

효율적인 실시간 차량 시뮬레이션을 위한 자코비안 갱신이 불필요한 뉴턴 적분방법

강종수, 임준현, 배대성*

A Jacobian Update-Free Newton's Method for Efficient Real-Time Vehicle Simulation

Jong Su Kang, Jun Hyun Lim, Dae Sung Bae*

*Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ., Sa 3-dong, Sangrok-gu, Ansan-si, Gyeonggi-do, 426-791, Republic of Korea***ARTICLE INFO***Article history:*Received 8 May 2014
Accepted 24 June 2014*Keywords:*Real-time vehicle simulation
Chassis-body reference frame
Implicit integration
Newton's method
Jacobian matrix
Jacobian update**ABSTRACT**

While implicit integration methods such as Newton's method have excellent stability for the analysis of stiff and constrained mechanical systems, they have the drawback that the evaluation and LU-factorization of the system Jacobian matrix required at every time step are time-consuming. This paper proposes a Jacobian update-free Newton's method in order to overcome these defects. Because the motions of all bodies in a vehicle model are limited with respect to the chassis body, the equations are formulated with respect to the moving chassis-body reference frame instead of the fixed inertial reference frame. This makes the system Jacobian remain nearly constant, and thus allows the Newton's method to be free from the Jacobian update. Consequently, the proposed method significantly decreases the computational cost of the vehicle dynamic simulation. This paper provides detailed generalized formulation procedures for the equations of motion, constraint equations, and generalized forces of the proposed method.

1. 서론

차량 동역학 해석연구에 있어서 가장 중요하게 고려되는 인자 중 한 가지는 계산 효율성인데 이는 계산 효율이 실시간 해석 가능성과 직결되기 때문이다. 특히, 차량 시뮬레이션은 HILS(hardware in the loop simulation)와 OILS(operator in the loop simulation)로 확대 적용되고 있는데, 두 가지 모두 실시간 해석을 전제로 한다는 점에서 계산 효율의 중요성을 다시 한 번 확인할 수 있다^{1,2)}.

상기된 뉴턴방법의 문제점을 보완하고자 근사화된 자코비안 행렬(approximated Jacobian)을 이용하여 자코비안 생성에 소요되는 시간을 감축시키는 방법이 제안된 바 있다³⁾. 본 논문은 더 나아

가 자코비안 갱신을 요구하지 않는 뉴턴방법을 제안하고자 한다. 즉, 시뮬레이션 전에 LU-분해된 자코비안 행렬을 저장하여 계속적으로 사용하는 개념으로 매 뉴턴 반복과정에서는 지배방정식의 생성과 역치환(back-substitution)만이 필요하게 되며 이를 통하여 시뮬레이션 효율성을 향상시키는 것이다.

제안하는 방법은 차량이라는 다물체 시스템에 있어 모든 바디는 차체(chassis body)에 대하여 제한된 운동을 한다는 점을 활용하는 것이다. 이를 위해 운동방정식, 구속조건, 그리고 일반힘이 관성좌표계가 아닌 차체부착 좌표계를 기준으로 공식화되었다. 차체를 모든 강체의 기저(base)로 활용하여 계산속도 향상을 도모하는 연구는 이미 제안된 바 있다. 예를 들어 Bae⁴⁾ 등은 상대좌표

* Corresponding author. Tel.: +82-2-2135-7097

Fax: +82-2-2135-7099

E-mail address: dsbae@hanyang.ac.kr (Dae Sung Bae).

(relative coordinates)와 명시적 적분방법(explicit integration method)을 사용하여 차체를 기준으로 하는 차량해석방법을 제안하였으며, Kim 외^[5]은 가상 기준강체를 각 시스템(sub-system)에 설정하여 차체에 대하여 독립적으로 해석하는 sub-system synthesis 방법을 제안하였다.

본 논문은 암시적 적분방법인 뉴턴방법과 직교좌표(Cartesian coordinates)를 바탕으로 실시간 차량 시뮬레이션을 구현하는 방법에 대한 연구로, 본 논문을 통해 참고문헌^[6]에서 제안된 방법의 운동방정식, 구속조건, 그리고 일반 힘을 공식화하는 일반화된 질차 및 기준공식과의 관계를 제공하고자 한다.

2. 차체좌표계 기준의 기구학적 관계식

본 연구에서 i 강체에 대한 직교 일반좌표는 다음과 같다.

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i^T & \boldsymbol{\theta}_i^T \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

여기서, $\boldsymbol{\theta}_i$ 는 관성좌표계에 대한 i 강체 좌표계의 오일러 회전각으로 \mathbf{A}_i 로 변환가능하다^[7]. 기존의 방법에서 변분(variation)을 위한 i 강체의 가상변위벡터 $\delta^c \mathbf{Z}_i$ 는 참고문헌^[8]과 같이 설정될 수 있다.

$$\delta^c \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_i^T & \delta \boldsymbol{\pi}_i^T \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

여기서, 위첨자 c 는 기존방법(conventional method)을 의미한다. 또한, $\delta \boldsymbol{\pi}'_i$ 는 $\mathbf{A}_i^T \delta \boldsymbol{\pi}_i$ 로 정의되며, $\delta \boldsymbol{\pi}'_i$ 또는 $\delta \boldsymbol{\pi}_i$ 는 $\delta \boldsymbol{\theta}_i$ 로 변환될 수 있다^[9].

차체부착 좌표계관점의 공식화를 위하여 Fig. 1과 같이 다음의 변수가 정의되었다^[6].

$$\mathbf{r}_{ci} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c, \mathbf{A}_{ci} \equiv \mathbf{A}_c^T \mathbf{A}_i \quad (3)$$

여기서, 아래첨자 c 는 차체(chassis)를 의미한다. 제안방법에서 i 강체에 대한 가상변위벡터 $\delta^p \mathbf{Z}_i$ 는 다음과 같이 설정되었다^[6].

$$\delta^p \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}'_{ci,c} & \delta \boldsymbol{\pi}'_{ci,c} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

여기서, 위첨자 p 는 제안방법(proposed method)을 의미한다. 또한, $\delta \mathbf{r}'_{ci,c}$ 와 $\delta \boldsymbol{\pi}'_{ci,c}$ 는 각각 $\mathbf{A}_c^T \delta \mathbf{r}_{ci}$ 와 $\mathbf{A}_c^T \delta \boldsymbol{\pi}_{ci}$ 이며, $\delta \mathbf{r}_{ci}$ 와 $\delta \boldsymbol{\pi}_{ci}$ 는 식 (3)에 변분을 취한 식으로 아래와 같다.

$$\delta \mathbf{r}_{ci} = \delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_c, \delta \boldsymbol{\pi}_{ci} = \delta \boldsymbol{\pi}_i - \delta \boldsymbol{\pi}_c \quad (5)$$

따라서, 기존방법과 제안방법의 가상변위벡터 관계는 다음과 같다^[6].

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_i &= \mathbf{A}_c (\delta \mathbf{r}'_c + \delta \mathbf{r}'_{ci,c}), \\ \delta \boldsymbol{\pi}'_i &= \mathbf{A}_{ci}^T (\delta \boldsymbol{\pi}'_c + \delta \boldsymbol{\pi}'_{ci,c}) \end{aligned} \quad (6)$$

유사하게 기존 및 제안방법의 속도벡터 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{A}_c (\dot{\mathbf{r}}'_c + \dot{\mathbf{r}}'_{ci,c}), \\ \boldsymbol{\omega}'_i &= \mathbf{A}_{ci}^T (\boldsymbol{\omega}'_c + \boldsymbol{\omega}'_{ci,c}) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $\boldsymbol{\omega}'_i = \mathbf{A}_i^T \boldsymbol{\omega}_i$ 이고, $\boldsymbol{\omega}'_c = \mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\omega}_c$ 이다. 그리고, $\boldsymbol{\omega}'_{ci} = \mathbf{A}_{ci}^T \boldsymbol{\omega}_{ci} = \mathbf{A}_c^T (\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_c)$ 이다. 또한, 식 (7)을 미분함으로써 기존 및 제안방법의 가속도벡터 관계는 다음과 같이 구해진다^[6].

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{A}_c (\ddot{\mathbf{r}}'_c + \ddot{\mathbf{r}}'_{ci,c}) + \mathbf{A}_c \tilde{\boldsymbol{\omega}}'_c (\dot{\mathbf{r}}'_c + \dot{\mathbf{r}}'_{ci,c}) \quad (8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}'_i = \mathbf{A}_{ci}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}}'_c + \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c}) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c} \mathbf{A}_{ci}^T (\boldsymbol{\omega}'_c + \boldsymbol{\omega}'_{ci,c}) \quad (9)$$

제안방법에서 차체 자체의 가상변위벡터는 $\delta^p \mathbf{Z}_c = [\delta \mathbf{r}'_c^T \delta \boldsymbol{\pi}'_c^T]^T$ 를 사용하므로 식 (6), (7), (8)에 $i=c$ 를 대입함으로써 차체에 대한 가상변위, 속도, 가속도들의 관계식은 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{r}_c = \mathbf{A}_c \delta \mathbf{r}'_c \quad (10a)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{A}_c \dot{\mathbf{r}}'_c \quad (10b)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{A}_c (\ddot{\mathbf{r}}'_c + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'_c \dot{\mathbf{r}}'_c) \quad (10c)$$

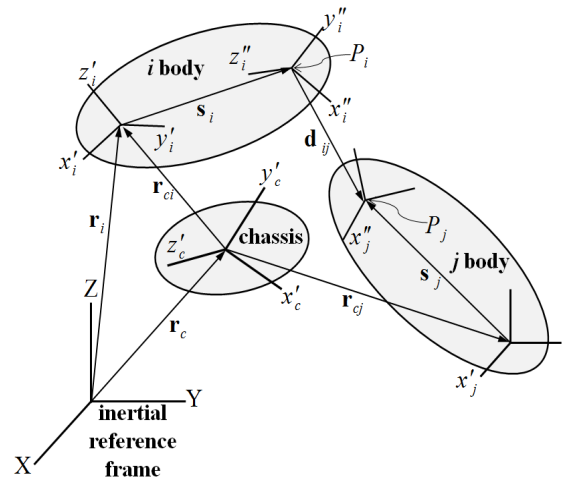


Fig. 1 Kinematic relationship between two adjacent bodies via the chassis body

3. 구속조건

기존방법에서 i 강체와 j 강체 간 조인트 구속조건 Φ 는 \mathbf{r}_i , \mathbf{A}_i , \mathbf{r}_j 와 \mathbf{A}_j 의 함수로 식 (2)에 정의된 가상변위벡터를 이용하여 변분을 취하면 다음과 같다^[8].

$$\delta\Phi = \Phi_{\mathbf{r}_i} \delta\mathbf{r}_i + \Phi_{\pi_i} \delta\pi_i + \Phi_{\mathbf{r}_j} \delta\mathbf{r}_j + \Phi_{\pi_j} \delta\pi_j = \mathbf{0} \quad (11)$$

여기서, 자코비안 행렬 $\Phi_{\mathbf{r}_i}$ 은 $\delta\Phi/\delta\mathbf{r}_i$ 등으로 정의된다. 한편 제안방법에서 Φ 는 식 (4)에 정의된 가상변위벡터를 이용하여 변분을 취하면 다음과 같다^[6].

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \Phi_{\mathbf{r}'_{ci,c}} \delta\mathbf{r}'_{ci,c} + \Phi_{\pi'_{ci,c}} \delta\pi'_{ci,c} \\ & + \Phi_{\mathbf{r}'_{cj,c}} \delta\mathbf{r}'_{cj,c} + \Phi_{\pi'_{cj,c}} \delta\pi'_{cj,c} \\ & + \Phi_{\mathbf{r}'_c} \delta\mathbf{r}'_c + \Phi_{\pi'_c} \delta\pi'_c = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에 식 (6)을 대입함으로써 아래의 식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \Phi_{\mathbf{r}_i} \mathbf{A}_c \delta\mathbf{r}'_{ci,c} + \Phi_{\pi'_i} \mathbf{A}_{ci}^T \delta\pi'_{ci,c} \\ & + \Phi_{\mathbf{r}_j} \mathbf{A}_c \delta\mathbf{r}'_{cj,c} + \Phi_{\pi'_j} \mathbf{A}_{cj}^T \delta\pi'_{cj,c} \\ & + (\Phi_{\mathbf{r}_i} + \Phi_{\mathbf{r}_j}) \mathbf{A}_c \delta\mathbf{r}'_c \\ & + (\Phi_{\pi'_i} \mathbf{A}_{ci}^T + \Phi_{\pi'_j} \mathbf{A}_{cj}^T) \delta\pi'_c = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

따라서, 식 (12)와 식 (13)를 비교하면 아래와 같은 기존 및 제안방법에서의 구속조건 자코비안 관계에 대한 일반식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_{\mathbf{r}'_{ci,c}} = \Phi_{\mathbf{r}_i} \mathbf{A}_c, \quad \Phi_{\pi'_{ci,c}} = \Phi_{\pi'_i} \mathbf{A}_{ci}^T \quad (14a)$$

$$\Phi_{\mathbf{r}'_{cj,c}} = \Phi_{\mathbf{r}_j} \mathbf{A}_c, \quad \Phi_{\pi'_{cj,c}} = \Phi_{\pi'_j} \mathbf{A}_{cj}^T \quad (14b)$$

$$\Phi_{\mathbf{r}'_c} = (\Phi_{\mathbf{r}_i} + \Phi_{\mathbf{r}_j}) \mathbf{A}_c \quad (14c)$$

$$\Phi_{\pi'_c} = (\Phi_{\pi'_i} \mathbf{A}_{ci}^T + \Phi_{\pi'_j} \mathbf{A}_{cj}^T) \quad (14d)$$

이 때 $\Phi_{\mathbf{r}_i} = -\Phi_{\mathbf{r}_j}$ 이므로 식 (14c)는 간단히

$$\Phi_{\mathbf{r}'_c} = \mathbf{0} \quad (14c')$$

이며, 한편 식 (14d)는

$$\Phi_{\pi'_c} = \Phi_{\pi'_{ci,c}} + \Phi_{\pi'_{cj,c}} \quad (14d')$$

로 표현될 수 있음에 주목하자. 따라서, 차체기준 구속조건 자코비

안을 구하기 위한 별도의 계산이 요구되지 않음을 알 수 있다.

예를 들어, 아래의 식과 같이 i 강체 부착벡터인 \mathbf{h}_i 와 강체간 연결 벡터 \mathbf{d}_{ij} 간의 직교조건을 정의하는 dot-2 구속조건을 고려해 보자.

$${}^{d2}\Phi(\mathbf{h}_i, \mathbf{d}_{ij}) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{d}_{ij} = 0 \quad (15)$$

여기서, Fig. 1과 같이 $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}'_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{s}'_i$ 로 정의되었다. 기존방법에서 식 (11)에 대응하는 dot-2에 대한 자코비안은 다음과 같다.

$${}^{d2}\Phi_{\mathbf{r}_i} = -\mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_i^T \quad (16a)$$

$${}^{d2}\Phi_{\pi_i} = \mathbf{h}_i^T (\mathbf{A}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}_i + \tilde{\mathbf{s}}'_i) \quad (16b)$$

$${}^{d2}\Phi_{\mathbf{r}_j} = \mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_i^T \quad (16c)$$

$${}^{d2}\Phi_{\pi_j} = -\mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}'_j \quad (16d)$$

식 (16)은 관성좌표계에 기준하여 표현되는 \mathbf{A}_i , \mathbf{A}_j , \mathbf{d}_{ij} 의 함수로 차량의 주행에 따라 많은 변화량을 가진다. 반면, 제안방법에서 식 (16)에 대응하는 자코비안은 식 (14)에 따라 다음과 같다.

$${}^{d2}\Phi_{\mathbf{r}'_{ci,c}} = -\mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_{ci}^T \quad (17a)$$

$${}^{d2}\Phi_{\pi'_{ci,c}} = \mathbf{h}_i^T (\mathbf{A}_{ci}^T \tilde{\mathbf{d}}_{ij,c} + \tilde{\mathbf{s}}'_i \mathbf{A}_{ci}^T) \quad (17b)$$

$${}^{d2}\Phi_{\mathbf{r}'_{cj,c}} = \mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_{ci}^T \quad (17c)$$

$${}^{d2}\Phi_{\pi'_{cj,c}} = -\mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_{ci}^T \mathbf{A}_{cj} \tilde{\mathbf{s}}'_j \mathbf{A}_{cj}^T \quad (17d)$$

여기서, $\mathbf{d}_{ij,c} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{d}_{ij}$ 이며, $\tilde{\mathbf{d}}_{ij,c} = \mathbf{A}_c^T \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}_c$ 관계가 이용되었다. 식 (17)은 차체부착좌표계에 기준하여 표현되는 \mathbf{A}_{ci} , \mathbf{A}_{cj} , $\mathbf{d}_{ij,c}$ 의 함수이므로 그 변화가 차체에 대한 상대변화량으로 제한된다는 점을 주목해야 한다.

한편, 각각 i 강체와 j 강체에 부착된 두 점 P_i 와 P_j 의 일치조건을 정의하는 spherical 구속조건은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$${}^{sph}\Phi(P_i, P_j) = \mathbf{A}_c^T (\mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}'_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{s}'_i) = \mathbf{0} \quad (18)$$

기존방법에서의 자코비안은 다음과 같다.

$${}^{sph}\Phi_{\mathbf{r}_i} = -\mathbf{A}_c^T \quad (19a)$$

$${}^{sph}\Phi_{\pi_i} = \mathbf{A}_{ci} \tilde{\mathbf{s}}'_i \quad (19b)$$

$${}^{sph}\Phi_{\mathbf{r}_j} = \mathbf{A}_c^T \quad (19c)$$

$${}^{sph}\Phi_{\pi'_j} = -\mathbf{A}_{cj}\tilde{\mathbf{s}}'_j \quad (19d)$$

이 때, ${}^{sph}\Phi_{\mathbf{r}_i}$ 와 ${}^{sph}\Phi_{\mathbf{r}_j}$ 는 \mathbf{A}_c 의 함수로 변화량이 크게 된다. 보다 일반적인 spherical 구속조건은

$${}^{sph*}\Phi(P_i, P_j) = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{s}'_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i\mathbf{s}'_i = \mathbf{0} \quad (20)$$

인데, 이 경우의 자코비안을 기존방법으로 계산하면 아래와 같다.

$${}^{sph*}\Phi_{\mathbf{r}_i} = -\mathbf{I} \quad (21a)$$

$${}^{sph*}\Phi_{\pi'_i} = \mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{s}}'_i \quad (21b)$$

$${}^{sph*}\Phi_{\mathbf{r}_j} = \mathbf{I} \quad (21c)$$

$${}^{sph*}\Phi_{\pi'_j} = -\mathbf{A}_j\tilde{\mathbf{s}}'_j \quad (21d)$$

이 경우는 ${}^{sph*}\Phi_{\pi'_i}$ 와 ${}^{sph*}\Phi_{\pi'_j}$ 가 각각 \mathbf{A}_i 와 \mathbf{A}_j 의 함수로 변화량이 크게 된다. 즉, ${}^{sph}\Phi$ 와 ${}^{sph*}\Phi$ 경우 모두 기존방법으로 변분을 취하는 경우 자코비안 성분의 일부는 관성좌표계에 대해 큰 변화량을 갖도록 전개되어 진다. 하지만, 제안방법의 경우 자코비안은 식 (22)와 같이 차체좌표계에 기준하는 성분만으로 표현되어 자코비안에 있어 큰 변화량이 발생하지 않는다.

$${}^{sph}\Phi_{\mathbf{r}'_{ci,c}} = -\mathbf{I} \quad (22a)$$

$${}^{sph}\Phi_{\pi'_{ci,c}} = \mathbf{A}_{ci}\tilde{\mathbf{s}}'_i\mathbf{A}_{ci}^T \quad (22b)$$

$${}^{sph}\Phi_{\mathbf{r}'_{cj,c}} = \mathbf{I} \quad (22c)$$

$${}^{sph}\Phi_{\pi'_{cj,c}} = -\mathbf{A}_{cj}\tilde{\mathbf{s}}'_j\mathbf{A}_{cj}^T \quad (22d)$$

4. 일반힘

직교 일반힘(Cartesian generalized force) \mathbf{Q} 에 의해 구속조건을 만족하는 가상변위 $\delta\mathbf{Z}$ 동안 행해진 가상일(virtual work)은 다음과 같다.

$$\delta W = \delta\mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \quad (23)$$

식 (23)은 식 (2)를 이용하여 기존방법에서 i 강체와 j 강체 사이에 작용하는 일반힘으로 아래와 같이 표현된다¹⁸⁾.

$$\delta W = \delta\mathbf{r}_i^T \mathbf{Q}_{t,i} + \delta\pi_i^T \mathbf{Q}_{r,i} + \delta\mathbf{r}_j^T \mathbf{Q}_{t,j} + \delta\pi_j^T \mathbf{Q}_{r,j} \quad (24)$$

여기서, ${}^c\mathbf{Q}_t$ 와 ${}^c\mathbf{Q}_r$ 는 각각 기존방법에서의 일반힘의 병진(translation) 및 회전(rotation) 성분이다.

한편, 제안방법에서 식 (23)은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta\mathbf{r}_{ci,c}^T {}^p\mathbf{Q}_{t,i} + \delta\pi_{ci,c}^T {}^p\mathbf{Q}_{r,i} \\ & + \delta\mathbf{r}_{cj,c}^T {}^p\mathbf{Q}_{t,j} + \delta\pi_{cj,c}^T {}^p\mathbf{Q}_{r,j} \\ & + \delta\mathbf{r}_c^T {}^p\mathbf{Q}_{t,c} + \delta\pi_c^T {}^p\mathbf{Q}_{r,c} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)에 식 (6)을 대입하므로써 아래의 식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta\mathbf{r}_{ci,c}^T \mathbf{A}_c^T {}^c\mathbf{Q}_{t,i} + \delta\pi_{ci,c}^T \mathbf{A}_{ci} {}^c\mathbf{Q}_{r,i} \\ & + \delta\mathbf{r}_{cj,c}^T \mathbf{A}_c^T {}^c\mathbf{Q}_{t,j} + \delta\pi_{cj,c}^T \mathbf{A}_{cj} {}^c\mathbf{Q}_{r,j} \\ & + \delta\mathbf{r}_c^T (\mathbf{A}_c^T {}^c\mathbf{Q}_{t,c} + \mathbf{A}_c {}^c\mathbf{Q}_{r,c}) \\ & + \delta\pi_c^T (\mathbf{A}_{ci} {}^c\mathbf{Q}_{r,i} + \mathbf{A}_{cj} {}^c\mathbf{Q}_{r,j}) \end{aligned} \quad (26)$$

따라서, 식 (25)와 식 (26)을 비교하면 아래와 같은 기존방법과 제안방법에서의 일반힘간의 일반 관계식을 얻을 수 있다.

$${}^p\mathbf{Q}_{t,i} = \mathbf{A}_c^T {}^c\mathbf{Q}_{t,i}, \quad {}^p\mathbf{Q}_{r,i} = \mathbf{A}_{ci} {}^c\mathbf{Q}_{r,i} \quad (27a)$$

$${}^p\mathbf{Q}_{t,j} = \mathbf{A}_c^T {}^c\mathbf{Q}_{t,j}, \quad {}^p\mathbf{Q}_{r,j} = \mathbf{A}_{cj} {}^c\mathbf{Q}_{r,j} \quad (27b)$$

$${}^p\mathbf{Q}_{t,c} = \mathbf{A}_c^T ({}^c\mathbf{Q}_{t,i} + {}^c\mathbf{Q}_{t,j}) \quad (27c)$$

$${}^p\mathbf{Q}_{r,c} = \mathbf{A}_{ci} {}^c\mathbf{Q}_{r,i} + \mathbf{A}_{cj} {}^c\mathbf{Q}_{r,j} \quad (27d)$$

이 때, 구속조건 자코비안과 유사하게 ${}^c\mathbf{Q}_{t,i} = -{}^c\mathbf{Q}_{t,j}$ 이므로 식 (27c)는 간단히

$${}^p\mathbf{Q}_{t,c} = \mathbf{0} \quad (27c')$$

이며, 한편 식 (27d)는

$${}^p\mathbf{Q}_{r,c} = {}^p\mathbf{Q}_{r,i} + {}^p\mathbf{Q}_{r,j} \quad (27d')$$

로 쓸 수 있다. 따라서, 차체부착 좌표계기준의 일반힘을 구하기 위한 별도의 계산은 요구되지 않는다.

5. 운동방정식

i 강체에 대한 변분형태 뉴턴-오일러 운동방정식은 아래와 같다.

$$\delta\mathbf{r}_i^T (m_i\ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i) + \delta\pi_i^T (\mathbf{J}'_i\dot{\boldsymbol{\omega}}'_i - \boldsymbol{\tau}'_i) = 0 \quad (28)$$

여기서, m_i 와 \mathbf{J}'_i 는 각각 i 강체의 질량과 j 강체좌표계에서 표현된 관성텐서행렬이며, \mathbf{f}_i 와 $\boldsymbol{\tau}'_i$ 는 각각 관성좌표계 기준의 외부힘 벡터와 i 강체 좌표계 기준의 토크벡터이다. 식 (28)을 전체 강체에 대해 확장을 하고, 라그랑지 승수(Lagrange multiplier) 이론을 적용하면, 구속조건 ${}^c\mathbf{Q}$ 를 만족하는 운동방정식은 다음과 같다^[8].

$${}^c\mathbf{F} = {}^c\mathbf{M}^c\dot{\mathbf{Y}} - {}^c\mathbf{Q} + {}^c\boldsymbol{\Phi}_Z^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (29)$$

여기서,

$${}^c\dot{\mathbf{Y}} = [{}^c\dot{\mathbf{Y}}_1^T, {}^c\dot{\mathbf{Y}}_2^T, \dots, {}^c\dot{\mathbf{Y}}_{nbd}^T]^T, \quad (30)$$

$${}^c\mathbf{Y}_i^T = [\mathbf{r}'_i^T \quad \boldsymbol{\omega}'_i^T]^T$$

$${}^c\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{nbd}), \quad (31)$$

$${}^c\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}'_i \end{bmatrix}$$

$${}^c\mathbf{Q} = [{}^c\mathbf{Q}_1^T, {}^c\mathbf{Q}_2^T, \dots, {}^c\mathbf{Q}_{nbd}^T]^T, \quad (32)$$

$${}^c\mathbf{Q}_i = [\mathbf{f}_i^T \quad \boldsymbol{\tau}'_i^T]^T$$

이며, nbd 는 강체 개수이다.

식 (28)의 $\delta\mathbf{r}'_i, \delta\boldsymbol{\pi}'_i, \ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}'_i$ 에 식 (6)과 식 (8)과 (9)를 적용하면 아래와 같이 차체를 기준으로 하는 운동방정식이 얻어진다.

$$\delta\mathbf{r}'_{ci,c} \left\{ m_i(\ddot{\mathbf{r}}'_c + \ddot{\mathbf{r}}'_{ci,c}) - \mathbf{A}_c^T\mathbf{f}_i + m_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_c(\dot{\mathbf{r}}'_c + \dot{\mathbf{r}}'_{ci,c}) \right\} + \delta\boldsymbol{\pi}'_{ci,c} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{ci}\mathbf{J}'_i\mathbf{A}_{ci}^T(\dot{\boldsymbol{\omega}}'_c + \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c}) \\ - \mathbf{A}_{ci}(\boldsymbol{\tau}'_i + \mathbf{J}'_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c}\mathbf{A}_{ci}^T(\boldsymbol{\omega}'_c + \boldsymbol{\omega}'_{ci,c})) \end{array} \right\} + \delta\mathbf{r}'_c \left\{ m_i(\ddot{\mathbf{r}}'_c + \ddot{\mathbf{r}}'_{ci,c}) - \mathbf{A}_c^T\mathbf{f}_i + m_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_c(\dot{\mathbf{r}}'_c + \dot{\mathbf{r}}'_{ci,c}) \right\} + \delta\boldsymbol{\pi}'_c \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{ci}\mathbf{J}'_i\mathbf{A}_{ci}^T(\dot{\boldsymbol{\omega}}'_c + \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c}) \\ - \mathbf{A}_{ci}(\boldsymbol{\tau}'_i + \mathbf{J}'_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c}\mathbf{A}_{ci}^T(\boldsymbol{\omega}'_c + \boldsymbol{\omega}'_{ci,c})) \end{array} \right\} = 0 \quad (33)$$

식 (28)의 i 가 c (차체)인 경우, 운동방정식은 아래와 같다.

$$\delta\mathbf{r}'_c \left\{ m_c\ddot{\mathbf{r}}'_c - \mathbf{A}_c^T\mathbf{f}_c + m_c\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_c\dot{\mathbf{r}}'_c \right\} + \delta\boldsymbol{\pi}'_c \left\{ \mathbf{J}'_c\dot{\boldsymbol{\omega}}'_c - \boldsymbol{\tau}'_c \right\} = 0 \quad (34)$$

전체 강체에 대해 확장을 하여 식 (29)와 같은 형태를 만들면 다음과 같다^[6].

$${}^p\mathbf{F} = {}^p\mathbf{M}^p\dot{\mathbf{Y}} - {}^p\mathbf{Q} + {}^p\boldsymbol{\Phi}_Z^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (35)$$

여기서,

$${}^p\dot{\mathbf{Y}} = [{}^p\dot{\mathbf{Y}}_c^T, {}^p\dot{\mathbf{Y}}_2^T, \dots, {}^p\dot{\mathbf{Y}}_{nbd}^T]^T \quad (36)$$

$${}^p\mathbf{Y}_c = [\mathbf{r}'_c{}^T \quad \boldsymbol{\omega}'_c{}^T]^T, \quad {}^p\mathbf{Y}_i = [\mathbf{r}'_{ci,c}{}^T \quad \boldsymbol{\omega}'_{ci,c}{}^T]^T \quad (37)$$

$${}^p\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{nbd} {}^p\mathbf{M}_i & {}^p\mathbf{M}_2 & {}^p\mathbf{M}_3 & \dots & {}^p\mathbf{M}_{nbd} \\ & {}^p\mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & & {}^p\mathbf{M}_3 & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & {}^p\mathbf{M}_{nbd} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$${}^p\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ci}\mathbf{J}'_i\mathbf{A}_{ci}^T \end{bmatrix} \quad (39)$$

$${}^p\mathbf{Q} = \left[\sum_{i=1}^{nbd} {}^p\mathbf{Q}_i^T, {}^p\mathbf{Q}_2^T, \dots, {}^p\mathbf{Q}_{nbd}^T \right]^T \quad (40)$$

$${}^p\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^T\mathbf{f}_i - m_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_c\dot{\mathbf{r}}'_i \\ \mathbf{A}_{ci}(\boldsymbol{\tau}'_i + \mathbf{J}'_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}'_{ci,c}\boldsymbol{\omega}'_i) \end{bmatrix} \quad (41)$$

6. 뉴턴 적분법

뉴턴방법(Newton's method)의 적용에 있어, 해를 $\mathbf{p} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{a}^T, \boldsymbol{\lambda}^T]^T$ 로 설정하였을 때, 운동방정식 $\mathbf{F} = \mathbf{0} (\in \mathbf{R}^{nc})$ (여기서, nc 는 직교일반좌표 개수, 즉 $6 \times nbd$), 위치, 속도, 가속도 수준의 구속조건식 $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} (\in \mathbf{R}^m)$, $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0}$ (여기서, m 은 구속조건식의 개수), 그리고 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ 와 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ 의 합성은 과결정 미분대수방정식(ODAE, overdetermined differential algebraic equations)를 구성한다. 이 ODAE에 tangent space method를 적용함으로써 다음과 같이 미지수의 개수 $(3nc+m)$ 와 일치하는 비선형 시스템 방정식이 생성된다.

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \\ \ddot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) \\ \mathbf{U}^T(\mathbf{q} + \beta_0\mathbf{v} + \beta_1) \\ \mathbf{U}^T(\mathbf{v} + \beta_0\mathbf{a} + \beta_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (42)$$

여기서, β_0, β_1 , 그리고 β_2 는 적분계수에 의해 결정되며, 행렬 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{nc \times (nc-m)}$ 는 정방행렬 $[\dot{\boldsymbol{\Phi}}_q^T \mathbf{U}]^T$ 가 특이행렬이 되지 않도록 설정된다^[10].

뉴턴방법에 따라 $\mathbf{H}_p\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{H}$ 에서 역치환(back substitution)으로 $\Delta\mathbf{p}$ 를 구한 후, 해를 갱신(즉, $\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i + \Delta\mathbf{p}$)하는 과정을 반복함으로써 보정(correction)이 수행된다. 이 때, 시스템 자코비안 \mathbf{H}_p 의 생성과 LU-분해(LU-decomposition)에 가장 많은 시간이 소요

되므로, 계산시간의 단축을 위해서 \mathbf{H}_p 의 갱신주기가 조절되어진다. 본 논문에서는 스텝마다 한 번씩만 \mathbf{H}_p 를 갱신하는 것을 종전의 방법으로 설정하였다. 제안방법은 Newton chord법^[11]을 적용하여 초기(즉, $t=0$) \mathbf{p} 를 통해 $\mathbf{H}_{p,t=0}$ 를 생성 및 LU-분해하고 이를 저장한 후 전 시물레이션 시간동안 갱신없이 사용하는 것이다. 따라서, Fig. 2와 같이 실시간 시물레이션 중에는 자코비안 계산에 소요되는 시간은 없으며 오직 $\mathbf{H}(\mathbf{p})$ 를 새롭게 생성하여 역치환만을 수행하게 된다. 이 때, 기존방법과 제안방법의 $\Delta\mathbf{p}$ 는 상이하므로 서로 다른 절차를 거쳐 벡터 \mathbf{p} 가 갱신된다. 구체적인 위치벡터 갱신 절차는 기존 및 제안방법 각각 서로 다른 절차를 거쳐 다음과 같이 갱신된다.

기존방법에서는 $[\delta\mathbf{r}_i^T \ \delta\boldsymbol{\pi}_i^T]^T$ 이 가상변위벡터로 설정되어 있으므로 i 강체의 위치 및 자세에 대한 $\Delta\mathbf{q}$ 는 $\Delta\mathbf{r}_i$ 와 $\Delta\boldsymbol{\pi}_i^T$ 이며, 일반좌표 \mathbf{r}_i 와 $\boldsymbol{\theta}_i$ 의 Newton 갱신은 다음과 같이 행해진다.

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \Delta\mathbf{r}_i, \ \boldsymbol{\theta}_i^{n+1} = \boldsymbol{\theta}_i^n + \Delta\boldsymbol{\theta}_i \quad (43)$$

여기서, $\Delta\boldsymbol{\theta}_i$ 는 $\Delta\boldsymbol{\pi}_i(=\mathbf{A}_i\Delta\boldsymbol{\pi}_i')$ 의 함수로 위식에 선행하여 계산되어야 한다. 한편, 제안방법은 가상변위벡터가 $[\delta\mathbf{r}'_{\alpha,c}^T \ \delta\boldsymbol{\pi}'_{\alpha,c}^T]^T$ 로 설정되었으므로 $\Delta\mathbf{r}'_{\alpha,c}$ 와 $\Delta\boldsymbol{\pi}'_{\alpha,c}$ 를 이용하여 다음의 단계를 거쳐 갱신된다.

$$1 \text{ 단계 } \mathbf{r}_{ci}^{n+1} = \mathbf{r}_{ci}^n + \mathbf{A}_c^n \Delta\mathbf{r}'_{ci,c}, \ \boldsymbol{\theta}_{ci}^{n+1} = \boldsymbol{\theta}_{ci}^n + \Delta\boldsymbol{\theta}_{ci} \quad (44)$$

$$2 \text{ 단계 } \mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_c^{n+1} + \mathbf{r}_{ci}^{n+1}, \ \boldsymbol{\theta}_i^{n+1} = \boldsymbol{\theta}_c^{n+1} + \boldsymbol{\theta}_{ci}^{n+1} \quad (45)$$

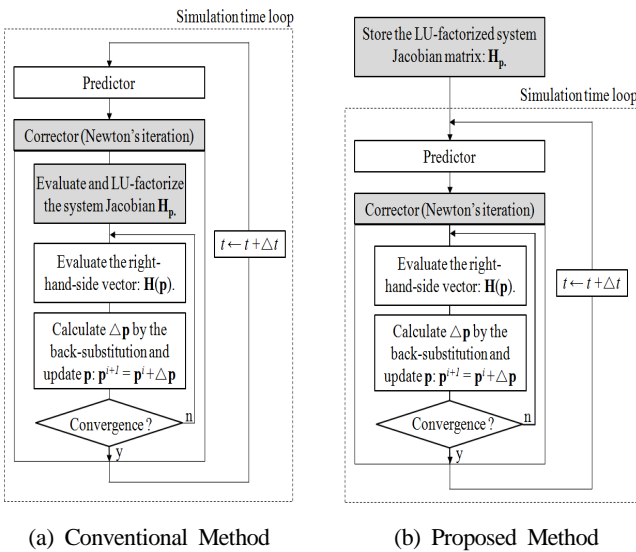


Fig. 2 Flow charts of (a) the conventional method and (b) the proposed method

7. 해석결과

제안된 일반관계식의 검증을 위하여 Fig. 3과 같이 전-후륜 모두 더블 위시본 타입의 현가장치, 조향장치 및 파워트레인 시스템을 갖는 전 차량 모델을 이용하였다.

모의실험은 2개의 주행조건에 대해 수행하였는데, 하나는 차량을 60 km/hr로 주행시킨 후, rack and pinion조인트를 Fig. 4(a)와 같이 조향하여 J-turn 시물레이션을 수행하였고, 다른 하나는 차량이 40 km/hr로 주행 중 Fig. 4(c)와 같은 범프를 통과하는 bump pass 시물레이션을 수행하였다.

수행된 2개의 주행조건에 대해 기존방법과 제안방법으로부터 계산된 결과가 비교되어졌다. 모든 시물레이션은 상용프로그램인 버추얼모션사의 다플(DAFUL) 프로그램을 기반으로 수행되었으며, 3.5 GHz PC를 이용하여 1 ms로 고정된 스텝사이즈에서 이루어졌다.

Fig. 4(b)와 4(d)는 각각 J-turn 및 bump-pass 주행조건에서 차체의 횡방향 및 종방향 가속도를 보여주고 있는데, 두 방법의 결과가 매우 유사함을 확인할 수 있다.

일정한 스텝(1 ms)당 소요되는 계산시간은 J-turn의 경우 기존방법 1.03 ms, 제안방법 0.43 ms였으며, bump-pass의 경우에는 기존방법 0.52 ms, 제안방법 0.24 ms였다. 따라서, 제안방법이 기존방법 대비 약 57%의 계산시간 절감효과가 있음을 알 수 있었다.

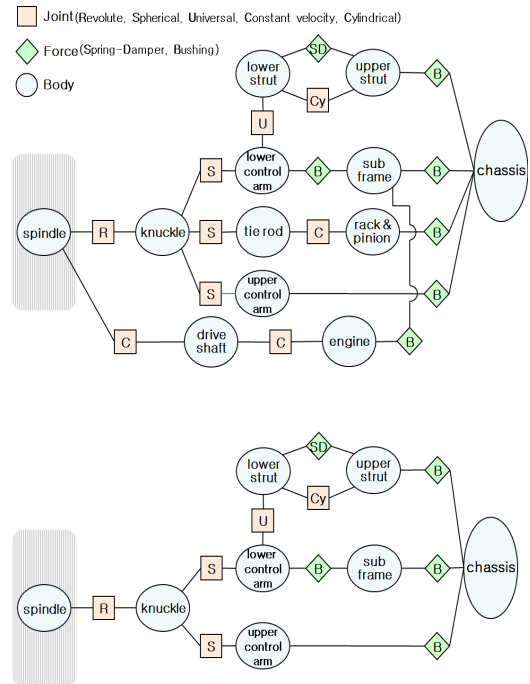


Fig. 3 Illustration of the vehicle model used in the simulations: (upper) front right suspension, steering and powertrain system, (lower) rear right suspension

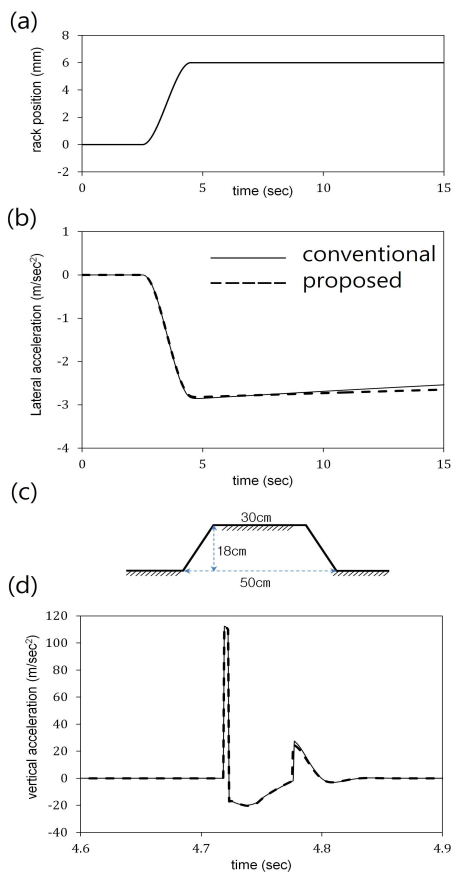


Fig. 4 Simulation results from the conventional (solid) and proposed (dashed) methods during (b) J-turn and (d) bump-pass simulations; (a) and (c) are simulation inputs

8. 결론 및 고찰

본 연구는 실시간 차량 시뮬레이션을 위한 자코비안 갱신이 불필요한 뉴턴 적분방법을 제안한다. 기존의 직교 일반좌표계를 이용하는 방법에서는 시스템 자코비안의 성분들이 고정된 관성좌표계에 기준하여 표현됨에 따라, 차량의 운동에 따른 자코비안의 변화량이 크므로, 뉴턴방법을 사용함에 있어 자코비안이 주기적으로 새롭게 생성되어야만 한다. 제안방법에서는 차량의 기준강체라고 할 수 있는 차체에 부착된 좌표계를 기준으로 운동방정식, 구속조건 및 일반힘이 표현되었다. 따라서, 시스템 자코비안의 변화량 역시 차체 좌표계에 상대적인 변화량으로 제한되며 이를 통해 자코비안 갱신이 불필요한 뉴턴방법을 가능케 하였다.

뉴턴반복을 통해 해를 찾아가는 뉴턴 적분법을 이용한 해석에 있어, 반복횟수가 해석시간에 영향을 준다. 기존방법의 경우 매 시간스텝에서 자코비안을 갱신하므로 초기 자코비안을 갱신없이 사용하는 제안방법에 비해 수렴성이 일반적으로 우수하다고 할 수 있겠다. 본 논문에서 수행된 시뮬레이션은 1 ms라는 매우 작은 스텝사이즈를 적용하여 두 방법간의 수렴성에 큰 차이는 없었으나

(즉, 두 방법 모두 1~2회의 뉴턴반복만으로 수렴됨), 10 ms 같은 상대적으로 큰

스텝사이즈를 적용할 경우 두 방법 간 수렴성에 차이를 보일 수 있을 것으로 판단되며 이에 대한 연구가 추후 진행될 것이다.

제안된 방법은 직교좌표(Cartesian coordinates)를 기반으로 뉴턴적분 방법을 이용하는 다물체 차량 시뮬레이션에 특화되어 적용 가능한 방법이다. 하지만, 차량 이외에도(차량의 경우 차체와 같은) 기준강체가 오로지 한개만 존재하며 시스템내의 모든 강체들이 그 기준강체와 제한된 상대운동을 갖는 경우 제안방법의 적용을 고려해 볼 수 있다. 반면 시스템내의 강체간 상대운동이 큰 폭으로 일어나는 경우 설정 기준강체를 설정하고 그 강체에 대해 상대적인 자코비안을 구한다고 할지라도 자코비안의 변화량이 커서 제안방법을 적용하긴 어렵다고 판단된다.

본 논문에서는 운동방정식, 구속조건, 그리고 일반 힘을 차체좌표계 기준의 방법으로 공식화하는 일반화된 절차를 기존의 관성좌표계 기준의 방법과 비교 예시함으로써 구속조건 및 일반 힘의 종류에 상관없이 편리하게 제안방법을 구현토록 하였으며, 전 차량 모델을 바탕으로 J-turn과 bump-pass 조건에서 검증하였다. 제안 방법은 본 논문에 설명된 기존 방법과의 일반화된 관계식을 이용하여 기존 프로그램을 활용하여 용이하게 구현될 수 있다.

Nomenclature

- A_i : orientation matrix of the $x'_i - y'_i - z'_i$ reference frame
- d_{ij} : connection vector from $x''_i - y''_i - z''_i$ to $x''_j - y''_j - z''_j$
($\therefore d'_{ij} = A_i^T d_{ij}$)
- r_i : position vector of the $x'_i - y'_i - z'_i$ reference frame
- s_i : vector from $x'_i - y'_i - z'_i$ to $x''_i - y''_i - z''_i$ in the body i
($\therefore s'_i = A_i^T s_i, s'_i$: constant vector)
- $X - Y - Z$: inertial reference frame
- $x'_i - y'_i - z'_i$: reference frame of body i
- $x''_i - y''_i - z''_i$: joint reference frame of body i
- δr_i : virtual displacement of the body i with respect to the inertial reference frame
- $\delta \pi_i$: virtual rotation of the body i with respect to the inertial reference frame

후기

본 연구는 국방과학연구소 국방생존성기술 특화연구센터의 연구비 (UD120019OD)를 지원받아 수행되었습니다.

References

- [1] Baek, W., Song, B., 2009, Design and validation of a longitudinal velocity and distance controller via hardware-in-the-loop simulation, *Int. J. Automotive Technology* 10:1 95-102.
- [2] Yi, K. S., Yi, S. J., 2005, Real-time simulation of a high speed multibody tracked vehicle, *Int. J. Automotive Technology* 6:4 351-357.
- [3] Arnold, M., Burgermeister, B., Eichberger, A., 2007, Linearly implicit time integration method in realtime applications : DAEs and stiff ODEs, *Multibody Sys. Dyn.* 17 99-117.
- [4] Bae, D. S., Lee, J. K., Cho, H. J., Yae, H., 2000, An explicit integration method for realtime simulation of multibody vehicle models, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 187 337-350.
- [5] Kim, S. S., Jeong, W., 2007, Subsystem synthesis method with approximate function approach for a real-time multibody vehicle model, *Multibody Sys. Dyn.* 17 141-156.
- [6] Lee, J. K., Kang, J. S., Bae, D. S., 2014, An efficient real-time vehicle simulation method using a chassis-based kinematic formulation, *IMEchE part D : J. Automobile. Engineering* 228:3 272-284.
- [7] Craig, J. J., 2004, *Introduction to robotics : mechanics and control*(3rd Ed.) Prentice Hall.
- [8] Haug, E. J., 1989, *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems : Volume I. Basic Methods*, Needham Heights Massachusetts : Allyn and Bacon.
- [9] Diebel, J., 2006, *Representing Attitude : Euler angles, unit quaternions and rotation vectors*, Stanford Univ., Technical Report 94301-9010.
- [10] Bae, D., Cho, H., Lee, S., Moon, W., 2001, Recursive formulas for design sensitivity analysis of mechanical systems, *Computed Methods Appl. Mech. Eng.* 190 3865-3879.
- [11] Kelley, C. T., 1995, *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, Philadelphia Pennsylvania : SIAM press.