韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.3.383
2014. 08. 제 53권, 제 3호, 383-397.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2014, Vol. 53, No. 3, 383-397.

기하 증명 구성에 나타나는 학생들의 사고과정 탐색

안선영
김구연(서강대학교)†

Ⅰ. 서론

수학 교육의 목적은 학생들의 수학적 사고능력을 개발하는데 있다. 수학적 사고의 근원이 되는 것이 바로 추론과 증명이다. 수학적 추론과 증명은 여러 다양한 현상에 대한 학생들의 수학적인 안목과 수학적 사고력을 발전시키는데 결정적인 역할을 한다. 따라서 중등학교 학생들은 주장을 정당화하고, 추측을 증명하는 것과, 증명에서 기호를 사용하는 능력을 개발해야 한다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). 이처럼 추론과 증명활동은 학생들의 수학적 사고력을 향상시키는데 매우 결정적인 역할을 하므로 증명은 모든 학년의 수학 수업에서 중심이 되어야 한다(Sowder & Haral, 2003). 증명은 학생들이 문제 상황에서 주어진 문제를 해결하기 위해 필요한 결론을 이끌어내고 추론할 수 있는 능력을 발달시켜 줄 수 있고, 특히 수학적 문제 해결능력의 가치 있는 도구이다(Herbst, 2006).

중등학교 수학의 영역 중에서 증명이 가장 많이 요구되는 영역은 기하 영역이며, 따라서 기하 영역은 학생들에게 증명 훈련을 시키는데 가장 적합한 분야라고 할 수 있다. 기하학은 과학 분야에서 중심적인 역할을 하고, 예술과 같은 영역이나 일상생활에서도 다양하게 사용될 뿐만 아니라 중등 교육과정에서도 핵심적인 역할을 한다(Mammana & Villiani, 1998). 기하학에서 증명은 가장 중요한 도구이다(Usiskin, 1982). 이와 같이 기하 영역에서의 증명은 학생들의 수학적으로 사고하는 능력을 개발하는 좋은 도구가 된다.

중학교 기하는 공간 감각과 직관적 사고력을 위주로 하는 비형식 기하(또는 직관기하)에서 완벽한 논리적 개념 체계인 형식 기하로 발전해 나아가는 단계이다. 그러므로 중학교에서 다루는 기하는 초등학교 기하의 연속선상에서 공간 감각과 귀납적 추론 능력을 기르고, 이를 바탕으로 기하학적 대상을 형식적으로 탐구함으로써 연역적 추론 능력과 추상화 능력을 기르는데 중점을 두어야 한다. 아울러 귀납적 추론과 연역적 추론에서 수학적으로 추측하고 정당화하는 활동을 경험함으로써 다양한 현상을 합리적으로 예측하고 판단하는 능력을 기를 수 있도록 해야 한다(NCTM, 2000). 이처럼 중등학교 수학의 기하 증명 영역은 학생들의 수학적 사고능력을 개발하는데 중요하기 때문에 교사들은 학생들에게 기하 증명을 이해시키기 위해 많은 시간을 할애한다.

그러나 이러한 교사들의 노력에도 불구하고 대부분의 학생들은 수학 학습에 있어 유독 증명학습을 많이 어려워하고 기피하는 현상을 보인다(Healy& Hoyles, 2000). 많은 선행 연구들은 모든 레벨의 학생들이 수학적 증명을 하는데 있어서 종종 심각한 어려움에 직면한다는 것을 보여 주었다(Chazan, 1993; Harel & Sowder, 1989; Healy & Hoyles, 2000). Schoenfeld(1988)는 증명을 이미 배운 학생들조차 여전히 문제 해결에서 추론에 실패하는 것을 보여주었다. 이러한 선행연구들은 학생들이 결국엔 형식적 증명을 성공적으로 학습하지 못함을 보여준다.

결과적으로 학생들에게 증명을 가르치는 것은 중등기하학의 가장 중요한 목표임에도 불구하고 사실상 학생들에게 기하학에서 증명은 그다지 중요하지 않으며 가장 어렵고, 하기 싫은 부문으로 자리 잡게 되었다. 특히, 학생들은 교과서에 제시된 정리의 증명을 제대로 이해하지

* 접수일(2014년 04월 11일), 수정일(2014년 04월 30일), 게재확정일(2014년 08월 12일)
* ZDM분류 : G13
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 학생의 사고과정, 증명 구성, 중학생, 기하
* 이 연구는 2011년도 서강대학교 교내연구비 지원에 의한 연구임(20110065).
† 교신저자

못할 뿐만 아니라, 간단한 기하학의 명제를 증명하는 것 조차 어려움을 겪는다(Weber, 2001). Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos and Choustoulakis(2007)의 연구에서는 이미 증명을 학습한 고등학교 1학년 학생들이 증명 문제를 접했을 때 증명을 배웠음에도 불구하고 추상적, 연역적으로 수학적 주장을 증명을 하기 보다는 구체적인 상황을 바탕으로 세어보거나 계산하거나 하는 식으로 수학적 주장을 정당화 하는 모습을 보여주었다.

이처럼 기하 영역에서의 증명은 학생들에게 매우 중요함에도 불구하고 많은 학생들이 형식적 기하 증명에 어려움을 겪고 있으며, 교사들도 이러한 학생 지도에 많은 노력을 기울이고 있지만 결과는 여전히 성공적이지 못함을 보여준다. 기하 증명을 하는 과정에 있어서 학생들의 사고과정을 분석하고 확인하는 것은 증명을 학습하는 학생들을 돕는데 중요한 수단이 될 것이다.

우리나라 수학 교육 과정에서는 중학교 2학년 때 처음으로 형식적 증명이 기하 단원에서 도입된다. 그러나 그 이후 학생들이 지속적으로 증명을 다룰 수 있는 단원이 제시되지 않기 때문에 증명의 중요성에도 불구하고 우리나라 학생들은 중학교 2, 3학년 이후로는 증명을 접할 기회가 거의 없다. 많은 학생들이 증명을 학습하는 과정에서도 많은 어려움을 겪지만 증명을 이미 학습한 뒤에도 지속적인 어려움을 겪고 증명에 대한 중요성을 인식하지 못하고 있다(Schoenfeld, 1988; Dimakos et al, 2007).

학생들이 증명하는 과정에서 보이는 특징이나, 학생들의 사고과정의 패턴을 파악하고 학생들이 어떠한 상황에서 어려움을 겪는 것인지 분석하는 것은 매우 의미 있는 작업이다. 이 연구는 이미 기하 증명을 학습한 학생들이 이후에 기하 증명을 구성하는데 있어서 지속적으로 겪는 어려움은 무엇이며 기하 증명 과정에서 학생들이 보이는 사고과정의 패턴, 그러한 과정에서 두드러지는 특징을 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

Usiskin(1982)은 Van Hiele Level에 따라 학생들의 기하 학습 수준을 분류하였다. 이 연구는 시카고 대학에서 대형 프로젝트로(Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project, 이하 CDASSG) 미국의 13개 중등학교에서 기하 수업을 받은 2699명을 대상으로 하여 학기 초반에 학생들의 Van Hiele Level을 측정하고 일 년 후 다시 조사하여 학생들이 어느 정도 성취를 이루었는가를 비교 분석하였다. 구체적으로, 고등학교 학생들의 Van Hiele Level은 어떠한지, 기하 수업 전에 측정한 학생의 Van Hiele Level 수준이 1년이 지난 후 학생의 기하 학습 성취도와 얼마나 관련이 있는지를 조사하는 것이다. 또한 학생들이 기하 수업에 있어서 어려워하는 요인이 무엇인지 기하 수업과 Van Hiele Level 과의 연관성을 조사하였다.

이 프로젝트의 연구 결과는 Van Hiele Level 이 학생들의 성취를 예언하는데 상당한 영향력을 가지고 있음을 보여준다. 즉, 학기 초에 검사한 Van Hiele Level이 높은 학생들은 기하 학습에 있어서 높은 성취도를 보였으며, Van Hiele Level이 낮은 학생들은 기하 학습 성취도가 낮음을 보여주었다. 이 연구는 형식적인 기하 증명이 가능한 수준은 3수준 정도인데, 연구에서 밝혀진 학생들은 수준은 3수준 보다 아래 수준인 1수준 또는 2수준에 머물고 있었으며 심지어 0수준에도 미치지 못하는 학생들도 있음을 밝혔다. 이처럼 학생들의 실제 능력 수준과 학교에서 요구하는 과제를 수행하기 위한 능력의 수준의 차이가 많이 났으며 CDASSG 프로젝트는 이와 같은 증명 능력 수준의 차이가 학생들이 기하 증명을 어려워하는 원인이라고 하였다.

CDASSG 프로젝트와 동일한 문제, 채점 방식 그리고 분석 틀을 이용한 연구는 이후에도 많이 이루어졌다. 대표적으로 Senk(1989)의 연구가 있는데, Senk는 CDASSG 프로젝트와 동일한 문제와 분석 방법으로 미국5개주 11개의 학교의 기하 수업 74개 반 1520명의 학생을 대상으로 연구를 실시하였다. 이 조사의 주된 목적은 미국의 기하 수업 고등학교 학생들의 기하증명 성취 수준에 관한 자료를 수집하는 것이었다. 이 연구의 결과는 CDASSG와 마찬가지로 학생들의 가을 학기(학기 초)와 봄 학기(학기 말)에 측정한 Van Heile Level이 학생들의 기하 증명 능력과 매우 높은 상관관계를 보인다는 것이다. 학기 초에 낮은 레벨이었던 학생들은 증명을 성공적으로 학습하지 못했다. 조사된 데이터에 따르면 1수준에서 증명학습을 시작하는 학생들은 15%의 성공률을,

2수준에서 증명을 시작하는 학생들은 20%의 성공률을, 그리고 3수준의 학생들은 85%의 성공률을 보였다. 이 연구는 또한 학교의 기하 증명 수업이 이루어지는 교실 내 학생들 사이에 매우 큰 기하 증명 능력의 격차가 존재함을 보여 주었다. Senk는 Van Hiele Level을 측정하는데 사용된 평가도구와 시스템의 신뢰성의 한계를 인정하며 학생들의 수준에 적절한 수업 도구가 제공 되었을 경우 이러한 성취도는 변화 가능함을 언급하였다.

Waring(2000)은 학생들의 증명 이해 능력 발달 단계를 제시한 연구를 통해, 학생들의 증명 이해 능력 발달 단계가 증명에 대한 필요성의 인식으로 부터 시작되고 그 다음에 증명의 성질을 이해하며 결국에는 학생이 증명을 구성할 수 있는 기술을 획득하는 과정에 따라 발달한다고 보았다. 또한 학생들의 이러한 증명 이해 능력을 증명 0수준에서 부터 증명 5수준 까지 6단계로 구분하였다.

위와 같은 학생들의 증명 능력에 대한 연구뿐만 아니라, 학생들의 사고과정에 대한 연구도 활발히 진행되어 왔는데, 학생들이 증명 과정에서 보이는 일반적인 특징들은 다음과 같다. Harel & Sowder(1998)에 따르면, 학생들은 첫째, 증명이 특정한 수학적 형식(근거)에 의해서만 증명이 성립된다고 생각하는 경향이 있는데, 예를 들어 학생들은 기하학적 증명은 반드시 이단 증명(two column) 형식으로만 증명 가능 하다고 믿는다는 것이다. 또한 학생들은 증명을 '권위적인 일'이라고 생각하는데, 유명한 수학자나 선생님 같은 사람들 또는 권위 있는 기관에서 인정해 준 것만이 증명이라고 생각하는 것이다. 뿐만 아니라, 학생들이 생각하는 증명은 '귀납적인 일'이다. 다시 말해, 학생들은 증명을 하는데 있어서 몇 가지 예제나 진술이 증명을 정당화 하는데 충분하다고 생각한다는 것이다(Harel & Sowder, 1998; Weber, 2001).

같은 맥락에서, 학생들은 증명이 왜 중요한지 모르거나 경험적인 주장과 연역적인 주장을 구분하지 못하며 수학적인 문제를 해결할 때 연역적인 주장보다 경험에 의존한 주장을 더 선호하는 경향을 보인다(Balacheff, 1988; Healy & Hoyles, 2000). Healy & Hoyles는 영국과 웨일즈 지역의 여러 다양한 학교의 수학 학업성취도 상위권인 10학년 학생들 2500명을 대상으로 한 연구를 통해, 수학 성취도가 상위권인 학생들도 증명하는 것을 매우 어려워 한다는 것을 보여준다. 이 연구에서도 거의 모든 학생들은 수학적 증명을 하는데 있어서 경험적인 검증에 의존하는 경향을 보였으며, 하나의 경우나 몇 가지 경우만 증명하면 모든 경우를 설명할 수 있다고 생각했다. 이와 같이 경험에 의존하여 증명을 하는 학생들의 특징은 학업 성취도가 낮은 학생들 뿐 만 아니라 학업 성취도가 상위권인 학생들 또한 갖고 있는 특징이다. 마찬가지로, 캐나다 11학년 학생들도 유사한 특징을 보이는데, 연구 대상 학생들 중 68%가 제시된 문제에 대하여 경험적인 논제만으로도 충분히 증명이 되며, 6.4%의 학생들만이 연역적인 증명이 필요하고, 학생들에게 경험에 의존한 주장과 연역적인 증명 중에서 조금 더 마음에 드는 수학적 주장을 고르게 하자 54%의 학생들이 경험에 의존한 주장을 선택했고 오직 14%의 학생들만이 연역적 증명을 선택했다(Martin & Harel, 1989).

학생들은 증명을 '설명하는 것'과 '이유를 대는 것'이며 연역적 증명을 올바른 증명으로 보는데, 이는 '순서'를 가지고 나아가며 '단계별'로 문제를 해결하기 때문이라고 생각하는 것으로 나타났다(Sharon, 2005). 즉, 학생들은 증명을 반드시 주어진 조건을 가지고 순차적으로 해결해 나가야 하는 것으로 그리고 진술이나 증명의 이유는 반드시 순서에 맞게 기술되어야 한다고 언급했는데, 이는 학생들이 주어진 정보로 시작해서 순차적으로 주장을 정당화해 나가는 매우 엄격하고 까다로운 과정을 증명으로 보기 때문에 기하 증명이 어렵고 까다로운 것으로 인식하는 것일 수 있다(Sharon, 2005). 이러한 인식의 기저에는 미국의 기하 증명 수업에서 강조하고 있는 이단 증명(two column) 형식이 이러한 형식이 아닌 다른 형태의 증명을 증명으로 확신하지 못하는 요인이 될 수도 있다(Harel & Sowder, 1998; Sharon, 2005). 나아가, 학생들은 증명 자체의 논리 보다 좀 더 형식적인 증명의 면에 집중한다는 것을 알 수 있는데, '기하 증명은 반드시 정해진 순서대로 나열하고 이단 형식으로 근거를 대야한다'라는 질문에 거의 50%의 학생이 이 문장에 동의한다고 답했다(Sharon, 2005). 이러한 대답은 학생들의 증명에 대한 인식이 '알고리즘'에 치우쳐 있다는 것을 보여준다.

Heinze & Reiss(2009)에 따르면, 독일의 중, 고등학생들도 증명 과정에서 어려움을 겪는데, 구체적으로, 학생

들은 증명을 전개할 때 경험적 논증을 사용하였고 불완전한 제약 또는 되풀이 되는 추론을 하는 전형적인 실수를 하며, 증명을 배운 후에도 대부분의 학생들은 기하적 맥락에서 계산을 하는 표준화된 문항들만을 풀 수 있는 것으로 나타났다. 즉, 학생들은 증명 학습을 하고 난 뒤에도 여전히 증명을 구성하는 논증들을 규명하는 것에 어려움을 겪는 다는 것이다. 또한 11, 12학년 학생들은 중학교에서 배운 수학적 지식을 활용할 수 있는 기하 문제가 주어졌을 때, 단순한 절차적 지식을 묻는 표준화된 문항들에서 좀 더 높은 점수를 얻었다. 수학적 지식을 오래전에 배운 것 이었음에도 불구하고 학생들이 문제를 풀기 위해 필요한 내용 지식은 알고 있는 것으로 볼 수 있다. 그러나 수학적 증명을 하는 데 있어 절차적 지식을 제대로 활용하지는 못했다. 수학 성취도가 상위권인 학생들도 one step 명제를 주로 활용하였으며 그러한 명제들을 연관시켜 종합하지는 못하였다.

한국 학생들의 경우 중학교 2학년의 기하 영역에서 형식적 증명을 접하게 된다. 형식적 증명에서 정의를 활용하는 데 있어 영재 학생들도 점과 선에 대한 직관적 기술을 정의로 인정하며 나아가 증명을 비형식적 추론으로 이해하는 것으로 나타났다(박지현, 2011). 이는 교과서와도 밀접하게 연결되어 있는데, 중학교 기하 영역의 교과서는 직관적 정당화 수준으로 증명을 대체하여 기술하고 있는 것으로 나타났다(한인기, 2005). 나아가, 교과서에 포함된 증명 구성 과제들은 비슷한 유형의 증명 과제를 통해 익힌 절차나 알고리듬을 이용하여 해결하도록 유도하고 있다(권지현, 김구연, 2013).

나귀수(1997)는 학생들이 기하 증명을 하는 과정에서 겪는 어려움을 조사하였다. 이 연구의 결과 학생들이 기하 증명 과정에서 겪는 어려움으로 첫째, 학생들은 증명 방법을 찾지 못하며 증명을 다루는 수업 시간에 대부분의 학생들은 증명을 전혀 시도조차 하지 못하였다. 둘째, 학생들은 'A이면 B이다.' 형태의 증명 문제를 접했을 때, 가정과 결론을 구분하지 못하는데, 학생들은 증명 문제를 해결하는데 있어서 가정과 결론을 혼동하여 사용하였다. 셋째, 학생들은 증명을 할 때 반드시 기호를 사용해야 한다고 생각하며 기호 사용을 어려워한다.

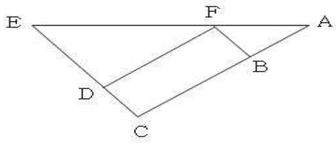
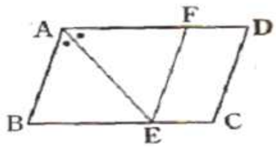
이 연구에서는 이미 기하 증명을 학습하였지만 증명 구성에 어려움을 겪은 학생들이 이후에 어떻게 기하 증명을 이해하여 증명을 구성하는지 그 사고과정에 대하여 탐색하고자 한다. 구체적인 연구 문제는 다음과 같다. 기하 증명을 이미 학습한 학생들은 기하 증명 과정에서 어떻게 사고하여 증명을 구성하며, 어떻게 접근하는지 그리고 그 과정에서 두드러지는 특징은 무엇인가?

Ⅲ. 연구방법

이 연구를 위해 정규 교육과정에서 기하 증명을 이미 학습한 중학교 3학년생 김혜원(가명), 고등학교 1학년생 이소연(가명)을 선정하였다. 김혜원과 이소연은 지리적으로 접근이 용이하며 개인적 친분이 있는 학생들로, 성격이 밝고 쾌활하여 자신의 생각을 말로 잘 표현하는 성향을 보여 대상자로 선정하였다. 김혜원은 서울 지역의 한 학년의 학생이 약 500명인 비교적 규모가 큰 공립 중학교에 재학 중이며 중학교 3년간의 내신 성적이 상위 10%에 속한다. 이소연은 서울에 위치한 한 학년이 8개 반, 약 230명으로 구성된 중학교를 졸업했으며, 중학교 기간 동안의 내신 성적은 평균 상위 40%이내에 속한다. 김혜원, 이소연 모두 가장 싫어하는 과목으로 수학을 꼽았다. 그래서 이러한 특정 학생들을 인터뷰하는 것이 본 연구 문제를 해결 하는데 도움이 될 것으로 판단되어 인터뷰 요청을 하였고, 학생들 또한 이 연구에 많은 관심을 보이며 참여하고 싶은 의사를 밝혀서 연구에 참여하게 되었다. 이 두 학생들을 대상으로 인터뷰를 실시하는데, 이에 앞서 대상자들에게 이 연구에 대하여 자세히 설명하고 참여 의사를 확인하고 학부모들의 동의를 구한 후 인터뷰를 실시하였다.

이 연구를 위해 사용한 인터뷰 질문지는 Usiskin(1982)의 Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry(이하 CDASSG) 프로젝트에서 학생들의 기하 증명 수준을 파악하기 위해 활용했던 문항과 한국 교과서의 문제를 재구성하여 최종 8문항을 선정하였다. 이 과정에서 CDASSG 프로젝트에 포함되어 있는 문항 중 한국 교육과정과 맞지 않는 문제 혹은 난이도가 너무 낮거나 높아서 학생들의 사고과정을 제대로 살펴볼 수 없으리라 판단되는 문제는 오류분석의 의미가 없을 것으로 파악되어 제외하였다. 또한 CDASSG 프로젝트 검사지의 문제 난

[표 1] 문제 수정의 예
[Table 1] Examples of Modified Tasks

CDASSG 프로젝트에서 활용된 과제	$\triangle ABF \backsim \triangle ACE$ $\triangle FDE \backsim \triangle ACE$ $BCDF$가 평행사변형임을 증명하라. 
수정한 과제	오른쪽 그림과 같이 평행사변 $ABCD$에서 $\angle A$의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E라고 하자. 점 E 를 지나고 $\overline{CD}$에 평행한 선이 $\overline{AD}$와 만나는 점을 F라고 할 때 사각형 $ABCD$는 어떠한 사각형인가? 

이도가 한국 교육과정 수준 보다 조금 낮다고 판단되어 CDASSG 프로젝트 문제와 난이도가 유사하거나 조금 더 난이도가 높다고 생각되는 한국 교과서의 문제들 중 CDASSG 프로젝트의 문제 유형과 유사한 문항을 추가하여 인터뷰 질문지를 구성하였다. 교과서에 제시된 문제를 풀어본 경험이 있는 학생은 쉽게 답할 수 있는 문제인 경우 형평성에 어긋날 수 있으므로 이러한 문제는 약간의 수정을 거친 뒤 제시하였다. 예를 들면, CDASSG 프로젝트의 문제는 삼각형의 닮음을 모두 조건으로 주고 사각형이 평행사변형임을 보이기만 하는 문제인데 이것은 학생들이 닮음을 사용하려는 전략이나 과정을 볼 수 없을 것으로 판단하여, 삼각형의 합동이나 닮음 조건을 직접 생각해내고 활용하여 사각형의 종류를 알아내는 문제인 [표 1]에 제시된 문제로 인터뷰 질문지를 구성하였다. 인터뷰 진행은 문항을 제시하고 학생들이 해결하는 동안 관찰하며 학생들이 어떻게 해결하는지 등에 대하여 이유를 설명하도록 하거나 왜 특정 방법 혹은 전략을 사용하는지 등에 관하여 계속 질문을 하였다.

김혜원, 이소연을 대상으로 약 2개월 동안에 각 학생을 각 7회씩 인터뷰를 실시하였다. 인터뷰는 매회 약 1시간 동안 실시하였으며, 위에서 설명한 검사 도구의 1-2 문항들을 제시하고 학생들이 충분히 생각을 시간을 제공하였다. 학생들이 문항들을 해결하는 동안 학생의 태도나 자세 등을 관찰, 기록하고 학생의 동의를 구하여 인터뷰의 모든 내용을 녹음하였다. 학생의 풀이 과정 중간 중간에 연구자는 학생에게 증명을 하는데 있어 어떠한 전략을 사용하려 하는지, 지금 어떠한 사고를 하고 있는지를 질문하였다. 모든 인터뷰는 녹음되었고 후에 녹취록으로 작성되었다.

수집된 녹취록 자료를 분석하기 위해 먼저 김혜원의 녹취록에서 문단마다의 핵심 키워드를 찾고 키워드를 정하는 기준이 되는 조건의 정의를 연구자가 정하여 코드북(code book)을 작성하였다. 코드북을 작성하는 이유는 시간이 지남에 따라 연구자의 키워드 부여 기준이 변하는 것을 방지하고 일관성 있는 분류를 하기 위함이다. 그 뒤 이소연의 녹취록도 한 문단을 기준으로 하여 김혜원의 녹취록을 바탕으로 한 코드 분류 기준을 가지고 코드북을 작성 하였다. 이소연의 녹취록을 분류할 때 김혜원의 인터뷰 분류 기록에 속하지 않는 것들은 새롭게 추가하여 분류 기준을 완성하였다. 이렇게 해서 김혜원과 이소연의 인터뷰 키워드를 코드로 잡고 녹취록의 모든 문단의 내용을 코드화 하여 분류를 하였다. 이렇게 녹취록을 문단별로 각각 분류한 뒤 코드가 같은 모든 문단들을 모으고 그 내용 중에서도 의미하는 바가 약간 다른 문단들은 또 다른 하위 코드를 부여하여 다시 코드화 하였다. 이렇게 모든 녹취록에 문단별 키워드를 부여하고 코드북을 작성한 뒤, 그 내용들의 공통적인 주제는 무엇이고 학생들의 패턴은 어떠한가를 분석하였고, 김혜원과 이소연의 각각의 녹취록을 비교 분석하여 두 학생의 공통점과 차이점은 어떠한지도 교차 분석(Cross checking) 하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

이 연구는 중학교 기하 증명 과정에서 학생들의 사고과정, 접근방법 또는 학생들이 사용하는 전략이 무엇이며 이러한 과정에서 학생들이 보이는 패턴은 어떠하고 특징은 무엇인지 파악하기 위한 것이다. 이를 위해 자료를 수집하여 분석하였는데, 그 결과 연구 대상 학생들이 보이는 공통적 특징과 차이점에 대해 다음에 제시한다.

1. 증명 구성에 있어서 학생들의 사고과정 특징

여기서 사고 과정이란 학생들이 개념의 잘못된 이해를 하고 있는 것, 전략의 부족, 이해 부족, 오류나 실수, 단순히 용어를 망각한 것 뿐 아니라 기하 증명 구성 과정에서 보이는 모든 문제 해결 과정과 학생들의 문제해결 전략 등을 포함한다. 두 학생들이 공통적으로 보인 특성들은 삼각형의 합동조건과 닮음조건의 혼동, 삼각형의 합동 또는 닮음을 찾으려는 경향성, 사각형의 정의와 정리에 대한 혼동, 그리고 문항에서 제시한 그림의 전체보다는 부분적인 요소에 집중하는 경향성으로 나타났다. 다음에서 각각의 특징에 대하여 기술한다.

1) 삼각형의 합동조건과 닮음조건의 혼동

기하 증명을 하는 과정에서 나타난 학생들의 특징은 삼각형의 합동과 닮음의 조건을 혼동하는 것이다. 학생들은 삼각형의 합동조건 세 가지(SSS, SAS, ASA 합동)와 삼각형의 닮음조건 세 가지(SSS, SAS, AA닮음)를 많이 혼동하였다. 학생들은 기하 증명과정에서 자신의 문제 해결 전략으로 삼각형의 합동조건과 닮음조건을 활용하고자 할 때 삼각형의 합동조건과 닮음조건들을 매우 혼란스러워 하는 모습을 보였는데, 특히, 학생들이 혼동하는 내용은 ASA합동과 AA닮음이었다. 학생들은 연구자에게 자신의 문제 해결 전략을 설명할 때 두 삼각형의 합동을 보이려고 한다고 말하고는, 두 삼각형의 세 개의 내각이 같음을 보인 뒤 합동이 된다고 주장하였다. 세 개의 내각이 같음을 보여서 합동을 증명하는 방법도 없을 뿐더러 학생들은 두개의 내각이 같으면 닮음을 보일 수 있다는 AA조건과 혼동한 것으로 보인다. 김혜원과 이소연 모두 'AA합동' 이라는 용어를 사용하거나, 각 세 개만 같으면 합동이라는 주장을 자주 하였다. 학생들은 이러한 주장을 하면서도 뭔가 이상한 것 같다며 혼란스러워 하는 모습을 보였으나 정확하게 합동과 닮음의 조건들을 구분하지 못하였다.

2) 삼각형의 합동이나 닮음을 찾으려는 경향성

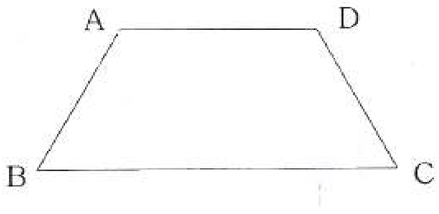
학생들은 기하 증명 문제를 접했을 때, 특히 문제에 삼각형이 제시 되어있을 경우 무조건 삼각형의 합동이나 닮음을 찾아서 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 학생들이 문제를 읽고 전략을 고민하는 동안 연구자가 학생들에게 어떠한 생각을 하고 있냐고 물었을 때 학생들은 보통 삼각형이 있는 문제에서는 합동을 찾고 있다는 대답을 했다. 특히나 김혜원은 인터뷰 도중 언제나 삼각형의 합동을 먼저 찾느냐는 질문에 자신은 합동으로 문제해결하는 것을 선호한다고 진술하였다.

연구자: 어떤 계획을 세우고 있어요?
김혜원: 또 합동을 찾으려구요.
연구자: 왜 무조건 합동만 찾으면 되요?
김혜원: 아니요 그게 아니라요 어떤 특징을 찾아야 할 거 아니에요. 이 사각형의 특징.. 음.. 직사각형이면 90° 이고 이런 특징이 있잖아요. 그런데 지금 아는게 별로 없으니까 합동 같은 것 찾아서… 각 같은거.. 그런 것 찾으면 특징을 좀 알 수 있지 않을까요?

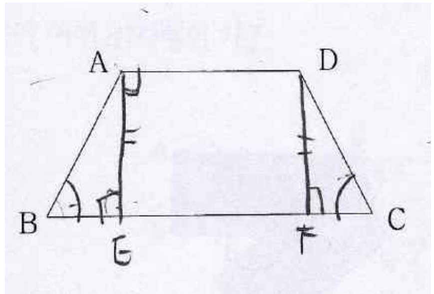
이처럼 주어진 문제의 그림에 삼각형이 제시되어 있을 때 학생들은 삼각형의 합동이나 닮음을 이용하여 문제를 해결하려는 경향을 나타냈다. 특히 그림에 제시된 삼각형이 두개 이상이며, 그 두 삼각형이 시각적으로 닮았거나 합동처럼 보일 경우 이러한 성향이 더욱 두드러졌다. 다시 말해, 학생들은 삼각형이 두개 이상 제시된 경우에는 삼각형의 합동이나 닮음을 찾아서 문제를 해결하려는 경향을 보이지만 주어진 그림에 삼각형이 하나만 제시되어있는 경우는 삼각형의 합동이나 닮음을 찾기보다는 다른 전략을 이용해서 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 주어진 문제의 그림에 삼각형 하나만을 보고 김혜원은 합동으로는 문제를 해결 할 수 없다고 하였다. 김혜원은 또 주어진 그림에 삼각형이 한 개만 있을 경우 보조선을 그려서 삼각형을 두 개 만들 수는 있지만 그렇

게 까지 해서 합동을 보이는 일은 별로 없었다며 삼각형이 두 개있을 때는 합동이나 닮음을 찾고 그렇지 않을 때는 다른 조건들을 살펴보아서 문제의 해결방법을 찾는다고 하였다. 이소연 또한 문제에 제시된 그림에서 삼각형이 두 개 이상 있을 경우 합동으로 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 이소연은 문제에서 삼각형이 두 개 제시되었을 때 합동을 이용할 뿐만 아니라 삼각형이 제시되지 않은 거의 모든 문제에서 보조선을 그려서라도 삼각형을 두 개를 만들어 그 안에서 삼각형의 합동 조건이나 닮음 조건을 이용하여 문제를 해결하려는 성향이 더욱 두드러졌다. 예를 들면 이소연은 [그림 1]과 같이 등변사다리꼴이 제시된 상황에서도 [그림 2]에서와 같이 보조선을 그려서 삼각형의 합동으로 풀어야 할 것 같다고 하였다. 이 문제는 보조선을 그리지 않고도 등변 사다리꼴의 성질로 해결할 수 있는 문제였으나 이소연은 보조선을 그려 삼각형의 합동으로 문제를 해결하려 하였다. 이소연의 이러한 풀이과정이 틀린 것은 아니었지만, 이소연은 대부분의 문제를 두 삼각형의 합동이나 닮음을 찾아 문제를 해결하려는 경향성을 강하게 나타내었다. 이와 같이 학생들은 기하증명 과정에서 삼각형이 두 개 제시된 문제라면 어김없이 제일 먼저 삼각형의 합동조건이나 닮음조건을 활용하여 문제를 해결하려는 경향을 보였으며, 그렇지 않은 문제에선 보조선을 그려서라도 삼각형의 합동이나 닮음조건을 활용하려는 경향을 보였다.

학생들이 증명 과정에서 정리나 증명을 혼동할 때 일단은 학생들에게 스스로 생각하도록 시간을 주었고, 학생들이 도움을 요청 했을 때 연구자가 개입하여 사각형의 정의나 정리를 인터뷰 중간에 설명하였다. 그러나 학생들은 다음 인터뷰 시 앞선 인터뷰에서 설명되었던 사각형의 성질, 정리 등을 또 다시 혼동하는 모습을 자주 보였다. 뿐만 아니라 학생들은 특히, 사각형의 포함 관계를 제대로 이해하지 못하고 있었다. 사각형의 포함 관계 중 에서도 직사각형과 마름모 그리고 정사각형의 관계를 제일 혼동하였다. 이것이 인터뷰를 진행하는데 있어서 계속적으로 문제가 될 것 이라고 판단하여 1회 인터뷰에서 두 학생 모두에게 사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 종류와 각각의 정의를 설명하며 사각형의 포함 관계를 벤다이어그램으로 제시하여 설명하였다. 학생들에게 사각형의 포함 관계에 대해서



[그림 1] 문제에 주어진 등변 사다리꼴
[Figure 1] A Isosceles Trapezoid given in a task



[그림 2] 학생이 보조선을 그려 합동을 찾으려 한 그림
[Fig. 2] A student's attempt to find congruent triangles by drawing lines on a given isosceles trapezoid

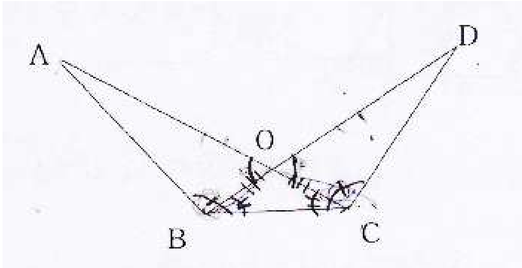
설명하기 전에 연구 대상 학생들이 가장 많이 혼동한 부분은 마름모와 직사각형의 집합 관계였다. 마름모 집합과 직사각형 집합의 교집합이 정사각형 집합이 되는 관계임에도 불구하고, 학생들은 마름모 집합이 직사각형 집합의 부분 집합이라고 생각하거나 반대로 직사각형 집합이 마름모 집합의 부분 집합이라고 생각하는 경향성을 나타내었다.

3) 주어진 그림의 전체 보다는 부분적인 요소에 집중하는 경향성

학생들은 문제에서 주어진 삼각형이나 사각형이 보조선이나 연장선에 의하여 더 작은 삼각형이나 사각형으로 분리되어 있을 때 전체적인 도형을 활용하여 접근하기 보다는 분할된 도형에 집중하여 접근하는 경향성을 나타냈다. 즉, 학생들은 전체적인 도형을 이용해 문제를 해결할 수 있는 상황에서도 전체적인 도형의 조건을 활용하여 문제를 해결하려 하기 보다는 먼저 주어진 그림에서

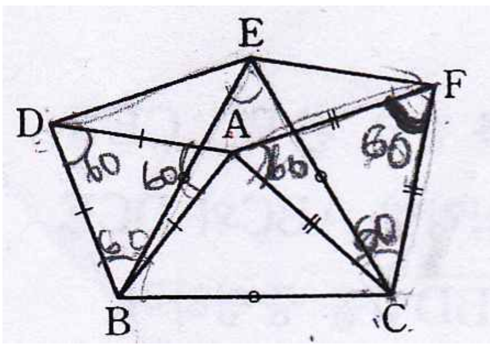
보조선이나 연장선으로 인해 '분할된' 삼각형이나 사각형에서 단서를 얻어 문제를 해결하려 하였다. 김혜원의 경우는 분할된 도형에 집중하여서 문제 해결에 필요한 단서들을 찾다가 전략이 잘 떠오르지 않으면 그 때 전략을 바꿔서 전체적인 도형을 고려하였다. 그러나 이소연은 부분에만 집중하여 전체적으로 접근하지 않았다.

인터뷰가 진행되는 동안 학생들이 이러한 성향을 자주 보인다는 것을 알게 되어 학생들의 이러한 경향이 두드러지는 문제들을 분석해보았다. 학생들은 문제에서 제시된 도형이 '시각적'으로 정형인 삼각형(시각적으로 정삼각형처럼 보이거나 이등변 삼각형처럼 특징 있어 보이는 삼각형)이나 사각형으로 분할되어있을 경우 이처럼 분할된 도형에 집착하는 경향성을 나타내었기 때문에 학생들에게 분할된 삼각형의 모양이 비정형(정삼각형이나 이등변 삼각형같이 보이지 않는 특징 없는 삼각형)인 문제를 제시하였다. 학생들은 분할된 도형이 시각적으로 비정형 삼각형이나 사각형처럼 보이자 이러한 문제에서는 분할된 삼각형이나 사각형에는 별 관심을 보이지 않고 분할된 도형보다는 다른 전략을 찾아서 문제를 해결하려했다. 다시 말해, 학생들은 보조선이나 연장선에 의해 도형이 분할되어 있을 경우 분할된 삼각형이나 사각형의 모양이 시각적으로 정형(정삼각형이나 이등변삼각형)일 때는 분할된 것에 집착하는 경향을 보이지만, 비정형일 경우(특징이 없어 보이는 삼각형)에는 분할된 삼각형을 이용하려는 노력을 하지 않았다. 예를 들어 [그림 3]과 같은 도형이 제시된 문제를 학생들에게 제공하였을 때 연구자가 예상한 풀이 과정은 삼각형 ABC와 삼각형 DCB의 합동을 이용하여 문제를 해결하는 것이었다. 처음 학생들에게 제시된 문제에는 선분 $\overline{AC}$와 선분 $\overline{BD}$의 교점 O는 없었다. 그러나 학생들은 [그림 3]과 같은 문제를 접했을 때 전체 삼각형인 ABC와 삼각형 DCB를 이용해서 문제를 해결할 수 있음에도 불구하고 교점 O를 자신들이 문제에 기록하여, 분할되어 만들어진 삼각형 OBC가 이등변 삼각형처럼 보인다는 것에 집중하여 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 두 학생 모두 이러한 경향을 보였으나 이소연의 경우는 [그림 3]과 같이 삼각형 OBC에 집중하여 마지막까지 같은 방법으로 문제를 해결하였고, 김혜원의 경우는 처음 문제를 접했을 때 이소연과 같이 삼각형 OBC에 집중하여서 문제를 해결하려고 하였다. 그러나 김혜원은 고민을 하다가 중간에 전략을 바꿔서 전체 삼각형인 ABC와 DCB로 관점을 바꿔 두 삼각형의 합동을 이용하여 증명을 마무리 하였다.



[그림 3] 학생들이 분할된 삼각형 BOC 에 집중하여 문제를 해결한 그림
[Fig. 3] Students' Drawing focusing on a triangle BOC

인터뷰를 진행하는 동안 제시된 다른 여러 문제에서도 학생들은 이와 같이 시각적으로 정형인 삼각형으로 분리된 문제는 먼저 분할된 도형에 집중하여 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 그러나 [그림 4]와 같이 보조선이나 연장선에 의해 삼각형의 모양이 분할 되어있으나 분할된 삼각형이 비정형인 경우는 전체나 다른 성질을 이용하여 문제를 해결하는 모습을 보였다. 즉 학생들은 분할된 도형이 시각적으로 정형인 경우에는 분할된 도형에 집중하는 모습을 보였으나 시각적으로 비정형인 경우에는 집중하지 않는다는 것을 알 수 있었다.



[그림 4] 분할된 삼각형이 비정형인 경우 학생들의 풀이 과정
[Fig. 4] Students' solution

2. 학생들의 사고과정의 차이점

위에서 학생들이 기하 증명 과정에서 보이는 사고 과정의 공통적인 특성에 대하여 살펴보았는데, 여기에서는 두 학생들이 보이는 사고과정에서의 차이점에 대하여 기술한다. 연구 대상 2명 중 김혜원은 캐나다에서 초등학교 시절을 보냈는데 이 때문에 언어적인 어려움을 겪는 것으로 추정할 수 있다.

1) 용어의 혼동과 혼용

앞에서 본 학생들의 공통적 특징에서 학생들이 삼각형의 합동조건과 삼각형의 닮음 조건을 혼동함을 언급하였다. 이와는 약간 다르게 김혜원은 합동과 닮음의 용어를 혼동하거나 혼용하여 사용하였다. 앞서 공통적인 특징에서 설명한 것은 학생들이 합동이나 닮음 '조건'을 혼동하는 것이었으나, 김혜원이 보이는 특징은 합동이나 닮음이라는 '용어'를 혼동하여 사용하였다. 예를 들면 김혜원은 연구자에게 "닮음이에요."라고 말하였으나 사용하는 조건들이나 학생의 증명 과정을 살펴보면 합동조건을 사용하고 있는 경우, 즉 말로는 닮음이라고 하였지만 학생들의 문제 해결과정에는 합동을 사용하고 있는 경우들을 포함하는 내용이다.

김혜원이 가장 많이 혼동하거나 아무렇지 않게 혼용하여 사용하는 단어는 합동과 닮음, 면과 변이다. 그리고 김혜원은 "길이가 평행하다."라는 표현이나 "면이 같다." 같은 어색하거나 애매한 표현들도 사용하였다. 김혜원의 경우 외국에서 살다온 기간이 길어서 한국말을 여전히 혼동하거나 혼용하여 사용하는 모습을 자주 보였는데 김혜원이 특히 혼용하는 단어는 직사각형을 '직각사각형'이라고 표현하거나 직각삼각형을 '직삼각형' 같은 단어로 사용하는 것 이었다. 또는 '변의 길이가 같다.'를 "면의 길이가 같다."로 표현하곤 했다. 또 교점을 중점과 헷갈려하는 모습도 보였다. 학생들이 이러한 모습을 보일 때 연구자가 개입하여 학생들에게 다시 질문을 하였고 학생들은 자신이 용어를 잘못 사용하였음을 깨닫고 다시 용어를 수정하여 사용하였다. 이러한 점으로 보아 학생들이 용어의 정의를 모르는 것은 아니나 문제 해결 과정에서 가끔 혼동하는 정도로 볼 수 있다. 이러한 학생들의 경향성은 초반에 실시한 1회~3회 인터뷰에서 많이 나타났다. 대부분 학생들이 기하 증명을 학습한 뒤로 시간이 경과하여 용어를 망각한 모습인 듯 했으며 인터뷰가 거듭되면서 점점 이러한 용어사용의 횟수는 줄긴 하였으나 가끔 용어를 혼동하거나 혼용하였다.

2) 도형의 시각적인 요소에 집착하는 경향

기하 증명 과정에서 이소연은 문제에서 주어진 그림의 시각적 요소에 집착하는 현상을 보였다. 예를 들면 '어떤 사각형인지 증명하라'는 문제가 주어졌을 때 문제에서 제시된 그림이 정사각형과 시각적으로 유사해보이면 정사각형이라는 것을 전제로 하고 문제에 접근하는 경향이 두드러졌다. 이소연은 증명을 전개하지 않고도 답을 먼저 말하곤 하였는데 그럴 때 이유를 물으면 "그냥 정삼각형처럼 보여서 정삼각형임을 증명해 보려구요." 또는 "그냥 딱 봐도 90°는 아닌 것 같은데...", "정삼각형으로 생각해야 편할 것 같아서요." 라며 문제에 주어져 있지 않은 정삼각형 조건을 사용하기도 하였으며, "90° 여야 하는데 그럴만한 각이 아니네요."라는 등 시각적인 요소에 의존한 진술을 자주 하였다.

이처럼 이소연은 기하 증명을 연역적인 방법으로 문제를 해결하려 하기 보다는 시각적인 직관에 의존하여 문제를 해결하려는 경향이 강했다. 이소연은 또한 [그림 5]와 같은 문제에서 주어진 평행사변형이 시각적으로 직사각형처럼 보이자, 문제도 제대로 읽지 않고 직사각형의 성질을 이용하여 증명을 구성하는 모습을 보였다. 이소연은 이처럼 문제에서 제시되지 않은 조건들을 함부로 사용하는 모습을 자주 보였는데, 이소연이 그러한 모습을 보이는 상황을 분석해 보았을 때 모두 시각적 요소에 집착한 경우였다. 예를 들면, 주어진 도형에서 선분 한 쌍이 평행해 보인다면 주어진 선분 한 쌍이 평행하다는 것을 증명하지 않고 자신의 문제해결 과정에 함부로 사용하는 것이다. 다음은 [그림 5]의 문제를 해결하는 이소연의 모습이다.

> 이소연: 직사각형의 두 대각선의 가운데 점은 두 선을.. 다 같게 하는 거니까... 중점이므로...
> 연구자: 지금 주어진 문제가 직사각형이에요?
> 이소연: (문제를 봄) 아 평행사변형이군요..죄송해요.

또한 이소연은 [그림 5]의 문제에서 주어진 그림의 사

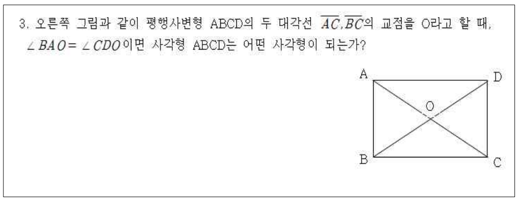
각형이 시각적으로 직사각형으로 보이는 것이 문제 해결에 불편했는지 빈 공간에 일반적으로 교과서에서 제시되는 평행사변형의 모양인 [그림 6]과 같은(평행사변형은 되지만 직사각형은 되지 않는 일반적인 평행사변형) 평행사변을 다시 그렸다. 연구자가 무엇을 그린 것인지 설명하도록 요청했을 때, 이소연은 주어진 그림이 직사각형처럼 보여서 평행사변형의 특징을 아는데 이것이 혼동이 되기 때문에 일반적인 평행사변형을 그려서 평행사변형의 특징을 살펴본다고 하였다. 이러한 점들을 통해서 이소연이 시각적 요소에 민감하게 반응한다는 것을 알 수 있다.

3) 가정과 결론에 대한 혼동

학생의 증명과정의 특징 중 이소연이 자주 드러낸 또 다른 특징은 가정과 결론을 혼동하는 것이다. 이소연은 주어진 문제에서 증명해야 하는 결론을 이미 아는 것으로 간주하고 증명 과정에서 조건으로 사용하는 모습을 빈번히 보였다. 예를 들어, 두 직선이 평행임을 보여야 하는 문제에서도 평행임이 증명되어야만 사용할 수 있는 '엇각이 같다'라는 성질을 증명을 하는 도중에 조건으로 사용하는 모습을 보였는데, 연구자가 풀이 과정 도중에 개입하여 왜 그런 것이냐고 묻고 왜 그런 조건을 사용하게 되었는지를 질문할 때에만 자신의 실수를 깨달았다. 그러나 이소연은 자신이 결론으로 증명해 보여야하는 것을 조건으로 사용하고 있다는 것을 인식하고도 한 문제에서도 몇 번이고 똑같이 결론과 가정을 혼동하는 실수를 반복하는 모습을 보였다. 다음은 평행을 보여야하는 문제에서 이소연이 평행이라는 것을 알아야만 사용할 수 있는 엇각 조건을 증명과정에 사용하는 모습이다. 즉, 엇각관계임을 보여야만 하는 두각을 같다고 조건으로 사용하여 증명을 전개해나가는 것이다. 그리고 다시 자신이 결론을 가정에 사용했다는 것을 인식한 뒤에도 실수를 반복하는 모습을 볼 수 있다.

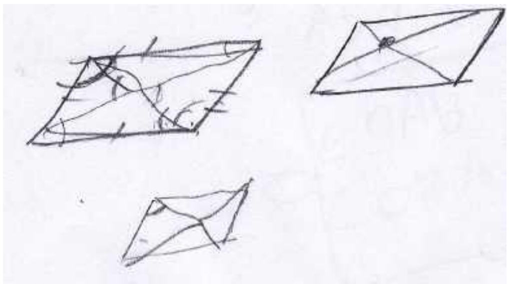
4) 경험이나 직관에 의존한 주장(논리적 비약)

증명 문제를 해결하는데 있어 이소연은 종종 연역적인 증명 방법보다 자신의 경험이나 직관에 의존하여 비형식적인 주장을 하였다. 이러한 현상 또한 김혜원은 보이지 않았으나 이소연이 자주 보이는 특징이다. 이소연은 증


3. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 $\overline{AC}.\overline{BC}$의 교점을 O라고 할 때, $\angle BAO = \angle CDO$이면 사각형 ABCD는 어떤 사각형이 되는가?

[그림 5] 제시된 평행사변형 $ABCD$가 시각적으로 직사각형처럼 보이는 문제

[Fig. 5] A parallelogram given in a task that can be seen as a rectangle



[그림 6] 학생이 문제 해결을 위해 평행사변형의 성질을 알기위해 그린 그림

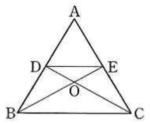
[Fig. 6] A Student's Drawing for finding the properties of parallelograms

명 과정에서 자신의 추론을 정당화할 때 '어차피'라는 용어를 많이 사용했다. 대부분의 이소연이 주장하는 추론은 논리성이 부족하였고 연역적인 설명보다는 자신의 경험이나 시각적인 내용에 의존한 주장이 많았다. 다시 말해 이소연은 자신의 추론을 정당화 하는데 있어서 연역적으로 증명하여 설명하기 보다는 자신의 경험에 의존하여 증명의 몇 단계를 생략하여 직관적으로 결론만 유도하는 논리적 비약을 보였다. 그러한 과정에서 연구자가 증명과정에 개입 하여 이소연에게 조금 더 자세한 설명을 요구하거나 이소연의 추론이 논리성이 부족함을 반박할 때도 이소연은 계속적으로 직관이나 경험에 의존한 비형식적인 주장을 하였으며 그러한 자신의 주장이 왜 잘못 된 건지 이해하지 못하고 오히려 자신의 직관적인 주장을 연구자에게 이해시키려하는 모습을 보였다. [그림 7]의 문제를 제시했을 때 이소연은 각 ADE와 각

ABC가 같다고 주장하였다. 연구자가 두 각이 왜 같은지 묻자 이소연은 큰 삼각형 ABC 안에 선분 DE를 그어 생긴 삼각형 ADE가 각 A를 공유하며 겹쳐져있는 상황이니 각 ADE와 각 ABC가 '어차피' 같다고 계속 주장하였다.

이처럼 이소연은 연역적이지 못한 주장을 하며 "어차피 같다"라는 말을 많이 하며 경험이나 직관에 의존한 주장을 많이 하였는데, 이러한 상황을 연구자가 분석한 결과 이소연이 이러한 모습을 보이는 상황은 두 가지였다. 첫 번째 상황은 문제에서 주어진 그림이 시각적으로 자신의 추론과 유사할 때이다. 다시 말해 이소연이 [그림 7]의 문제를 해결하는 과정에서 하는 주장 '각 ADE와 각 ABC가 같다'는 문제에 주어진 그림에서도 시각적으로 그러해 보이기 때문에 자신의 주장을 더 확고하게 믿는 듯했다. 앞서 이소연이 시각적인 요소에 민감한 반응을 보이며 시각적인 것들에 집착하는 경향을 보임을 살펴보았는데, 이소연이 직관적인 주장을 하는 것도 시각적인 요소에 많은 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 두 번째 이소연이 이러한 직관적 주장을 하는 상황은 과거의 학습경험에 의존할 때이다. 이소연이 직관적 주장을 하는 문제들 중 몇 가지 문제들은 교과서나 문제집에서 자주 볼 수 있는 문제 상황과 유사한 것들이었다. 다시 말해 이소연은 과거에 접해 본적이 있어서 결과만 어렴풋하게 알고 있는 경우에도 직관적인 주장이나 경험에 의존한 주장을 하였다. 이소연은 문제를 푸는 도중에도 "아, 이거 예전에 했던 것 같은데" 라고 하거나 "예전엔 알았는데.."라는 말을 하기도 하였으며 비형식적인 주장을 할 때 연구자가 왜 그런지 이유를 묻자 "그랬던 것 같은데..." 라는 말을 하였다. 이러한 이소연의 반응으로 이소연은 과거 학교나 개인적인 학습 경험 시 접했던 문제 상황을 떠올리며 비형식적인 주장을 함을 알 수 있다. 이러한 비형식적인 주장을 할 때 이소연은 수학적으로 불분명한 용어를 사용하기도 하였는데 "같은 각만큼으로 찌르잖아요." 또는 "사다리를 놓고, 그러니까 E, F에 발을 놓고 똑같은 모서리를 향해 꽂았기 때문에 각이 같고..." 라는 불분명한 용어를 사용하며 수학적인 증명을 하였다.

$\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB},\overline{AC}$위의 두 점 D, E에 대하여 $\overline{AD}=\overline{AE}$이면 $\overline{DC}=\overline{EB}$임을 증명하라.



[그림 7] 학생이 비형식적 주장을 많이 한 문제
[Fig. 7] A task in which students make weak arguments

V. 결론 및 제언

중등학교 수학의 영역 중에서 증명이 가장 많이 요구되는 영역은 기하 영역이며, 따라서 기하 영역은 학생들에게 증명 훈련을 시키는데 가장 적합한 분야이다. 이러한 기하 영역에서 증명의 중요성 때문에 교사들은 학생들에게 증명을 이해시키기 위해 많은 시간을 할애한다. 그러나 이러한 교사들의 노력에도 불구하고 대부분의 학생들은 수학 학습에 있어 유독 증명학습을 많이 어려워하고 기피하는 현상을 보인다(Healy& Hoyles, 2000). 따라서 이 연구에서는 학교 정규 교육과정의 내용으로 기하 증명을 이미 배운 2명의 학생들이 기하증명 과정에서 보이는 사고과정이나 전략을 살펴보고 학생들의 사고과정에서 나타나는 규칙은 무엇이며 특징은 어떠한지 탐색하고자 하였다.

그 결과, 두 명의 학생들이 공통적으로 보인 특징은 삼각형의 닮음과 합동의 조건을 혼동하며, 삼각형의 합동이나 닮음을 찾아서 문제를 해결하려는 경향성, 사각형의 정리나 정의를 혼동하거나 사각형의 포함관계를 잘 알지 못하는 점, 그리고 주어진 그림에서 도형이 분할되어있을 경우 전체적인 도형에 집중하기 보다는 먼저 분할된 도형에 집중하여 문제를 해결하려는 경향성을 보인 것 등이다. 특히, 학생들이 대부분 증명을 전개할 때 경험적 논증을 사용하고 불완전한 추론을 하는 등의 실수를 하는 것으로 나타났는데, 이는 Heinze & Reiss (2009)의 연구 결과와 일치한다. Balacheff (1988)의 연구에서도 학생들은 경험적인 주장과 연역적인 주장을 구분하지 못하고 연역적인 주장보다 경험에 의존한 주장을 더 선호한다는 것을 보여주었는데 본 연구 결과와 동일하나 학업 성취도가 상위권인 학생들은 제외되는 결과이다. 그러나 학업 성취도가 낮은 학생이 이러한 경험이나 직관에 의존한 주장을 하면서도 학생은 가끔 본인 스스로도 논리적이지 못하다는 것을 깨달았는지 자신이 "지

금 무언가 놓치고 있는 것 같다.” 또는 “이렇게 해도 되나?” 라는 혼잣말을 하기도 하였다. 또 연구자에게 ‘어떤 사각형인지 주장하고 싶으면 그 사각형의 정의에 맞는 조건을 보여야 하는 것 아닌가요?’라는 질문을 하기도 하였다. 학생은 알고는 있지만 어떻게 해야 하는지는 모르겠다고 하였고 연역적인 주장이 필요하다는 것은 어렴풋하게 인지하는 듯 했으나 실제적으로 그러한 증명을 전개해 나가지는 못하였다.

차이점으로는 학생 두 명 중 학업 성취도가 비교적 낮은 학생만 보인 특징이 있는데, 도형의 시각적인 요소에 민감하게 반응하는 것과 가정과 결론을 혼동하여 서술하는 것 그리고 직관이나 경험에 의한 비논리적인 주장을 하는 것 등이다. 또한 학생들이 자주 보인 공통적 경향은 절차적 지식의 사용이었다. 학생들이 기계적으로 암기하여 사용하는 정리는 ‘평행이면 엇각과 동위각이 같다’였다. 학생들은 증명 과정에서 이 정리를 빈번하게 사용하였지만 실제로 왜 그런지 알지 못하였고 고민해본 적도 없다고 하였다. 심지어 학생들은 엇각과 동위각은 평행한 두 직선이 존재할 때만 정의되는 용어로 알고 있었다. 이러한 원인으로는 한국 수학 교육과정에서 엇각과 동위각은 두 선이 평행임을 보일 때만 등장하고, 교사 또한 ‘평행이면 엇각 같다’라는 결론만 학생들에게 암기시키다 보니 이러한 모습을 보여주는 듯하다. 증명이 학생들의 수학적 사고능력과 추론능력을 기르기 위해 이뤄지는 활동인 만큼 교사가 이러한 정리를 학생들에게 언급하고 이해시켜 주는 것 또한 중요하다고 생각된다.

학업 성취도 상위 40%로 비교적 낮은 학생만이 보인 특징으로는 첫째, 시각적인 요소에 집착하는 경향이다. 문제에 주어진 도형이 시각적으로 직사각형처럼 보이면 학생은 직사각형이라는 것을 이미 알고 있는 것처럼 직사각형의 성질을 활용해서 문제를 해결하려 하는 경향을 자주 보였다. 반면에, 학업 성취도가 높은 학생은 시각적인 요소에 많이 흔들리지 않았으며 시각적으로 그러해 보인다 하여도 연역적 증명으로 밝혀서 알아낸 조건이 아니라면 함부로 사용하면 안 된다는 것을 알고 있었다. 예를 들어, 문제에 시각적으로 정사각형처럼 보이는 그림이 문제에 제시되어 있다면 ‘아마 이 사각형은 정사각형이 될 수도 있을 것이다’라는 정도로 예상하고 필요하다면 연역적 증명을 하여 추론을 정당화하고 그것을 문제 해결을 위한 전략으로 사용하였다. 반면에 학업 성취도가 낮은 학생은 시각적인 요소에 매우 민감하게 반응하는 모습을 자주 보였으며 이후 살펴볼 학생의 특징들도 이러한 시각적인 요소에 집착하는 것과 깊은 관련이 있다.

학업 성취도가 상대적으로 낮은 학생의 두 번째 특징은, 가정과 결론에 대한 혼동이다. 상위권 학생은 문제에서 증명하라는 것을 보이기 위한 근거들을 역 추적하는 방식으로 증명에 필요한 것들을 차근차근 찾아나가는 경향이 있었지만 학업 성취도가 낮은 학생은 문제에서 원하는 것을 단계적으로 찾아나가기 보다는 문제를 보고 일단 우선적으로 떠오르거나 직접적으로 보이는 요소들의 영향을 많이 받는 것으로 나타났다. 즉, 자신의 문제 상황과 관련 없는 요소들에도 민감하게 반응하며 시각적으로 평행처럼 보이는 것이면 일단 평행이라는 것을 보이려 하고, 시각적으로 각이 같아 보이면 각이 같음을 보이려하는 등 문제를 해결하는데 불필요한 요소들을 두서없이 다 찾거나 접근하는 식으로 방향성을 잃는 모습을 자주 보였다. 이러한 과정에서 학생은 증명해야 할 목적을 잊거나 주어진 조건들을 제대로 활용하지 못하여 혼란스러워 하고 어려워하는 모습을 빈번히 보였다. 이 과정에서 학생은 증명해야 하는 것(결론)을 증명 과정 도중에 조건으로 사용하는 등의 실수를 많이 하였다. 이러한 과정을 통하여 증명 과정에서 학생들이 시각적 요소에 많은 영향을 받는다는 것을 알 수 있었다. 학업 성취도가 낮은 학생이 이러한 경험이나 직관에 의존한 주장을 하면서도 학생은 가끔 본인 스스로도 논리적이지 못하다는 것을 깨달았는지 자신이 “지금 무언가 놓치고 있는 것 같다.” 또는 “이렇게 해도 되나?” 라는 혼잣말을 하기도 하였다. 또 연구자에게 ‘어떤 사각형인지 주장하고 싶으면 그 사각형의 정의에 맞는 조건을 보여야 하는 것 아닌가요?’라는 질문을 하기도 하였다. 학생은 알고는 있지만 어떻게 해야 하는지는 모르겠다고 하였고 연역적인 주장이 필요하다는 것은 어렴풋하게 인지하는 듯 했으나 실제적으로 그러한 증명을 전개해 나가지는 못하였다.

흥미로운 점은 학생들의 공통적인 특징 중 하나인 주어진 도형의 전체 보다는 분할된 부분에 집중하는 경향성이다. 학생들은 주어진 도형이 분할 되어있을 때 분할

된 삼각형이 정형일 경우에는 관심을 보이고 분할된 도형의 특징을 찾아 접근하는 모습을 보이고, 비정형 삼각형으로 분할 되어있을 때는 분할된 도형에 별 관심을 보이지 않는다는 것이다. 이러한 점은 선행연구에서도 언급된 적이 없어서 연구자 또한 예상하지 못하였던 결과이다. 이러한 학생들의 사고과정의 특징이 일반적인 학생들에게도 나타나는 것인지, 본 연구 대상 학생들만의 특징인지 알아보는 후속 연구가 필요할 것이다. 만약 이와 같은 특징이 일반적인 학생들도 가진 특징이라면 학생들은 왜 이러한 현상을 보이는지에 대한 연구가 후속 연구로 진행되면 학생들이 증명을 하는데 있어서의 사고 과정을 좀 더 잘 파악할 수 있을 것이라 예상한다. 또한 학생들의 이러한 특징이 과거 학습 경험과 얼마나 많은 관련성이 있는지 학생들의 사고과정의 일반적인 특징인지 후속 연구를 통해 밝히는 노력이 필요하며, 이는 학생들의 기하증명 학습 및 교사들의 교수법에도 큰 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

권지현, 김구연 (2013). 중학교 수학 교과서에 제시된 기하영역의 수학 과제 분석, 수학교육 52(1), 111-128.

Kwon, J., & Kim, G. (2013). An analysis of mathematics tasks in the middle school geometry, *Mathematical Education, 52*(1), 111-128.

나귀수 (1997). 기하 개념의 이해와 적용에 관한 소고, 수학교육학연구 7(2), 349-358.

Na, G. S. (1997). An analysis of proof-lesson on the second grade in the middle school. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics 7*(2), 349-358.

이지현 (2011). 일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행, 수학교육 50(4), 429-440.

Lee, J. H. (2011). The transition from everyday definitions to mathematical definitions: Gifted middle school students' conceptions of point and line definitions, *Mathematical Education, 50*(4), 429-440.

한인기 (2005). 한국과 러시아의 7-8학년 수학교과서 도형영역에 나타난 직관적 정당화와 엄밀한 증명, 수학교육 44(4), 535-546.

Han, I. (2005). A study on intuitive verification and rigor proof in geometry of Korean and Russian 7-8 grade's mathematics textbooks, *Mathematical Education 44*(4), 535-546.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, Teachers and Children 216*, 235-240.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics 24*(4), 359-387.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S., & Choustoulakis, E. (2007). Developing a proof-writing tool for novice lyceum geometry students. *Teaching of Mathematics 10*(2), 87-106.

Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: A historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. *Linear Algebra and its Applications 302*(303), 601-613.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education III 7*, 234-282.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education 31*, 396-428.

Heinze, A., & Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competences in the mathematics classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth. (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 191-203). New York: Routledge.

Herbst, P. G. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education 37*(4), 313.

Mammana, C., & Villiani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. Kluwer: London.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist 23*, 145-166.

Usiskin, Z. (1982). Van hiele levels and achievement in secondary school geometry. CDASSG project report.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools*. Leicester: Mathematical Association.

Exploring students' thinking in proof production in geometry

An, SunYoung
E-mail : sssssun87@gmail.com

Kim, Gooyeon†
Sogang University
E-mail : gokim@sogang.ac.kr

This study aims to explore secondary students' thinking while doing proof in geometry. Two secondary students were interviewed and the interview data were analyzed. The results of the analysis suggest that the two students similarly showed as follows: a) tendencies to use the rules of congruent and similar triangles to solve a given problem, b) being confused about the rules of similar and congruent triangles, and c) being confused about the definitions, partition and hierarchical classification of quadrilaterals. Also, the results revealed that a relatively low achieving student has tendency to rely on intuitive information such as visual representations.

* ZDM Classification : G13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : Students' thinking processes, middle school students, proof production, geometry
* This work was supported by the Sogang University Research Grant of 2011(20110065).
† Corresponding author