상되었음을 알 수 있다.

2) 사전·사후 검사 내용별 결과 분석

사전·사후 검사지에 포함된 내용별로 대칭성의 이해, 평행이동, 일반형 그래프, 그래프 개형, 포물선의 위치관계 각각에 대한 분석 결과는 다음과 같다.

(1) 대칭성의 이해

<표 Ⅳ-4> 대칭성의 이해에 대한 통계 분석

	평균	N	표준편차	상관계수	t (사전-사후)	유의확률
대칭성의 이해-사전	4.1951	82	3.37909	.567	-4.748	.000
대칭성의 이해-사후	5.8049	82	3.21432			

<표 Ⅳ-4>를 보면 사전 검사의 평균은 4.2이고 사후 검사의 평균은 5.8로서 사후 검사의 평균이 약 1.6점 높다. 대응표본 상관계수를 살펴 사전 검사와 사후 검사의 상관계수가 0.567이므로 유의성이 있는 것으로 나타났다. 95%의 신뢰구간은 (−2.28, −0.93), T통계량 값은 −4.748, 그리고 T통계량 값의 양쪽 유의확률은 0.000으로 나타나므로 대칭성의 이해에 대한 사전 검사와 사후 검사는 유의하게 차이가 있다고 말할 수 있다. 즉 대칭성의 이해와 관련한 오류에 대한 교정 학습 후 성취도가 향상되었다고 볼 수 있다.

(2) 평행이동

<표 Ⅳ-5> 평행이동에 대한 통계 분석

	평균	N	표준편차	상관계수	t (사전-사후)	유의확률
평행이동-사전	19.6585	82	13.45795	.601	-5.317	.000
평행이동-사후	26.5244	82	12.68928			

<표 Ⅳ-5>를 보면 사전 검사의 평균은 19.66이고 사후 검사의 평균은 26.52로서 사후 검사의 평균이 약 7점 높다. 대응표본 상관계수를 살펴 사전 검사와 사후 검사의 상관계수가 0.601이므로 대칭성의 이해보다 더 유의성이 있는 것으로 나타났다. 95%의 신뢰구간은 (−9.43, −4.29), T통계량 값은 −5.317, 그리고 T통계량 값의 양쪽 유의확률은 0.000으로 나타나므로 평행이동에 대한 사전 검사와 사후 검사는 유의하게 차이가 있다고 말할 수 있다. 즉 평행이동과 관련한 오류에 대한 교정 학습 후 성취도가 향상되었다고 볼 수 있다.

(3) 일반형 그래프

<표 Ⅳ-6> 일반형 그래프에 대한 통계 분석

	평균	N	표준편차	상관계수	t (사전-사후)	유의확률
일반형 그래프-사전	12.5610	82	9.10447	.544	-4.602	.000
일반형 그래프-사후	17.8537	82	12.03608			

<표 Ⅳ-6>을 보면 사전 검사의 평균은 12.56이고 사후 검사의 평균은 17.85로서 사후 검사의 평균이 약 5점 높다. 대응표본 상관계수를 살펴 사전 검사와 사후 검사의 상관계수가 0.544이므로 유의성이 있는 것으로 나타났다. 95%의 신뢰구간은 (−7.58, −3.00), T통계량 값은 −4.602, 그리고 T통계량 값의 양쪽 유의확률은 0.000으로 나타나므로 일반형 그래프에 대한 사전 검사와 사후 검사는 유의하게 차이가 있다고 말할 수 있다. 즉 일반형 그래프와 관련한 오류에 대한 교정 학습 후 성취도가 향상되었다고 볼 수 있다.

(4) 그래프 개형

<표 Ⅳ-7> 그래프 개형에 대한 통계 분석

	평균	N	표준편차	상관계수	t (사전-사후)	유의확률
그래프 개형-사전	3.9512	82	3.99970	.391	-1.538	.128
그래프 개형-사후	4.7317	82	4.31491			

<표 Ⅳ-7>을 보면 사전 검사의 평균은 3.95이고 사후 검사의 평균은 4.73으로서 사후 검사의 평균이 약 0.8점 높다. 대응표본 상관계수를 살펴 사전 검사와 사후 검사의 상관계수가 0.391이므로 유의성이 없는 것으로 나타났다. 95%의 신뢰구간은 (−1.79, −0.22), T통계량 값은 −1.538, 그리고 T통계량 값의 양쪽 유의확률은 0.128로 나타나므로 그래프 개형에 대한 사전 검사와 사후 검사는 유의하게 차이가 있다고 말할 수가 없다. 즉 그래프 개형과 관련한 오류에 대한 교정 학습 후 평균 점수는 높았으나 통계적으로 성취도가 향상되었다고 볼 수 없다.

(5) 포물선의 위치관계

<표 Ⅳ-8> 포물선의 위치관계에 대한 통계 분석

	평균	N	표준편차	상관계수	t (사전-사후)	유의확률
포물선의 위치관계-사전	3.2195	82	4.88642	.465	-.088	.930
포물선의 위치관계-사후	3.2683	82	4.87384			

<표 Ⅳ-8>을 보면 사전 검사의 평균은 3.22이고 사후 검사의 평균은 3.27로서 사후 검사의 평균이 약 0.05점 높다. 대응표본 상관계수를 살펴 사전 검사와 사후 검사의 상관계수가 0.465이므로 유의성이 없는 것으로 나타났다. 95%의 신뢰구간은 $(-1.15,\ -1.06)$, T통계량 값은 -0.088, 그리고 T통계량 값의 양쪽 유의확률은 0.930으로 나타나므로 포물선의 위치관계에 대한 사전 검사와 사후 검사는 유의하게 차이가 있다고 말할 수가 없다. 즉 포물선의 위치관계와 관련한 오류에 대한 교정 학습 후 평균 점수는 높았으나 통계적으로 성취도가 향상되었다고 볼 수 없다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구는 이차함수 그래프에서 중학교 3학년 학생들이 범하는 오류의 유형과 그 사례를 살펴보고, 이러한 오류가 학습을 통해 어떻게 교정되어지는지 살펴보고자 하는 것이다.

대구시 달성군에 소재한 S중학교 3학년 학생 82명을 연구 대상으로 이차함수 그래프에 관한 검사를 실시하였다. 사전 검사에서 학생들의 정답률은 44.2%, 오답률은 52.5%, 무응답률은 3.3%로 나타났다. 이 중 오답에 대하여 문제 풀이 과정을 분석하여 오류 유형을 분류한 결과 개념적인 오류(51.3%), 잘못된 직관의 오류(33%), 문제의 조건을 잘못 이용한 오류(12.5%), 기술적인 오류(1.7%) 그리고 실수나 부주의로 인한 오류(1.5%) 총 5가지로 범주화할 수 있으며, 각각에 대한 결론은 다음과 같다.

첫째, 개념적인 오류는 이차함수와 관련된 용어로서 꼭짓점, 축의 방정식, 절편의 의미를 이해하지 못하는 경우와 x축에 관한 평행이동, y축에 관한 평행이동 등 이차함수 그래프의 개념을 이해하지 못하고 있는 경우이다. 학생들은 그래프를 그릴 때에도 꼭짓점, 축의 방정식, x절편과 y절편을 이용하기보다는 지나는 점을 찍어서 선으로 연결하여 포물선 모양으로 그리는 경우가 많았다. $y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 그리는 것 또한 마찬가지였다.

둘째, 잘못된 직관의 오류를 살펴보면 문제를 해결하기 위해 문제를 읽기는 하지만 풀이를 시도하지 않고 직관적으로 값이나 대수식을 제시하는 경우이다. 이러한 경우 답안의 형태는 문제에서 요구하는 값이나 식 등을 제시하였지만, 정답이 되는 경우는 없었다.

셋째, 문제의 조건을 잘못 이용한 오류는 주어진 문제의 그래프 개형 조건을 가지고 부호를 결정하는 문제에서 많이 나타났다. 주로 그래프를 통해 문제 해결에 필요한 조건을 가져와야 하는 경우 오류를 범하는 경우가 많았다.

넷째, 기술적인 오류는 문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류로서 '−' 부호를 붙이지 않아 계산이 틀린 것이 대부분이었다.

다섯째, 실수나 부주의로 인한 오류는 풀이 과정이 정확하고 합리적이지만 답안을 옮길 때 조심하지 않고 잘못 기록하는 오류이다. 문제에서 정답이 2개임에도 불구하고 맞는 답 하나만 적거나 풀이 과정과 정확한 답이 나왔지만, 답안에 옮길 때 조심하지 않아서 답을 다 적지 못하는 학생들이 있었다.

이와 같이 나타난 오류들이 학습을 통해 교정될 수 있는지 살펴보기 위해 교정 수업을 실시한 후 사전과 사후 검사를 통해 결과를 분석하였다. 전체적으로 사전과 사후 검사지에 대한 통계 분석 결과 교정 수업 전에 비해 그 후에 성취도가 높게 나타났다. t-검정 결과 통계적으로도 유의미한 결과이다. 그러나 반드시 본 연구에서 사용한 '함께하기, 스스로하기, 정리하기' 수업 방법이 절대적인 효과를 주었다고는 할 수 없다. 분석 결과 학습 내용에 따라 오류 교정이 성공적인 부분도 있고 그렇지 못한 부분도 나타났기 때문이다. 학습 내용별로 각각 분석한 결과는 대칭성의 이해, 평행이동, 일반형 그래프 각각에서 사전에 비해 사후에 성취도가 높게 나타났으며, 이는 통계적으로 유의미한 결과이다. 그러나 그래프 개형과 포물선의 위치관계에 관하여 사전·사후 검사에 대한 t-검정 결과 사전에 비해 사후의 평균 점수가 높게 나타났지만, 통계적으로 유의미하다고 할 수는 없다. 이를 통해 비교적 그래프 개형, 포물선의 위치관계에서 학생들의 어려움이 많음을 알 수 있다.

참고문헌

성종기 (2000). *이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구*, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.

안가영 (2002). *함수 그래프 과제에서의 오류 분석 및 처치-테크놀러지를 활용한 교수학적 환경에서-*, 석사학위논문, 이화여자대학교 대학원.

안선영 (2003). *고등학교 학생들의 함수의 그래프에 대한 이해 수준과 오류 유형 분석,* 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.

오정현 (1996) *중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대해 연구*, 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.

이경도 (2003). *이차함수 성질에 관한 오류분석과 Excel을 사용한 교정에 관한 연구*, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.

이현화 (2006). *이차함수의 성질에 관한 오류 분석과 인지갈등 유발을 통한 오류 교정에 관한 연구*, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.

장양순 (2010). *두 일차함수의 곱을 이용한 이차함수 그래프 지도*, 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.

최은형 (2004). *함수의 그래프에 대한 이해와 오류 분석에 관한 연구-중학교2학년을 대상으로-*, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Restion, VA: NCTM.

Vygotsgy, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gu, Young Hwa
Graduate School of Education
Keimyung University
Daegu, 704-701, Republic of Korea
E-mail: gnsl1980@hanmail.net

Kang, Young Yug
Keimyung University
Daegu, 704-701, Republic of Korea
E-mail: limd@kmu.ac.kr

Ryu, Hyunah
Chinju National University of Education
Jinnyangho-ro 369beon-gil, Jinju-si, Gyeongsangnam-do of Korea
E-mail: ryuha@cue.ac.kr