

## 벽지문양을 소재로 한 수학학습자료 개발연구

신현용(한국교원대학교)  
신실라(한국교원대학교 대학원)<sup>†</sup>  
문태선(서울특별시 교육청)  
권혜윤(한국교원대학교 대학원)  
이윤우(한국교원대학교 대학원)

### I. 서론

#### 1. 연구의 필요성 및 목적

우리나라 궁궐이나 사찰 그리고 도자기나 전통 의상에는 다양한 무늬가 그려져 있다. 우리의 주변에서 쉽게 접할 수 있는 이러한 문양에는 수학적 요소가 여럿 있다. 예를 들어, 수학은 벽지 문양을 수학적 관점에서 분류하여 열일곱 개의 타입이 존재한다는 것을 증명한다.

수학과 디자인에 관한 대략적인 이해를 위해서는 대칭, 기본조각, 좌표축의 개념을 명확히 하고, 타입을 결정하는 과정을 체계적으로 알아야 할 필요가 있다.

이 연구에서는 벽지와 관련된 수학문헌을 참고하여 관련된 기본개념을 살펴보고, 열일곱 개의 타입을 자세히 소개하며, 각각의 타입에 해당하는 한국의 전통 문양을 찾는다. 이러한 작업을 토대로 하여 학문융합, 현장 체험활동, 또는 스토리텔링 등 수학학습 자료의 개발 방안을 살핀다.

#### 2. 연구 문제

위와 같은 필요성과 목적에 따라 연구문제를 다음과 같이 설정한다.

첫째, 벽지 타입의 결정과 기호는 기본조각 그리고 좌표축과 어떠한 관련이 있는가?

둘째, 벽지의 열일곱 개 타입은 무엇이며, 그 각각을 구분하는 절차는 무엇인가?

셋째, 열일곱 개의 벽지 타입 각각에 해당하는 우리나라 전통 문양의 예는 무엇인가?

넷째, 수학과 문양을 융합한 소재로 어떠한 수학수업 자료나 방안을 모색할 수 있을까?

#### 3. 용어의 정의

이 글에서 사용하는 용어는 다음과 같다. 여기에 정의되지 않은 용어는 관례에 따른다.

##### 가. 벽지

일정한 조각이 좌 우와 상 하로 반복되는 문양을 벽지(wallpaper)라고 하고, 반복되는 최소한의 조각을 기본조각(fundamental domain)이라고 한다. 이 글에서 특별한 언급이 없으면 모든 문양은 벽지를 뜻한다.

##### 나. 전통 문양

전통 문양은 우리나라의 궁궐이나 사찰 등과 같은 유적지, 또는 도자기나 전통 의복에 그려진 것으로서 조선시대 이전의 것을 뜻한다. 예술가에 의해 근래에 제작된 문양은 배제한다. 또, 벽지 문양은 완전한 벽지의 형태를 가져야 하는 것으로서 띠 문양을 임의로 여러 겹 쌓아 만든 문양은 배제한다.

##### 다. 타입

이차원적 평면 문양은 색(色)을 고려하지 않으며 대칭성에 따라 열일곱 개의 형태만 존재한다. 이 각각의 형태를 타입(type)이라고 한다.

\* 접수일(2014년 07월 25일), 수정일(2014년 08월 12일), 게재확정일(2014년 08월 18일)

\* ZDM분류 : D44, N84, N85, U54

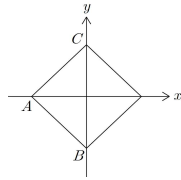
\* MSC2000분류 : 97B40, 97C20, 97C80, 97U50, 97U70

\* 주제어 : 벽지, 타입, 학문융합, 스토리텔링

<sup>†</sup> 교신저자

라. 좌표축과 격자벡터

벽지의 기본조각이 아래와 같은 마름모꼴이라고 하자.



[그림 1] 좌표축과 격자벡터  
[Fig. 1] Coordinate axes and lattice vectors

벽지 타일을 규정할 때 적용하는 좌표축은 위 그림에서  $x$ -축과  $y$ -축이고, 벡터  $AB$ 와 벡터  $AC$ 는 기본조각의 격자벡터(lattice vector)이다.

마. 대칭

문양의 수학적 이해는 기본조각의 대칭성에 의한다. 다음은 벽지의 몇 가지 대칭과 그의 수학적 표현이다.

- 좌·우반사( $y$ -축 반사):  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 상·하반사( $x$ -축 반사):  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $180^\circ$  회전:  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $x$ -축 미끄럼반사:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $y$ -축 미끄럼반사:  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

이 경우, 좌표평면위의 점  $(x,y)$ 는 행렬  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ 로 표현된다. 예를 들어, 점  $(x,y)$ 의  $y$ -축에 관한 반사는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

대칭의 수학적 표현에 관한 자세한 논의는 신현용,

유익승, 문태선, 신기철, 신실라(2014)에 있다.

## II. 이론적 배경

신현용, 신실라(2014)는 수학적으로 가능한 띠(frieze) 문양 일곱 개를 소개하고, 각각의 타입에 해당하는 한국의 전통 문양을 제시하였다. 거기에 언급된 수학 내용은 간단하고 초보적이거나 직관적 설명과 이해도 가능하므로 초등학교 학생 대상의 현장 학습에서조차 적용이 가능할 것으로 여겨진다.

벽지 문양의 이해를 위한 수학적 접근에 관한 국내의 연구는 많지 않으나 이상락은 이 글의 연구문제의 일부를 제기한 바 있다(이상락, 2010). 그의 논문에는 약간의 오류가 있지만, 몇 개의 문양은 옳게 제시되었다.

문양의 대칭성은 각각의 대칭을 나타내는 행렬의 성질에 의한다. 예를 들어, 다음은 잘 알려진 사실로서 띠나 벽지 문양의 분류에 유용하다.

가. 상·하반사,  $180^\circ$  회전, 좌·우반사 중 어느 두 개의 대칭이 있으면 나머지 대칭도 존재한다. 이는 다음과 같은 관계로부터 확인할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

나. 다음 관계로부터  $x$ -축 미끄럼반사와 상·하반사는 동시에 존재할 수 없다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 행렬  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 은  $x$ -축 방향으로의  $\frac{1}{2}$ 만큼

의 평행이동을 나타내는데 이는 용납되지 않는 변환이다. 평행이동은 정수( $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ )배만큼만 가능하기 때문이다.

다. 위 두 사실로부터 정해진 기본조각에 관하여  $x$ -축 미끄럼반사,  $180^\circ$  회전, 좌·우반사가 동시에 존재할

수 없다는 것을 알 수 있다. 또, 다음 관계로부터  $x$ -축 미끄럼반사와  $180^\circ$  회전이 있으면  $x = \frac{1}{4}$ 에서의 좌·우 반사가 존재한다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

실제로,  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + \frac{1}{2} \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다. 이제,

$(x, y)$ 의  $x = \frac{1}{4}$  축으로 하는 좌우반사 대칭점을  $(\square, y)$ 라고 두면, 대칭축과  $(x, y)$ 점 사이의 거리와  $(\square, y)$ 점과 대칭축 사이의 거리가 같으므로,  $\frac{1}{4} - x = \square - \frac{1}{4}$ 이다. 따라서  $\square = -x + \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

### III. 연구방법

설정된 연구문제를 다음과 같은 방법과 절차로 해결한다. 첫째, 군론(group theory)이나 결정학(crystallography) 등에서 보편적으로 통용되는 벽지 타입의 기호는 무엇이며, 그 기호는 어떠한 뜻을 가지는지 조사한다. 이때, 기본조각의 설정과 그에 따른 좌표축이 어떠한 역할을 하는지 살핀다.

둘째, 벽지 문양을 다룬 군론 문헌을 통하여 벽지의 열일곱 개 타입이 무엇인지 조사한다. 이때, 각 타입에 관한 대칭성을 기호로 나타내어 타입의 특징을 분명하게 표현한다. 또, 각 타입의 공인된 기호와 그 뜻을 소개한다. 한편, 주어진 벽지 문양이 어떤 타입인지 결정하는 체계적인 과정을 제시한다.

셋째, 벽지 타입 각각에 해당하는 한국의 전통 문양을 제시한다. 이를 위하여 먼저는 각각의 타입에 맞는 문양을 서적이거나 인터넷을 통하여 조사한다. 서적 이외의 조사 대상은 궁궐과 사찰 그리고 박물관과 미술관 등이다. 각 타입에 맞는 문양이 발견되면, 가능한 한, 해당 문양을 소장하고 있는 곳을 방문하는 등 실제 확인 과정

을 거친다.

넷째, 이상의 연구 내용을 활용하여 현장 체험 학습 방안이나 스토리텔링 구성을 제안한다. 개발된 자료는 초등학교, 중학교, 또는 고등학교를 특별히 염두에 두지 않는다. 벽지 문양과 관련된 수학을 대략적으로 제시하여, 내용과 범위는 수업에 적용하고자 하는 교사가 재구성할 수 있게 하기 위함이다.

이 논문에서 인용하는 수학적 명제들은 별도로 증명하지 않는다. 필요한 모든 증명은 신현용, 유익승, 문태선, 신기철, 신실라(2014)에 있다.

### IV. 결과 분석 및 논의

#### 1. 기본조각과 좌표축 가. 대칭축 기호

기본조각의 대칭성은 벽지의 타입을 결정한다. 대칭축을 나타내는 기호로서 군론이나 결정학 등에서 공통적으로 사용하는 것은 다음과 같다.

[표 1] 대칭축 표기 기호  
[Table 1] Notations for symmetry axes

180° 회전축	120° 회전축	90° 회전축	60° 회전축
◇	△	□	◇
미끄럼반사축		반사축	

평행이동은 모든 문양에서 동일하기 때문에 별도로 표시하지 않고, 따라서 별도의 기호를 필요로 하지 않는다.

#### 나. 타입을 나타내는 기호

벽지의 타입을 나타내는 기호는 학자에 따라 다양하게 제시된 바 있고, 각각의 기호는 나름대로의 장점이 있다. 이 글에서 사용하는 기호는 군론이나 결정학 등에서 보편적으로 사용되는 기호이다.

· 타입을 나타내는 기호는 4자리 숫자 또는 문자의

조합으로 □ □ □ □ 와 같은 형태이다. 왼쪽에서 첫 번째 자리는 ‘c’ 또는 ‘p’로서 기본문양의 형태를 나타낸다. 기본조각이 마름모꼴인 경우에는 ‘c’를, 그 외에는 ‘p’를 사용한다. 열일곱 개의 타입 중에서 ‘c’인 경우는 두 개이다. ‘c’는 ‘centered’를, ‘p’는 ‘primitive’를 뜻한다.

· 두 번째 자리는 1, 2, 3, 4, 6 중 한 숫자로서 회전 대칭의 최소 회전 각도를 알게 한다. 예를 들어, ‘2’이면  $\frac{360}{2}$ , 즉  $180^\circ$  회전 대칭이 있으나  $180^\circ$  보다 작은 각도의 회전대칭은 없다는 뜻이다. 마찬가지로, ‘4’이면  $\frac{360}{4}$ , 즉  $90^\circ$  회전 대칭이 있으나  $90^\circ$  보다 작은 각도의 회전대칭은 없다. 벽지 문양의 회전은  $360^\circ$  ( $0^\circ$ ),  $180^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  회전 밖에 없다는 것을 쉽게 증명할 수 있다.

· 세 번째 자리는 ‘m’, ‘g’, 또는 ‘1’ 중 하나이다. ‘m’은  $y$ -축과 평행인 반사축이 존재하는 경우이고, ‘g’는  $y$ -축과 평행인 반사축은 존재하지 않으나  $y$ -축과 평행인 미끄럼반사축이 존재하는 경우이고, ‘1’은  $y$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 반사나 미끄럼반사가 존재하지 않는 경우이다.

· 네 번째 자리도 ‘m’, ‘g’, 또는 ‘1’ 중 하나이다. ‘m’은  $x$ -축과  $\alpha^\circ$  를 이루는 직선을 축으로 하는 반사가 존재하는 경우이고, ‘g’는  $x$ -축과  $\alpha^\circ$  를 이루는 직선을 축으로 하는 반사는 존재하지 않으나 미끄럼반사가 존재하는 경우이고, ‘1’은  $x$ -축과  $\alpha^\circ$  를 이루는 직선을 축으로 하는 반사나 미끄럼반사가 존재하지 않는 경우이다. 여기서  $\alpha$ 는 타입을 나타내는 기호의 두 번째 자리에 있는 수  $n(=1,2,3,4,6)$ , 즉 최소 회전 각도에 따라 다음과 같이 정해진다.

$n=1, 2$ 인 경우:  $\alpha=180$

$n=3, 6$ 인 경우:  $\alpha=60$

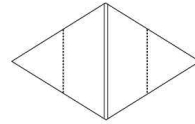
$n=4$ 인 경우:  $\alpha=45$

여기서  $n=1, 2$ 인 경우, 즉  $\alpha=180$ 인 경우에는 ‘ $x$ -축과  $\alpha^\circ$  를 이루는 직선’은 ‘ $x$ -축과  $180^\circ$  를 이루는 직선’이며 이는 곧 ‘ $x$ -축과 평행인 직선’이다.

· 세 번째 자리와 네 번째 자리의 기호에 주의할 필요가 있다. 그 이유는 세 번째 자리와 네 번째 자리의 기호가 전체하는 ‘ $x$ -축’과 ‘ $y$ -축’은 기본조각의 격자 벡터에 따라 결정된 것이 아니고, 원래 주어진 표준좌표계,

즉 직각좌표계의  $x$ -축과  $y$ -축을 뜻하기 때문이다. 다음 두 가지 예를 들어보자.

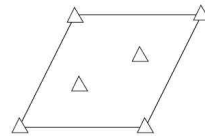
벽지 타입 c1m1의 기본조각과 대칭성과 함께 나타내면 다음과 같다.



[그림 2] c1m1-타입의 기본조각과 대칭성  
[Fig. 2] Fundamental domain and symmetries of c1m1-type

여기서 반사(——)는 ‘c1m1’에 있는 ‘m’으로 표현된 것으로서, 반사축은 격자 벡터가 아닌  $y$ -축에 평행이다.

한편, 벽지 타입 p311의 기본조각을 대칭성과 함께 나타내면 다음과 같다.



[그림 3] p311-타입의 기본조각과 대칭성  
[Fig. 3] Fundamental domain and symmetries of p311-type

여기서 세 번째 ‘1’은  $y$ -축(격자 벡터가 아닌)과 평행인 반사축이나 미끄럼반사가 없다는 뜻이고, 네 번째 ‘1’은  $x$ -축과  $60^\circ$  를 이루는 직선을 축으로 하는 반사나 미끄럼반사가 없다는 것을 뜻한다.

· 타입의 기호를 간략히 나타내는 경우가 있다. 예를 들어, p111은 간략히 p1으로 나타내기도 한다. 이는 평행이동 외의 아무런 대칭이 없다는 뜻으로서, 세 번째 자리와 네 번째 자리를 나타내지 않는 것이다.

또, p1m1은 간략히 pm으로 나타낸다. 이 경우에는  $y$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 반사가 존재하지만  $x$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 반사나 미끄럼반사가 존재하지 않음을 나타낸다. 이런 경우에는 회전대칭이 존재할 수 없는데, 두 번째 자리를 표기하지 않는 것은 회전대칭이 없음을 뜻하는 것이다. 즉, ‘p1m1’의 대칭성은 ‘pm’으로 완전히 결정된다.

한편,  $p2mm$ 은  $pmm$ 으로 나타낼 수 있다.  $y$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 반사가 존재하고,  $x$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 반사가 존재하면  $180^\circ$ 회전은 반드시 존재하여야 한다. 따라서 둘째 자리에 '2'를 표시할 필요가 없다. 이 경우에, 두 번째 자리를 표기하지 않는 것은 회전대칭이 없기 때문이 아니고 당연히 존재하기 때문에 표기하지 않은 것이다. 즉, ' $p2mm$ '의 대칭성은 ' $pmm$ '으로 완전히 결정된다.

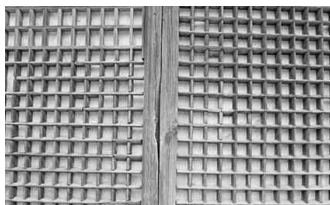
$p2mg$ 의 경우도  $p2mm$ 의 경우와 마찬가지로이다.  $p2mg$ 가  $pmg$ 로 간단히 표기될 수 있는 이유는  $y$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 반사가 있고  $x$ -축과 평행인 직선을 축으로 하는 미끄럼반사가 존재하면,  $180^\circ$ 회전은 존재할 수밖에 없기 때문이다. 즉, ' $p2mg$ '의 대칭성은 ' $pmg$ '으로 완전히 결정된다.

간단한 형태로 표기되는 나머지 경우도 위와 같은 이유에서이다. 이러한 모든 성질은 간단한 군론을 적용함으로써 확인할 수 있다. 이 글에서는 대칭성을 명시적으로 나타내기 위해 약식기호를 사용하지 않는다.

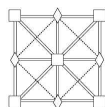
2. 벽지 타입

가. 타입의 종류

[표 2]는 열일곱 개 벽지 타입의 기본조각으로서 각 타입의 기호와 대칭성을 나타낸 것이다. 예를 들어, 흔히 볼 수 있는 다음의 창살 문양에서는 기본조각이 정사각형 하나이다.



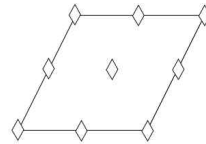
[그림 4] 격자문  
[Fig. 4] Latticed door



이 문양은  $p4mm$  타입이며 대칭성은 와 같다.

나. 타입의 시각적 표현

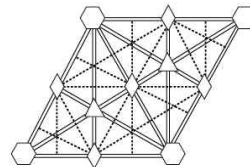
아래 그림은  $p211$  타입의 기본조각을 대칭성과 함께 나타낸 것이다.



[그림 5]  $p211$ -타입의 기본조각과 대칭성  
[Fig. 5] Fundamental domain and symmetries of  $p211$ -type

이 타입의 벽지 문양에는 원점  $(0,0)$ 에서  $180^\circ$ 회전대칭이 존재한다. 간단한 행렬 계산을 하면 위 그림([그림 5])에 표시된 아홉 개의 점 모두가  $180^\circ$ 회전의 축이 된다는 것을 보일 수 있다.

한편, 다음 그림([그림 6])이 나타내는 타입의 벽지 문양에는 원점  $(0,0)$ 에서  $60^\circ$ 회전대칭과  $y$ -축과 평행인 반사가 존재한다. 군론과 행렬 계산을 통하여 그림에 표시된 회전, 반사, 그리고 미끄럼반사가 존재한다는 것을 보일 수 있다.



[그림 6]  $p6mm$ -타입의 기본조각과 대칭성  
[Fig. 6] Fundamental domain and symmetries of  $p6mm$ -type

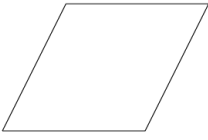
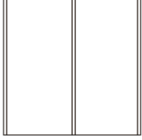
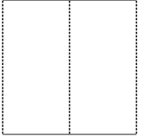
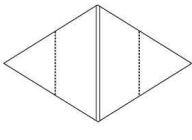
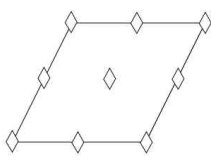
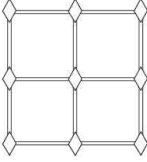
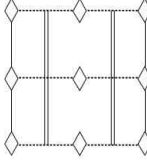
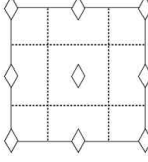
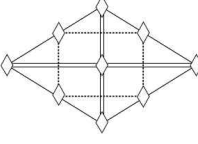
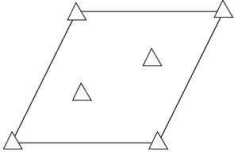
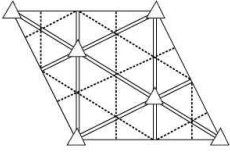
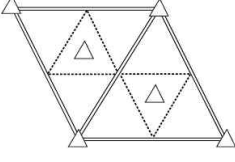
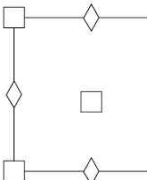
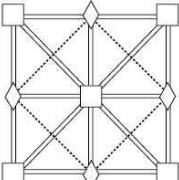
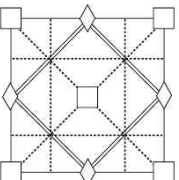
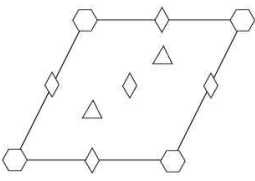
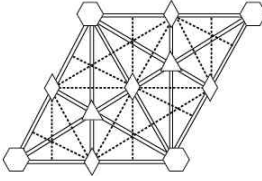
마찬가지 방법으로, 다른 타입의 경우에도 표([표 2])가 제시하는 모든 대칭성을 확인할 수 있다.

다. 타입의 결정 과정

주어진 벽지 문양을 다음과 같은 과정으로 타입을 결정하면 된다.

- 회전 종류를 조사한다. 즉, 타입을 나타내는 기호에서 두 번째 자리에 있는 수  $n(=1,2,3,4,6)$ 를 정한다.  $n$ 이 결정되면 표([표 2])에 의하여 가능한 타입의 수는 2, 3, 4, 또는 5 개로 제한된다.
- 반사 또는 미끄럼반사를 조사한다.

[표 2] 17개 벽지 타입  
 [Table 2] 17 types of wallpaper

회전	타입			
360° (0°)				
	p111 (p1)	p1m1 (pm)	p1g1 (pg)	c1m1 (cm)
180°				
	p211 (p2)	p2mm (pmm)	p2mg (pmg)	
180°				
	p2gg (pgg)	c2mm (cmm)		
120°				
	p311 (p3)	p3m1	p31m	
90°				
	p411 (p4)	p4mm (p4m)	p4gm (p4g)	
60°				
	p611 (p6)	p6mm (p6m)		

· 표([표 2])를 참고하여 타입을 정하고 기본조각을 결정한다.

위 절차에 의하면, 타입을 나타내는 첫 번째 기호(p 또는 c)는 마지막 단계에서 자동적으로 결정된다는 것을 알 수 있다.

3. 각 타입에 해당하는 전통 문양

가. 선행 연구에서 찾은 타입

이상락(2010)은 다음 아홉 개 타입의 문양을 찾고 그 출처를 밝혔다: p111, p211, c1m1, p3, p411, p4mm, p4gm, p611, p6mm.

나. 이 연구에 찾은 타입

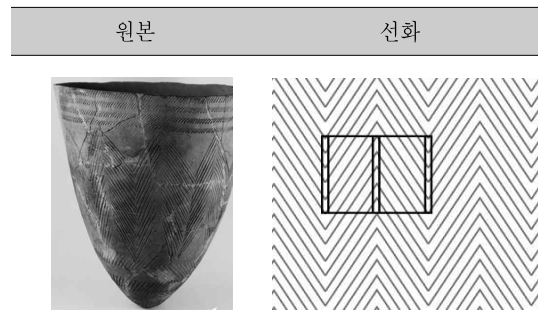
이 연구에서 찾아야 할 문양은 다음과 같다: p1m1, p1g1, p2mm, p2mg, c2mm, p2gg, p3m1, p31m.

이 글에서는 위 모든 경우의 전통 문양을 찾고 그 문양을 소장하고 있는 곳을 명시한다. 원래의 문양은 여러 색으로 채색되어 있지만, 각각을 흑백으로 변환시킨 후 각 문양의 선화를 그리고 그 위에 해당 문양의 기본조각과 반사 및 미끄럼반사의 대칭성을 표기한다.

· p1m1

빗살무늬토기(서울아사동출토, 경희대박물관, 서울)

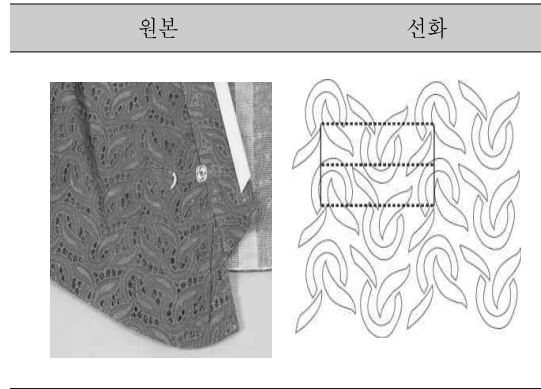
[표 3] p1m1  
[Table 3] P1m1



· p1g1

면 저고리(숙명여대박물관, 서울)

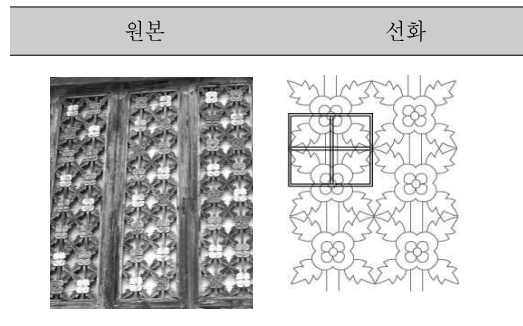
[표 4] p1g1  
[Table 4] p1g1



· p2mm

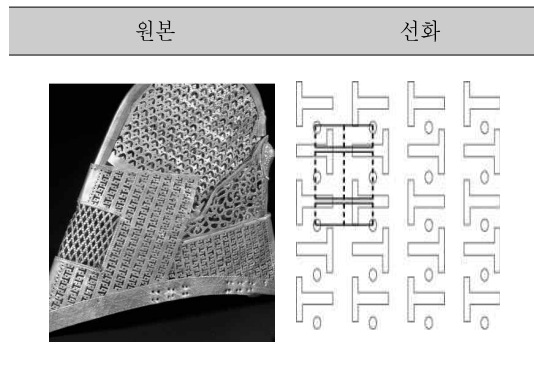
문살(대승사 대웅전, 경북 문경)

[표 5] p2mm  
[Table 4] p2mm



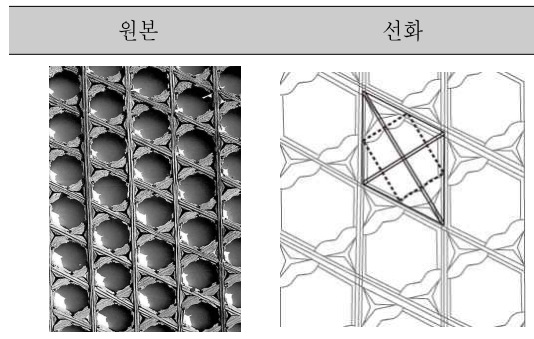
· p2mg  
 금제관모(국보 제198호, 천마총출토, 국립경주박물관, 경주)

[표 6] p2mg  
 [Table 6] p2mg



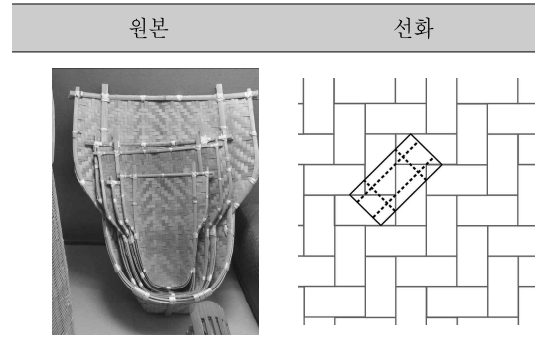
· c2mm  
 문살(마곡사 대광보전, 충청남도 공주시)

[표 7] c2mm  
 [Table 7] c2mm



· p2gg  
 한국대나무박물관(전남 담양)

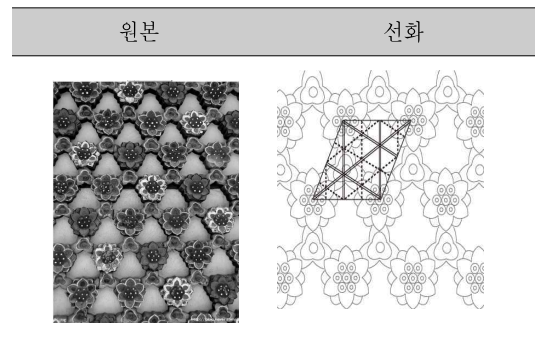
[표 8] p2gg  
 [Table 8] p2gg



위 죽세공품은 근래에 제작된 것이지만, 이 세공품이 띄고 있는 문양을 얻게 하는 ‘두 번 띄워 엮기’ 기법은 오래전부터 전래된 것으로 볼 수 있다. 즉, 위의 죽세공품은 조선시대 또는 그 이전의 유물은 아니지만 그 세공품의 문양은 ‘한국의 전통문양’이라고 여겨도 무난하다.

· p3m1  
 문살(수덕사 환희대 원통보전, 충청남도 예산군)

[표 9] p3m1  
 [Table 9] p3m1


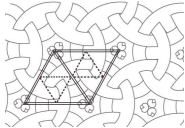


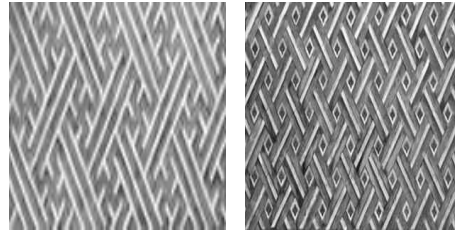


· p31m  
 내소사 지장전(전라북도 부안군)

[표 10] p31m

[Table 10] p31m

원본	선화
	

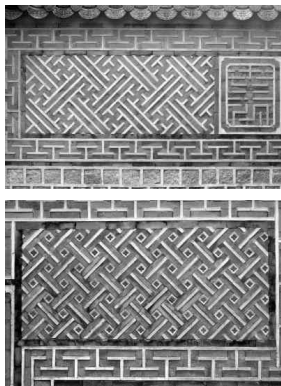


[그림 8] p2gg-타입의 문양

[Fig. 8] Pattern of p2gg-type

다. p4gm과 p2gg

다음은 경복궁 자경전 담장 문양이다.



[그림 7] 담장 문양

[Fig. 7] Pattern on wall

위 두 개의 담장에서 가운데 부분 문양 모두는 p4gm-타입이다. 이 각각의 문양에서 반사 대칭을 모두 깨기(break) 위해 문양을 [그림 8]과 같이 왜곡시키면 p2gg-타입이 된다.

일반적으로, p4gm-타입의 문양에서 반사대칭을 깨면 90° 회전 대칭도 깨지고, 그 결과로 얻어지는 문양은 p2gg-타입이 된다.

#### 4. 학습방안

여기에서는 앞의 자료에 기반을 둘 수 있는 수학학습 방안이나 예를 제시한다.

##### 가. 체험학습 방안

먼저, 학교에서는 현장 체험학습의 일환으로서 고궁이나 사찰 또는 유적지를 답사하는 방안을 생각할 수 있다. 인솔 교사는 답사 이전에 현장에서 찾아질 것으로 예상되는 간단한 문양 몇 개의 타입과 타입 결정 절차를 학생들에게 가르친다.

현장에서는 교사가 해당 문양을 지목하고 그 문양의 타입을 찾도록 한다. 초등학교 경우에는 벽지보다는 띠 문양을 활용하면 무난할 것이다. 이때에는 신현용·신실라(2014)를 참고할 수 있다.

또 다른 방안으로서 떠나 벽지문양의 타입을 이용하여 손수건 만들기와 같은 작품 만들기도 있다. 예를 들면, 띠 문양의 타입을 알고 기본 조각을 하나 만들어 7가지 타입 중 몇 개를 찍어서 손수건을 만드는 체험학습이 가능하다. 이 때, 기본 조각에서 비대칭 기본조각과 대칭인 기본 조각에 따라 패턴이 다르게 분류된다는 사실도 알게 되고, 자신만의 손수건 속에 수학적 이론이 있다는 것도 느끼게 될 것이다.

##### 나. 스마트환경 또는 테크놀로지 활용

인터넷을 통하여 한국의 전통 문양을 많이 접근할 수 있다. 박물관이나 미술관 등에 접속하여 ‘한국의 전통 문양’을 검색어로 입력하면 된다. 학생 각자에게 약 10개 정도의 벽지 문양을 찾고 각 문양의 타입을 결정하여 발표하도록 하는 방안을 생각할 수 있다.

한편, 문양의 생성을 효과적으로 가능하게 하는 무료

프로그램이 여럿 제공되고 있다. 이러한 프로그램을 활용하여 기본 모티프(motif)를 주고 다양한 대칭 변환을 적용하여 원하는 타입의 기본조작과 띠 또는 벽지 문양을 생성할 수 있다.

또, 컴퓨터 언어를 사용하여 프로그램을 완성할 수 있는 학생에게는 주어진 모티프로부터 원하는 타입의 띠나 문양을 생성할 수 있는 프로그램의 코딩을 제안할 수도 있을 것이다.

#### 다. 스토리텔링 구성

문양에는 수학과 예술 외에도 역사나 철학 또는 종교 등 다양한 요소가 연계되어 있다. 문양의 이러한 특징은 여러 분야를 아우르는 흥미 있는 수학적 스토리텔링을 가능하게 한다.

다음은 필자가 구상한 가상대화이다. 학생들의 수준이나 학습 여건 등을 적절히 고려하여 다른 스토리텔링이나 가상대화가 가능할 것이다.

장소: 다양한 문양을 관찰할 수 있는 고궁이나 사찰  
등장인물: 교사와 문영(고등학교 학생)

교사: (화려한 단청 문양을 가리키며) 문영아, 문양들이 매우 화려하고 아름답구나. 저런 문양들을 그리거나 감상하는 데에 수학이 쓸모 있을까?

문영: 글썽요. 직선이나 원을 그릴 때, 거리 개념이나 어떤 수학적 규칙들이 사용될 테니까 수학이 전혀 필요 없다고는 못하겠지요? 그러나 함수나 방정식 등과 같은 수학은 필요할 것 같지 않은데요. 수학보다는 오히려 미술이 필요할 것 같아요. 색의 선택이나 배치 등은 미술적 내용이잖아요. 모르긴 해도, 저 예쁜 문양을 그린 장인은 대단한 수학자는 아니었을 것 같아요.

교사: 나도 문영이 생각에 공감한다. 그렇지만 저렇게 섬세하게 그려진 문양에 단지 직선과 원 정도의 수학적 사용될 것으로 보기도 어렵지 않을까?

문영: 그럴 것 같기도 하지만 저는 잘 모르겠어요.

교사: 사실은 말이야, 문양에는 우리가 고등학교에서조차 배우지 않는 깊은 수학이 스며있단다.

문영: 그럼 그 문양을 그린 장인이 그 고급수학을 알고

계셨단 말인가요?

교사: 그렇지는 않았을 가능성이 크지. 왜냐면 깊은 수학을 인식하지 못하더라도 수학적 원리를 활용하는 것이 가능하기 때문이지.

문영: 잘 이해가 안 가요. 예를 들어주실 수 있으세요?

교사: 문영이는 라이프니츠라는 수학자를 아니?

문영: 뉴턴과 함께 미적분학을 정립한 수학자라고 들었어요.

교사: 그 분이 하신 말씀 중에 ‘음악을 한다는 것은 수학을 하는 행위이지만 다만 그 사실을 모를 뿐’이라는 유명한 말을 했어. 음악 속에는 수학이 진하게 스미어 있다는 말이지.

문영: 왜 갑자기 음악을 말씀하세요. 우리는 지금 문양, 즉 미술이야기 하고 있잖아요?

교사: 음악과 수학의 관계가 디자인과 수학의 관계와 같기 때문이란다.

문영: 미술에도 그런 유명한 말이 있나요?

교사: 물론이지. 실제 사건도 있었던단다.

문영: 참말 이예요? 무엇인가요?

교사: 2014년 8월 한국에서 세계수학자대회 열린 것 기억하니?

문영: 예, 신문에서 보았어요.

교사: 2014년의 60년 전은 몇 년이지?

문영: 2014 빼기 60 이니까 1954년이네요. 그런데 왜죠?

교사: 1954년이 우리에게겐 특별한 해이거든.

문영: 왜요?

교사: 1954년에도 세계수학자대회가 열렸는데 네덜란드 수도 암스테르담에서였다. 그 대회장에는 이상한 전시회가 열렸단다.

문영: 무슨 전시회인데요. 수학과 관련된 전시회였겠죠.

교사: 사실은 그랬단다. 그러나 그 전시회가 수학과 깊은 관계에 있다는 것은 몇몇 수학자들만 알아 차렸지.

문영: 무슨 전시회였어요.

교사: 네덜란드 판화가 에셔의 작품 전시회였단다.

문영: 판화 전시회요? 미술 전시회였네요.

교사: 그렇지. 세계 최고의 수학자가 모인 학술대회에 미술 전시회가 열린 거란다.

문영: 수학자들이 미술 작품을 좋아하나보죠?

교사: 그런 수학자도 많지만, 에셔가 그린 판화에는 깊은

수학이 있기 때문이었다.

문영: 에서가 그 사실을 알았나요?

교사: 에서는 전혀 몰랐단다. 그런데 에서의 그림을 본 수학자가 그걸 알아차리고 에서에게 전시회를 권했다.

문영: 에서는 자기가 수학을 한다는 사실을 모르고 수학을 한 거네요.

교사: 정확히 옳은 말이다.

문영: 에서는 수학적 사실을 그림으로 나타낸 거네요. 다만, 그 사실을 몰랐을 뿐이군요.

교사: 그 전시회는 대성공이었다. 당시 최고의 수학자들이 그 전시회를 통하여 수학과 디자인의 깊은 관계를 감상하고 감동하였지.

문영: 그런데 에서가 누구예요? 유명한 미술가인가요?

교사: 유명하겠지. 근데 수학계에서 더 유명한 미술가가 아닌지 모르겠구나?

문영: 아, 어렴풋이 기억나네요. 옛날 수학 선생님께서 테셀레이션 할 때 기묘한 그림을 보여주셨는데 그 작가가 에서였던 것 같아요.

교사: 그럴 거야. 에서의 그림은 초등학교에서도 그려지곤 하거든. 에서는 그 전시회를 계기로 수학에 관심을 가지게 되었고 그의 작품 세계는 더 확장되었단다.

문영: 수학을 알면 미술이 달라져요?

교사: 그림. 레오나르도 다빈치는 미술책을 저술했는데 ‘수학을 모르면 내 책을 읽지 마라’라고 말하곤 하였단다. 디자인의 경우는 더욱 그렇지. 수학을 많이 알면 더 아름다운 문양을 그릴 수 있게 된단다.

문영: 흥미롭네요. 나중에 인터넷에서 에서의 문양을 찾아보아야겠어요.

교사: 좋은 생각이다. 다음 검색어를 사용하면 좋을 거야. ‘tessellation,’ ‘Water Fall,’ ‘Ascending and Descending,’ ‘Circle Limits.’

문영: 꼭 조사해 보고 싶습니다.

교사: 인터넷 검색하는 기회에 ‘에서, 테셀레이션’을 입력해 봐. 에서의 예쁜 벽지 문양이 여럿 검색될 거야. 검색된 문양은 어떤 타입인지 조사하는 것은 재미있을 거야. 혹시 아니? 에서가 17개 타입 전부의 벽지 문양을 그렸는지?

문영: ‘17개 타입 전부’라니요?

교사: 아차, 그 이야기를 하지 않았구나. 수학은 문양을 띠와 벽지로 나누어 생각한단다. 띠는 일정한 조각이 좌우로 계속 반복되는 것이고, 벽지는 일정한 조각이 좌우 그리고 상하로 계속 반복되는 문양이지.

문영: 띠는 일차원적 문양이고 벽지는 이차원적 문양으로 이해하면 되나요?

교사: 야, 대단한데! 가장 멋진 수학적 설명이다.

문영: 칭찬해 주셔서 감사합니다. 그런데 기본조각을 워낙 다양하게 그릴 수 있으므로 띠나 벽지는 그 종류가 무수히 많겠는데요?

교사: 그 질문에 깜짝 놀랄 대답을 할까?

문영: 놀랄만한 사실이 있나요?

교사: 수학은 참으로 대단하단다. 띠는 일곱 가지 타입 밖에 없고, 벽지는 열일곱 개 타입 밖에 없다는 것을 수학이 증명하거든.

문영: 정말이예요?

교사: 내가 ‘깜짝 놀랄 대답’이라고 했잖아.

문영: 그렇게 많고 화려한 문양이 그 정도 밖에 없다는 것이 믿어지지 않아요.

교사: 폴리아라는 유명한 수학자가 그 사실을 증명했다. 폴리아라는 수학자는 ‘How to solve it?’ 즉, ‘어떻게 풀 것인가?’라는 유명한 책을 쓰셔서 수학교육자로도 유명한 분이시지.

문영: 수학을 잘 하시면서 문양에도 많은 관심을 가지셨고, 수학도 잘 가르치셨군요.

교사: 폴리아 선생님의 문양에 본격적인 관심은 1954년 세계수학자대회에서 에서의 작품을 접한 것이 계기가 되었다고 볼 수 있단다.

문영: 수학자도 수학 외의 다양한 분야에 관심을 가지면 좋을 것 같군요.

교사: 그렇단다. 아차, 한 가지 기억할 게 있어. 수학은 문양의 색은 고려하지 않는다. 수학은 오직 타입, 즉 패턴만 살핀다. 색은 수학자의 몫이 아니고 미술가의 몫이지.

문영: 수학자가 양보한 것인가요?

교사: 솔직히 말해서, 양보했다 라기 보다는 색까지 고려하는 것은 수학의 범위를 넘기 때문이라고 봐야지. 수학이 음악이론의 일부를 설명하지만 음악은 수학이 아니듯이, 미술도 마찬가지로.

문영: 수학과 예술의 멋진 조화네요.  
 교사: 문영아, 네가 갑자기 중요한 질문을 해서 이야기가 조금 빛나갔지만, 조금 전에 내가 제시한 숙제를 시도해 봐. 예시의 문양을 몇 개 검색하여 타입을 결정해보라는 것 말이야.  
 문영: 알겠습니다. 재미있을 것 같아요. 시간은 많이 걸리겠지만요.  
 교사: 검색된 예시 문양의 타입이 결정되거나 나에게도 알려 줘. 나도 관심이 많거든.  
 문영: 그렇게 하겠습니다.  
 교사: 자, 이제 자리를 옮기자. 한 자리에 너무 오래 있었구나.  
 문영: 예. 그런데 여기에 문양이 많이 있으니까 이 중에서 제일 쉬운 걸로 하나만 찾아봐요.  
 교사: 문영이가 나보다 더 적극적이구나. 고마워.  
 (p4mm 문양의 창살문양을 가르치며) 자, 저 창살 문양을 봐라. 17개 타입의 벽지문양 중에서 가장 쉽게 관찰되는 거란다. 평행이동은 물론이거니와 좌우반사, 상하반사, 180° 회전 등 많은 대칭이 보이지?  
 문영: 색을 무시한다면 저도 저런 문양은 많이 본 것 같아요.  
 교사: 그럴 거야. 대칭성이 큰 문양일수록 더 예쁘게 보이므로 저런 문양이 많아. 앞으로든 어떤 문양을 보면 타입을 살펴봐. 재미있을 거야. 또, 우리나라의 전통문양 또는 이슬람의 전통문양을 인터넷으로 검색하고 검색된 문양의 타입을 결정하는 것도 좋을 거야. 혹시 흥미로운 문양이 검색되고 그 문양의 타입이 결정되거나 그 사실도 나에게 알려 줘.  
 문영: 그렇게 하겠습니다.

## V. 결론 및 제언

이슬람 문화권에서는 열일곱 개 벽지 문양이 어렵지 않게 발견된다. 이론(異論)이 있기는 하지만(Stewart, 2013), 스페인 그라나다에 있는 알함브라 궁전에서는 열일곱 개의 문양 전부가 발견된다고 한다(Du Sautoy, 2008). 단일 유적에서의 이러한 사례는 다른 문화권에서는 어렵다. 이슬람 문화권에서는 종교적인 이유로 인하여 사람과 동물의 모습을 문양으로 사용할 수 없기 때문

인 것으로 생각된다.

일반적으로 p2gg-타입의 문양에는 반사는 없으며 두 방향(상·하와 좌·우)에서 미끄럼반사가 존재해야 하는 독특한 모습으로 인하여 쉽게 만날 수 있는 문양이 아니다. 그러나 우리나라에서는 p2gg-타입의 문양이 죽세공품을 통하여 직접 그리고 다양하게 만들어진다는 것은 주목할 만한 일이다. 사실, 본 연구에서는 ‘두 번 띄워 엮기’ 기법에 의한 문양만을 소개하지만 한국대나무박물관에는 ‘세 번 띄워 엮기’ 기법을 구사한 여러 가지 죽세공품을 만날 수 있다. ‘세 번 띄워 엮기’ 기법이 적용된 문양도 p2gg-타입인 것을 쉽게 알 수 있다.

수학적으로, 띠 문양은 7개 밖에 없고 벽지 문양은 17개밖에 없다는 사실은 학생들로 하여금 수학의 힘 또는 유용성을 실감하게 할 것이다. 한편, 고궁이나 유적지 여행에서 문양을 분류해 보는 것은 여행의 의미를 더 하게 할 것이며, 벽지 문양으로서 가능한 모든 타입이 우리나라 전통문양에 존재한다는 것을 확인하게 함으로써 우리나라 문양의 다양성을 실감하게 할 것이다.

## 참 고 문 헌

- 신현용, 신실라 (2014). 문양에 관한 수학적 접근: 군론에 의한 한국 전통문양의 분류, *Archives of Design Research* 27(3), 295-311.
- Shin, H., Sheen, S. (2014). A mathematical approach to pattern: classification of Korean traditional frieze patterns according to group theory, *Archives of Design Research* 27(3), 295-311.
- 신현용, 유익승, 문태선, 신기철, 신실라 (2014). *수학 IN 디자인*, 서울: 교우사(출간 예정).
- Shin, H., Lew, I., Moon, T., Shin, K., Sheen, S. (2014). *Mathematics IN Design*, Seoul: Kyowoo(To be published).
- 이상락 (2010). 윌페이퍼 그룹에 의한 한국 전통 문양의 분류, *한국정보기술학회논문지* 8(4), 189-196.
- Lee, S. R. (2010). Classification of Korean Traditional Patterns by Wallpaper Groups, *Journal of Korea Society of Information Technology* 8(4), 189-196.
- Du Sautoy, M. (2008). *Symmetry*, New York: Harper.
- Stewart, I. (2013). *Symmetry*, Oxford: Oxford University Press.

## A study on development of teaching/learning materials based on wallpaper patterns

**Hyunyoung Shin**

Department of Mathematics Education, Korea National University of Education

E-mail : shin@knue.ac.kr

**Silla Sheen<sup>†</sup>**

Graduate School, Korea National University of Education

E-mail : twosp@hanmail.net

**Taesun Mun**

Seoul Metropolitan Office of Education

E-mail : mathti@hanmail.net

**Haeyoon Kwon, Yoonwoo Lee**

Graduate School, Korea National University of Education

E-mail : jihoosung2@gmail.com, rkdbdsn@hanmail.net

Recently, the interdisciplinary integration and story-telling are often mentioned in mathematics education. It is probably because they might be helpful to students for positive attitude for mathematics. In this research, through brief discussion mathematics related with wallpaper patterns, we try to integrate mathematics and design, and eventually develop the teaching/learning materials for experience activities and story-telling.

---

\* ZDM Classification : D44, N84, N85, U54

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B40, 97C20,  
97C80, 97U50, 97U70

\* Key words : wallpaper, type, interdisciplinary integration,  
story-telling

† Corresponding author