직교이방성 구형 판의 좌굴 해석 (II)

-고정단과 단순지지 단을 갖는 경우-

Buckling Analysis of a Orthotropic Rectangular Plates

-For Clamped and Simply Supported Boundaries-



이상열(Sang-Youl Lee) 이사 | 안동대학교 토목공학과 교수
| lsy@anu.ac.kr
정우영(Woo-Young Jung) 이사 | 강릉원주대학교 토목공학과 교수
| woojung@gwnu.ac.kr
장석윤(Chang Suk-Yoon) 명예회장 | 서울시립대학교 명예교수
| changsy@uos.ac.kr

1. 서 론

복합소재 구조의 거동에 대한 이해를 돕기 위하여 좌굴해석을 중심으로 해석해로 구하는 방법을 중심으로 전 호에 이어서 소개하고자 한다. 이번 호에서는 고정단과 단순지지의 경계조건을 갖는 직교 이방성 대칭 적층배열을 갖는 판의 좌굴에 대하여 다루기로 한다.

2. 기본 이론

x 및 y방향으로의 길이가 L_x, L_y인 직교 이방성 대칭 적층 구형판에 판의 경계 선상에 면내 하중 N_x, N_y가 면에 수직으로 작용할 경우의 포텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\pi_p &= U + \Omega \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}[D_{11}(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2})^2 + D_{22}(\frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2}) \\
&\qquad + D_{66}(2\frac{\partial^2 w^0}{\partial \times \partial y})^2 + 2P_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\
&\qquad + N_x(\frac{\partial w^0}{\partial x})^2 + N_y(\frac{\partial w^0}{\partial y^2})^2]dydx
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 N_x, N_y를 경계선상의 면내 하중과의 관계를 다음과 같이 정의하면

$$N_x = -\lambda N_{x0} \; N_y = -\lambda N_{y0} \tag{2}$$

여기서 λ는 하중 매개변수이며, 판이 좌굴 상태의 경우는 $\lambda=\lambda_{cr}$이 된다.

판의 중립축에서의 처짐을 w^o라 할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w^o = AX_i(x)Y_j(y) \tag{3}$$

여기서 $X_i(x)$, $Y_j(y)$는 x 및 y방향으로의 변위함수이고 A는 직폭이다.

포텐셜 에너지 원리에 의하여

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial A} = 0 \tag{4}$$

라고 하면 식 (1)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left[\frac{D_{11}}{L_x^4}\alpha_1^4 + \frac{D_{22}}{L_y^4}\alpha_3^4 + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{L_x^2 L_y^2}\alpha_2 - \lambda_{cr}\left(\frac{N_{xo}}{L_x^2}\alpha_4 + \frac{N_{yo}}{L_y^2}\alpha_5\right)\right] = 0 \tag{5}$$

식 (5)를 정리하면

$$(\lambda_{cr})_{ij} = \frac{D_{11}\frac{\alpha_1^4}{L_x^4} + D_{22}\frac{\alpha_3^4}{L_y^4} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{\alpha_4\alpha_5}{L_x^2 L_y^2}}{(N_{x0}\frac{\alpha_4}{L_x^2} + N_{y0}\frac{\alpha_5}{L_y^2})} \tag{6}$$

여기서,

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{C_x^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 X_i}{\sigma\xi^2}\right)^2 d\xi}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{1}{C_y^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial\eta^2}\right)^2 d\eta}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{C_x^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial X_i}{\partial\xi}\right)^2 d\xi$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{C_y^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial Y_j}{\partial\eta}\right)^2 d\eta$$

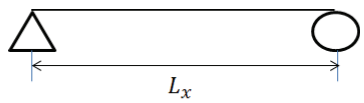
$$\alpha_2 = \alpha_4\alpha_5\frac{1}{C_x^2}\frac{1}{C_y^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial X_i}{\partial\xi}\right)^2 d\xi \int_0^1 \left(\frac{\partial Y_j}{\partial\eta}\right)^2 d\eta$$

$$C_x = \sqrt{\int_0^1 X_i^2 d\xi}$$

$$C_y = \sqrt{\int_0^1 Y_j^2 d\eta}$$

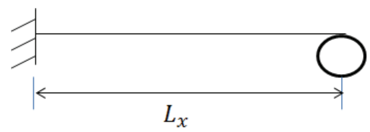
여기서,

(단순지지)



$$X_i = (i\pi\xi)$$

(한변고정, 한변 로울러)



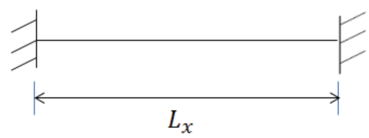
$$X_i = \gamma_i\cos(\mu_i\xi) - \gamma_i\cosh(\mu_i\xi) + \sin(\mu_i\xi) - \sinh(\mu_i\xi)$$

$$\tan\mu_i - \tanh\mu_i = 0 \qquad \text{(Exact)}$$

$$\mu_i \approx (i+0.25)\pi \qquad \text{(Approximate)}$$

$$\gamma_i = \frac{\sin\mu_i - \sinh\mu_i}{\cosh\mu_i - \cos\mu_i}$$

(양변 고정)



$$X_i = \gamma_i\cos(\mu_i\xi) - \gamma_i\cosh(\mu_i\xi) + \sin(\mu_i\xi) - \sinh(\mu_i\xi)$$

$$\cos\mu_i\cosh\mu_i = 1 \qquad \text{(Exact)}$$

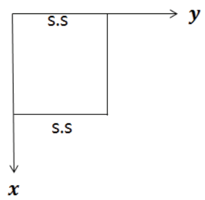
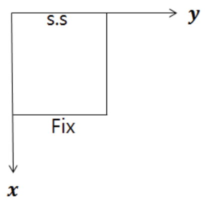
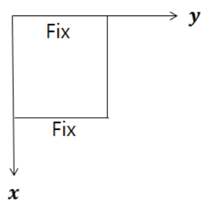
$$\mu_i \approx (i+0.5)\pi \qquad \text{(Approximate)}$$

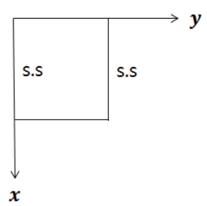
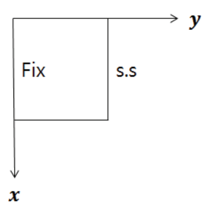
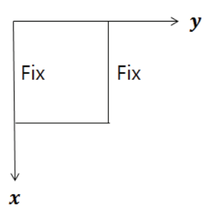
$$\gamma_i = \frac{\cos\mu_i - \cosh\mu_i}{\sin\mu_i - \sinh\mu_i}$$

※ Y_j의 경우는 ξ, x, L_x, i를 η, y, L_y, j 로 대치하면 된다.

$$\xi = \frac{x}{L_x}, \quad \eta = \frac{y}{L_y}$$

표 1. $\alpha_1 \rightarrow \alpha_5$의 근사값

	α_1	α_4	i
	$i\pi$	$i^2\pi^2$	1,2,3 • • •
	$(i+0.25)\pi$	$\alpha_1(\alpha_1-1)$	1,2,3 • • •
	4.730 $(i+0.5)\pi$	$\alpha_1(\alpha_1-2)$ $\alpha_1(\alpha_1-2)$	1 2,3,4 • • •

	α_3	α_5	j
	$j\pi$	$j^2\pi^2$	1,2,3 • • •
	$(j+0.25)\pi$	$\alpha_3(\alpha_3-1)$	1,2,3 • • •
	4.730 $(j+0.5)\pi$	$\alpha_3(\alpha_3-2)$ $\alpha_3(\alpha_3-2)$	1 2,3,4 • • •

3. 4변 단순지지에 대한 좌굴하중

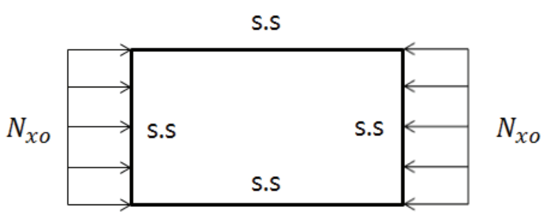
예로서 4변이 단순지지 상태에서 마주보는 x방향으로 균일한 강도로 면내 압축 하중이 작용할 경우의 좌굴하중은 다음과 같다.

$$N_{x,cr} = D_{11}\frac{\alpha_1^4}{\alpha_4}\frac{1}{L_x^2} + D_{22}\frac{\alpha_3^4}{\alpha_4}\frac{L_x^2}{L_y^4} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{\alpha_5}{L_y^2} \tag{7}$$

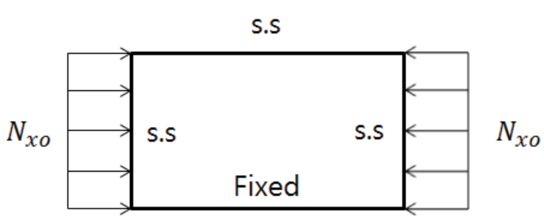
표(1)에서 $\alpha_1 = i\pi$, $\alpha_4 = i^2\pi^2$, $\alpha_3 = j\pi$, $\alpha_5 = j^2\pi^2$ 에서 $i=1$, $j=1$ 일 경우가 $l_x = \frac{L_x}{i} = L_x$ 가 되어 l_x가 좌굴파의 반파의 길이가 되며, 그때의 $N_{x,cr}$의 값이 가장 작은 값이 되고 그 값이 좌굴하중이 된다.

또한 α_3, α_5 값도 $j=1$인 경우의 값을 이용하여 좌굴 하중을 계산한 값을 정리하면 다음과 같다.

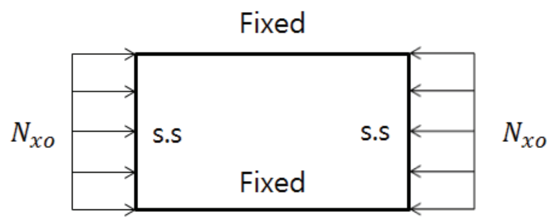
<좌굴하중 $N_{x,cr}$>



$$\frac{\pi^2}{L_y^2}\left(D_{11}\frac{L_y^2}{l_x^2} + D_{22}\frac{l_x^2}{L_y^2} + 2(D_{12}+2D_{66})\right)$$



$$\frac{\pi^2}{L_y^2}\left(D_{11}\frac{L_y^2}{l_x^2} + 2.441D_{22}\frac{l_x^2}{L_y^2} + 2.33(D_{12}+2D_{66})\right)$$



$$\frac{\pi^2}{L_y^2}\left(D_{11}\frac{L_y^2}{l_x^2} + 5.139D_{22}\frac{l_x^2}{L_y^2} + 2.62(D_{12}+2D_{66})\right)$$

-다음호에 계속-