

Areas in MukSaJibSanBeob and GullJib

黙思集算法과 九一集에서의 넓이

KHANG Mee Kyung 강미경

In China and Joseon, the measurement of the areas of various plane figures is a very important subject for mathematical officials because it is connected directly with tax problems. Most of mathematical texts in China and Joseon contained Chinese character '田', which means a field for farming, in title name for parts that dealt with problems of areas and treated as areas of plane figures. The form of mathematical texts in Joseon is identical with those in China because mathematicians in Joseon referred to texts in China. Gyeong SeonJing and Hong JeongHa also referred to Chinese texts. But they added their interpretations or investigated new methods for the measurement of areas. In this paper, we investigate the history of the measurement of areas in Joseon, which described in two books MukSaJibSanBeob and GullJib, with comparing some mathematical texts in China.

Keywords: Areas, MukSaJibSanBeob, Gyeong SeonJing, GullJib, Hong JeongHa; 넓이, 黙思集算法, 慶善徵, 九一集, 洪正夏.

MSC: 01A13, 01A25, 01A45, 01A50, 12-03, 12E05, 12E12

1 서론

역사적으로 중국과 조선은 모두 농업 국가이었기에 국가가 부여하는 농지세는 중요한 국가 재정의 수입원이 되었다. 국가가 농지세를 공평하게 부여하기 위하여 농지 측량과 세금 계산이 매우 중요한 문제로 여겨졌다. 역사적으로 보면 九章算術(구장산술) 이래 중국과 조선의 모든 산서는 도형의 넓이를 매우 중요하게 다루고 있다. 그러나 농지 측량과 세금 징수는 주로 하급관리에 의하여 다루어졌다. 세금을 징수하기 위하여 농지측량제도인 量田(양전)은 매우 중요한 국가의 일이 되어 戶曹(호조)에서 담당하였다. 이를 담당한 관리는 戶曹의 算員(산원)들로 算學取才(산학취재)를 통하여 선발되었다. 이들은 從九品 '會士(회사)'로부터 從六品 '算學教授(산학교수)'나 '別提(별제)'까지 승진할 수 있는 中人(중인)들이었다. 籌學入格案(주학입격안-산학 합격자 명단)에 당시 합격자들이 기록되어 있다.

조선 중기에 임진왜란과 정유재란을 겪으면서 많은 서적이 불살라지고 약탈당하여서 算學에 대한 서적이 없어지게 되었지만 1660년 金始振(김시진)이 算學啓蒙(산학계몽)을 중간하면서 조선의 算學은 다시 획기적인 발전을 이루게 되었다. 算員의 채용인원은 꾸준히 늘었으며 算學 기술 관리직을 독점하는 中人 算學者들이 늘어나게 되었다. 이 중의 대표적인 인물로 慶善徵(경선징)과 洪正夏(홍정하), 李尙燦(이상혁)이 있다.

慶善徵의 默思集算法(묵사집산법)은 현존하는 조선의 算書로는 가장 오래된 책으로 楊輝算法(양휘산법), 詳明算法(상명산법), 算學啓蒙을 기본으로 하여 중국 算書들의 구성방법인 문제-답-풀이의 형식으로 만들어져 있지만 문항을 더 많이 다루었고 별해도 추가하여 자신의 해법을 제시하였다[4].

洪正夏의 九一集(구일집)은 九章算術, 詳明算法, 算學啓蒙, 算法統宗(산법통종) 등을 기본으로 했지만 算學啓蒙에 실린 내용보다 훨씬 발전된 天元術(천원술) 문제를 싣고 있다[5]. 19세기 중인 산학자 李尙燦과 양반 산학자인 南秉吉(남병길)이 九一集의 가치를 재조명할 때까지 九一集은 洪正夏의 자손들과 그들의 친척들만 사용하여 洪正夏의 수학은 거의 조선 산학의 발전에 기여하지 못하였다.

趙泰燾(조태구, 1660-1723)는 Ricci(利瑪竇, 1552-1610)와 徐光啓(서광계, 1562-1633)가 Euclid의 Elements의 처음 6장을 공동으로 번역하여 1607년에 출판한 幾何原本(기하원본)을 연구하였다. 그는 주어진 세 변을 가진 삼각형의 높이를 구하는 방법과 이를 이용하여 일반 삼각형의 넓이를 구할 수 있음을 그의 저서 籌書管見(주서관견, 1718)에서 나타내었다[1]. 같은 방법은 洪大容(홍대용, 1731-1783)의 저서 籌解需用(주해수용)에 인용되었다. 이들을 제외하면 조선의 면적법은 전술한 慶善徵과 洪正夏의 저서에 들어있는 내용과 거의 같다[7, 6].

따라서 이 논문에서는 默思集算法과 九一集에 들어있는 면적법을 중국의 산서들과 비교하여 조사하였다.

2 여러 산서에서의 넓이

지형에 따라 밭의 모양이 천차만별이었으므로 모든 산서에서는 도형의 형태에 따라 넓이를 구하는 방법을 서술하였다.

慶善徵과 洪正夏는 모두 楊輝算法, 算學啓蒙, 詳明算法을 주로 참고하였으며 洪正夏는 이 세 가지의 산서에 더불어 算法統宗도 참고하였다.

이 논문에서는 중국의 산서 중에서 九章算術, 楊輝算法, 算學啓蒙, 詳明算法과 算法統宗을 참고하여 慶善徵의 默思集算法과 洪正夏의 九一集에서 나타나는 면적법에 대하여 알아볼 것이다.

九章算術에서는 제1장 方田(방전)에서 넓이를 다루고 있는데 도형의 모양은 비교적

단순하게 분류하면서 계산이 쉬운 문제에서부터 점점 어려운 문제(변의 길이가 정수인 경우와 분수인 경우를 차례로 다루었다.)로 접근하면서 도형의 모양에 따른 계산뿐만이 아니라 분수의 연산을 고려하고 있음을 알 수 있었다. 또 劉徽(유휘)가 내접하는 정다각형의 넓이를 통하여 원주율 π 의 근삿값을 구한 것도 이 장에 들어있다[3].

楊輝算法(楊輝(양휘), 1274-1275)에서는 田畝比類乘除捷法(전무비류승제첩법, 1275) 상권과 하권에서 넓이를 다루고 있는데 상권에서는 주로 여러 가지 도형의 넓이를 구하였고 하권에서는 이 넓이 문제를 방정식의 구성과 해법을 설명하는데 이용하였다. 續古摘奇算法(속고적기산법, 1275) 상권에서도 약간 다루어지고 있다[3].

算學啓蒙(朱世傑(주세걸), 1299)에서는 중권의 田畝形段門(전무형단문)에서 넓이를 구하는 문제를 다루었고 하권의 開方釋鎖門(개방석쇄문)은 양휘산법과 마찬가지로 天元術을 이용하여 방정식을 구성하는 문제에 면적법을 이용하고 있다[3].

詳明算法(安止齋(안지제), 1373)에서는 하권의 丈量田畝(장량전무)에서 넓이를 다루고 있는데 문제의 서술 방법은 算學啓蒙에 있는 문제인 경우는 算學啓蒙을 주로 따르고 있다[3].

算法統宗(程大位(정대위), 1533-1606), 1592)에서는 제3권에서 도형의 넓이를 다루고 있는데 도형의 형태가 다양하고 상세한 그림을 첨가하여 이해하기 쉽게 기술하였다[3].

3 도형을 나타내는 방법

九章算術부터 모든 중국의 산서는 도형에 대해 정확한 정의는 하지 않은 채 ‘田’자를 접미사로 사용하여 평면도형을 나타내면서 변과 높이와 길이들로 도형을 나타내었다. 예를 들어 九章算術에서 직사각형은 모두 ‘田’이라 하고 廣(광), 從(중)의 길이만 나타내었고 楊輝算法, 算學啓蒙, 詳明算法, 算法統宗 등에서는 간단히 그림을 첨가하여 도형의 모양을 설명하여 도형의 이해에 도움을 주었다.

그러나 같은 이름의 도형을 다른 그림으로 나타내고 있는 경우도 있다. 예를 들면 牛角田(우각전)의 경우 楊輝算法에는 弧矢田(호시전)의 반과 같이 그려져 있고, 算法統宗에는 眉田(미전)의 반으로 그려져 있다. 실제로 楊輝算法의 牛角田의 넓이는 弧矢田의 넓이의 반도 아니고 算法統宗의 牛角田의 넓이도 아니다. 일반적으로 대부분의 넓이는 원의 넓이와 같이 근삿값으로 계산하여 넓이의 풀이로도 도형을 정확히 알 수 없다. 算法統宗은 圭田(규전)을 梭田(사전), 즉 마름모꼴의 반(卽半梭)으로 정의하여 이등변 삼각형이 되지만 그 나머지 산서는 圭田을 밑변과 높이를 준 삼각형으로 되어 있어 이등변 삼각형으로 이해할 필요가 없다.

아래의 표는 각 산서별로 도형의 이름을 정리한 것이다. 이 논문에서 언급되는 용어의 이해에 도움을 줄 것으로 보인다. 이 중에서 算法統宗에서는 표에 언급되는 형태보다 훨씬

더 많은 이름의 형태들이 있지만 나머지 산서들과 비교되는 것들만 언급하였다.

| 모양 | 九章算術 | 楊輝算法 | 算學啓蒙 | 詳明算法 | 算法統宗 | 默思集算法 | 九一集 |
|--------|------|--------|------------|------|--|------------|---|
| 정사각형 | 方田 | 方田 | 方田 | 方田 | 方田 | 方田 | 方田 |
| 직사각형 | 田 | 直田 | 直田 | 直田 | 直田 | 直田 | 直田 |
| 이등변삼각형 | | | | | 圭田 (卽 半梭) | | |
| 직각삼각형 | 句股田 | 句股田 | 句股田 | 句股田 | 句股田 | 句股田 | 句股田 |
| 정삼각형 | | | | | 三角田 | | 三角田 |
| 일반삼각형 | 圭田 | 圭田 | 圭田, 三斜田 | 圭田 | 斜圭田 | 圭田, 三斜田 | 圭田, 三斜田 |
| 소뿔모양 | | 牛角田 | | 牛角田 | 牛角田 | 牛角田 | 牛角田 |
| 사다리꼴 | 箕田 | 梯田 | 梯田 | 梯田 | 梯田 | | 梯田 |
| 직각사다리꼴 | 邪田 | | | | 斜田 | | |
| 마름모 | | 梭田 | 梭田 | 梭田 | 梭田 | 梭田 | 梭田 |
| 일반사각형 | | | | | 四不等田 | | 四不等田 |
| 원 | 圓田 | 圓田 | 圓田 | 圓田 | 圓田 | 圓田 | 圓田 |
| 눈섭모양 | | | | 眉田 | 眉田 | 眉田 | 眉田 |
| 반원 | | | 弧田 | | 覆月田 | 半月田 | |
| 활꼴 | 弧田 | | | 弧矢田 | 弧矢田 | 弧矢田 | 弧矢田 |
| 언덕모양 | 宛田 | 畹田, 丘田 | | | | | |
| 고리모양 | 環田 | 環田 | 環田 | 環田 | 環田 | 環田 | 環田 |
| 장구모양 | | 腰鼓田 | | | | 腰鼓田 | |
| 북모양 | | 鼓田 | | | | 大鼓田 | 腰鼓田 |
| 변형 북모양 | | 三廣田 | | 三廣田 | 三廣田 | 三廣田 | |
| 굽은자모양 | | 曲尺田 | | | | 曲尺田 | 曲尺田 |
| 엽전모양 | | | 錢田 | | 錢田 | 錢田 | |
| 기타 | | 箭苦田 | 箭翎田 八角田 | | 欖形田, 圭併弧 矢, 五不 等田, 六角田, 八角田 | | 欖形田, 句股弧矢合 併田, 箭苦田 箭翎田 六角田, 八角田 |

Table 1. Names of Figures in some mathematical texts; 여러 산서에서의 도형의 이름

4 慶善徵(1616-?)의 默思集算法과 면적법

慶善徵은 取才에 합격(1640)하여 籌學入格案에 올랐다. 취재에 합격하면 戶曹의 會士로 임명된다. 正九品 訓導(훈도, 1669년), 從六品 教授(교수, 1674년)로 戶曹에서 算員으로 일하였고, 1676년 從六品 活人別提(활인별제)가 되어 醫學(의학) 계통에서 일하였다. 그의 자손들은 산원보다 雜科(잡과)인 醫科(의과)에 많이 합격하였다. 그의 조카는 九一集(1824)의 저자인 洪正夏(1684-?)의 외조부이다[5].

崔錫鼎(최석정)과 洪大容은 慶善徵이 당시 최고의 수학자라고 기술하고 있지만, 算學啓蒙의 마지막 두 장을 연구하지 않았고 17세기 중엽 이후 가장 중요한 조선 산학자들의

관심사인 天元術은 崔錫鼎과 마찬가지로 그의 책에서 전혀 취급하지 않았다[3].

默思集算法은 慶善徵이 從六品 教授로 있으면서 산원들의 교육을 위하여 저술한 것으로 보인다. 이 책은 상(天), 중(地), 하(人) 세 권으로 구성되어 있으며, 수의 명수법, 단위, 환산, 비례법, 수열, 사칙계산, 연립일차방정식, 2, 3차 방정식 등 다양한 분야의 문제 총 400개를 다루고 있다[9].

慶善徵은 默思集算法에서 면적에 관한 내용은 증권의 田畝形段門(전무형단문)에서 다루고 있는데 위의 중국산서 세 권에서 넓이에 관한 문제의 유형을 택하여 모두 24 문제를 다루고 있다[8].

문제 1부터 문제 10은 대체로 詳明算法의 순서를 따르고 있다. 특히 문제 8의 眉田은 楊輝算法, 算學啓蒙에는 나타나지 않지만 詳明算法에는 있는 문제이다. 또 문제 7의 牛角田은 詳明算法에서는 眉田 다음에 취급하였고 구하는 방법이 같았는데 이는 牛角田을 眉田의 반으로 여긴 것으로 보인다. 慶善徵은 넓이를 구하는 방법을 詳明算法과 같은 방법으로 구하면서 순서를 바꾸어 놓고 그림도 잘못 그려 놓았다. 문제 10의 半月田(반월전)은 詳明算法에서 覆月田(복월전)이라 하고 반원을 나타내는데 楊輝算法, 算學啓蒙에서는 弧田(호전)이라 하고 실제의 문제는 반원을 다루었다. 이에 반해 慶善徵은 문제 9에서 반원이 아닌 弧矢田을 취급하고 있다. 이 문제는 算法統宗의 문제와 일치하는데, 나머지 문제들을 보아 慶善徵이 算法統宗을 실제로 접하지는 않은 것으로 추정된다.

문제 11부터 문제 14까지는 楊輝算法의 문제의 유형들로 문제 13을 제외하면 나머지는 주어진 조건만으로 넓이를 구할 수 없는 경우이다. 문제 11에서는 腰鼓田(요고전), 문제 12에서는 大鼓田(대고전), 문제 14에서는 三廣田(삼광전)을 다루었는데 이들은 한 변을 공유하는 두 사다리꼴을 붙여놓은 것으로 두 높이의 합만 주어져 있는 경우이기 때문에 지금의 우리들의 눈으로 보면 해결할 수 없는 문제이다. 두 사다리꼴의 높이가 같은 것으로 하여 넓이를 구하는 방법을 그대로 인용한 것이다. 실제로 楊輝는 三廣田의 문제에서 가운데 너비가 정중앙에 있을 때에만 이 풀이법을 쓸 수 있고 너비가 한쪽으로 치우쳐 있을 때에는 두 부분으로 나누어 사다리꼴의 넓이로 구해야 착오가 없을 것¹⁾이라는 언급을 하였다. 미루어 짐작컨대 慶善徵은 楊輝의 의견대로 너비가 한쪽으로 치우쳐 있을 때에는 두 부분의 사다리꼴의 넓이로 나누어 구하는 것으로 하고 두 사다리꼴의 높이가 같은 경우에 대하여서만 문제를 해결한 것으로 보인다.

문제 13의 曲尺田(곡척전) 문제는 慶善徵이 楊輝와 같은 문제를 다루기는 했지만 자신만의 방법을 모색한 자취가 보인다. 楊輝는 曲尺田을 높이가 같은 두 직각사다리꼴의 빗변을 붙여 놓은 것으로 보고 넓이를 구하였다.²⁾ 楊輝는 曲尺田의 너비가 모두 같지 않을 경우는

1) 三廣田乃小梯田一段下闊相抵或遇此等田勢中闊在正中可用此術中闊若偏近一頭祇得作兩段求庶不錯誤

2) ((안쪽둘레 + 바깥둘레) × 너비) / 2

三廣田에서와 같이 두 개의 사다리꼴로 나누어 구해야 한다고 하였다. 경선징은 楊輝와 같은 방법으로 기본적인 해법을 주었지만 두 직각사다리꼴의 빗변을 붙여 놓은 것으로 본다는 설명은 없이 楊輝의 계산법을 풀어서 설명하였으며³⁾ 두 부분의 너비가 다른 경우에 대해서는 언급을 하지 않았다. 그 외에 다른 두 개의 별해를 첨가하였는데 첫 번째는 기본적인 해법을 다른 방법으로 설명한 것⁴⁾이지만 두 번째 별해⁵⁾는 너비가 (바깥둘레 - 안쪽둘레)/2와 같았기 때문에 성립하는 방법이고 일반적인 방법은 아니다. 우연인지 모르겠으나 楊輝와 慶善徵이 다른 曲尺田의 문제에서는 너비가 (바깥둘레 - 안쪽둘레)/2와 같았다.

문제 15부터 문제 24까지는 算學啓蒙을 주로 인용한 것이다.

문제 15부터 문제 20까지는 三斜田(삼사전), 圓田(원전), 錢田(전전), 정사각형의 밭(方田) 가운데에 둥근 연못(內有圓池周)이 들어있는 경우를 다루었는데 특히 원이 나오는 부분에서는 근삿값으로 古率(고율, 3)을 사용한 결과만을 보였다. 문제 21부터 문제 23에서는 π 의 근삿값으로 古率, 徽率(휘율, $\frac{157}{50} = 3.14$), 密率(밀율, $\frac{22}{7}$)을 사용하여 세 가지 방법으로 원의 넓이를 구하여 비교하는 문제를 다루었는데 算學啓蒙에서는 田畝形段門의 環田 문제에서 이들 세 종류의 원주율을 다루고, 하권 開方釋鎖門 문제 26에 이들을 사용한 원의 넓이가 들어 있다.

문제 24에서는 環田을 다루었는데 圓田과 마찬가지로 세 가지 방법을 모두 보여 주었다. 이 중에서 古法 해법은 楊輝의 방법과 같은데 楊輝는 ‘가운데 둘레와 바깥 둘레를 사다리꼴의 윗변과 아랫변으로 보고 두께를 사다리꼴의 높이로 보고 사다리꼴의 넓이로 구하는 것’⁶⁾이라고 설명하였고 慶善徵은 다른 표현으로 ‘긴 것은 자르고 짧은것은 보충하여 직사각형의 밭을 만드는 것’⁷⁾이라고 말하였지만 의미는 楊輝와 같은 것으로 보인다.

5 洪正夏(1684-?)의 九一集(1724)과 면적법

洪正夏는 조선 산학에서 가장 뛰어난 산서로 여겨지는 九一集의 저자이다. 1706년 取才에 합격하고 1718년 訓導, 1720년 教授가 되었다. 九一集은 모두 9권으로 이루어져 있는데 1권부터 8권이 본문으로 1713년 이전에 이미 완성되고 9권 雜錄을 더하여 1724년에 九一集을 완성하였다.

九一集의 면적법도 一卷 田畝形段門에서 모두 29문제를 다루었다. 慶善徵과 같이 算學啓蒙에서 제목을 따왔다.

3) (안쪽둘레/2) x 너비 + (바깥둘레/2) x 너비

4) ((바깥둘레 + 안쪽둘레) x 너비) / 2

5) (바깥둘레/2)² - (안쪽둘레/2)²

6) 環田中周卽梯田之上廣 環田外周卽梯田之下廣 環田徑步卽梯田之長步 環田本法併中外周而半之以徑乘之梯田之法併上下廣折半以長乘之可通用也

7) 比卽截長補短作直田量也

문제 1부터 문제 6까지는 方田(방전), 直田(직전), 圭田, 梭田, 梯田(제전)을 다루었는데 특이한 것은 方田, 즉 정사각형의 대각선이 d 일 때 넓이가 $\frac{d^2}{2}$ 임을 이용하여 문제를 해결하였다. 楊輝는 田畝比類乘除捷法の 하권 첫 번째 문제에서 五曹算經(오조산경)의 잘못된 문제에 대하여 언급하면서 이 점을 이용하였는데 洪正夏는 이러한 형태의 문제를 하나의 문제로 독립시켜 다루었다. 즉 대부분의 산서에서는 方田의 한 변의 길이가 주어진 경우만 다루었고 算法統宗에서 方田의 대각선의 길이가 주어진 경우를 다루었는데 洪正夏도 이 문제를 포함시켰다. 또한 梯田의 두 평행인 변을 다른 산서와 달리 大頭(대두), 小頭(소두)라 하였다.[九章算術에서는 舌廣(설광), 踵廣(종광)이라 하였고 默思集算法에서는 東闊(동활), 西闊(서활)이라 하였다. 여기에서 廣이나 闊은 변의 길이를 나타내는 용어인데 洪正夏는 頭를 사용하였다.]

문제 7에서는 四不等田(사부등전)을 다루고 있는데 이미 楊輝가 잘못된 풀이법이라고 한 五曹算經의 방법을 그대로 쓰고 있다. 楊輝는 田畝比類乘除捷法の 하권 세 번째 문제에서 五曹算經의 四不等田의 풀이 방법이 잘못되었다고 하였으나 그마저도 사각형의 네 각 중의 한 각이 직각이라는 잘못된 가정을 가지고 설명하였다. 算法統宗에는 네 각 중의 한 각이 직각인 四不等田의 넓이를 정확히 구한 문제가 있는데 洪正夏가 왜 이를 참고하지 않았는지 의문이다.

문제 8부터 문제 10까지는 圓田을 다루었는데 慶善徵과 같이 古圓(고원), 徽圓(휘원), 密圓(밀원)으로 지름(d)과 원둘레(l)의 비, 즉 π 를 정확히 이해하고 있음을 보여 주었다.

문제 11에서는 弧矢田을 다루었는데 覆月田과 같은 방법이라는 것을 나타내고, 넓이를 구하였다.

흥미 있는 사실은 算法統宗과 같이 弧矢田의 弦(현) c , 矢(시) s 일 때 원의 지름(d)을 구하는 문제를 첨가하였다. 九章算術 句股章(구고장) 문제 9의 방법을 사용하여 $\frac{d}{2} - s$, $\frac{c}{2}$, $\frac{d}{2}$ 를 높이(股), 밑변(句), 빗변(弦)으로 가지는 직각삼각형에서, 股弦較(고현교) ($\frac{d}{2} - (\frac{d}{2} - 2) = s$)와 밑변을 알고 빗변을 구하는 방법을 사용하여 $d = \frac{(\frac{c}{2})^2}{s} + s$ 를 구하는 방법⁸⁾과 함께 $d = \frac{(\frac{c}{2})^2 + s^2}{s}$ 를 별해로 넣었다. 아직 이 방법을 나타낸 산서를 찾지 못하였는데 洪正夏가 별도로 찾아낸 방법일 가능성이 많다.

句股術을 사용하여 $d^2 = ((\frac{c}{2})^2 + s^2) + ((\frac{c}{2})^2 + (d - s)^2)$ 에서 바로 위의 별해를 얻어내었을 가능성도 있는 것으로 추정된다.

程大位는 算法統宗에서 위의 방법으로 지름을 구하고 이를 이용하여 원의 넓이를 구한 다음 현을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 빼 나머지 넓이의 $\frac{1}{4}$ 로 弧矢田의 넓이를 구할 수 있음을 보였으나 洪正夏는 인용하지 않았다.

문제 12는 三斜田(삼사전)의 문제로 算學啓蒙 田畝形段門 문제 13과 같은 풀이를 하였는데 算學啓蒙의 문제는 직각삼각형이 되어서 오히려 三斜田이라기 보다는 句股田(구고전)의 문제로 보인다. 洪正夏의 문제는 三斜田임에는 틀림이 없으나 세 변의 길이로 보았을 때 가운데

8) 算法統宗 卷 3, 7, 12에 걸쳐서 세 차례 다름

높이가 문제에 주어진 보수가 될 수가 없다. 어쨌든 기본적인 풀이 방법은 맞았는데 추가로 넣은 또 하나의 방법은 직각삼각형이 아니기 때문에 쓸 수 없는 방법이다. 가운데 높이가 잘못된 값으로 주어졌기 때문에 큰 변과 가운데 높이로 구한 넓이와 가운데 변과 작은 변으로 구한 넓이가 같아져서 두 가지 방법으로 구해도 된다고 생각하여 이러한 오류를 범한 것으로 생각된다.

모든 算書는 $\sqrt{2} \approx 1.4$ (方五斜七(방오사칠)), $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{6}{7}$ (正六面七(정육면칠): 한 변의 길이(面)이 7일 때 높이(正)가 6이라는 뜻)과 같은 근삿값을 사용한다.

洪正夏는 문제 13에서 正三角田(정삼각형)의 넓이를 다루면서 正六面七을 사용하였고 문제 21에서 정육각형의 넓이를 반으로 나누어 두 사다리꼴의 넓이의 합으로 정육각형의 넓이를 구하는 과정에서도 正六面七을 사용하였다. 또한 문제 22에서는 方五斜七을 사용하여 정팔각형의 넓이를 구하였는데 이는 算學啓蒙의 方五斜七八角田(방오사칠팔각전)과 같은 방법을 사용한 것이다. 또한 다른 풀이 방법을 제시하였는데 이 방법은 정팔각형에 외접한 정사각형의 넓이에서 네 귀퉁이의 직각이등변삼각형 네 개의 넓이를 빼는 방법을 사용하였다. 이 방법에도 역시 方五斜七이 사용되고 있으며 算法統宗에서도 나타난 방법이다.

문제 14부터 문제 16은 算法統宗에 나타난 문제의 유형들이다.

문제 14에서는 眉田을 다루고 있는데 대부분의 중국의 산서의 특징대로 정확한 정의는 없지만 두 원의 호(두 호의 중점을 잇는 선 위에 두 중심이 있는 것으로 추정)로 이루어진 평면 도형을 나타낸다. 이 도형의 넓이를 구하는 방법은 詳明算法, 算法統宗, 默思集算法과 동일하였다. 두 호의 길이를 각각 c_1, c_2 라 하고 호의 중점을 잇는 선분의 길이가 h 인 眉田의 넓이를 $(\frac{c_1+c_2}{2}) \times \frac{h}{2}$ 로 정하여 계산하였다.

문제 15에서는 牛角田을 다루었는데 다른 산서들과 달리 洪正夏는 眉田의 두 중점을 이어 만들어진 합동인 두 도형 중 하나라는 의미로 形如半眉(형여반미)로 정의하였다. 楊輝의 牛角田의 넓이 계산은 算法統宗의 것과 다른 것이고 楊輝가 구한 넓이는 오차가 너무 큰 것이다.

문제 16에서는 算法統宗과 같이 欖形田(남형전)을 다루고 있는데 이는 합동인 두 弧矢田을 합해서 만들어진 도형(形如二弧矢田)이라고 설명하고 넓이를 구하였다.

문제 17에서는 腰鼓田(요고전)이라는 이름으로 넓이를 구하였는데 楊輝算法에서 腰鼓田은 장구모양의 도형을 말하고 九一集에서의 腰鼓田은 양휘산법에서는 鼓田(고전)이라고 구별하였다. 默思集算法에서는 이 도형을 大鼓田(대고전)이라고 하였다. 이 부분에서는 용어에 혼선을 빚었는데 慶善徵은 腰鼓田, 大鼓田, 三廣田을 구별하여 다루었지만 洪正夏는 모두 통틀어 腰鼓田이라고 한 것이 아닐까 짐작된다.

문제 18에서는 曲尺田을 다루었는데 慶善徵과 마찬가지로 너비가 같은 굽은 자 모양을 다루었고 넓이도 같은 방법으로 구하였다.

문제 19에서는 箭翎田(전령전)을 다루면서 箭苦田(전괄전)의 넓이도 같은 방법으로 구할

수 있다고 하였다. 楊輝는 반으로 나뉘어진 사다리꼴을 윗변을 서로 붙인 것은 箭苦田⁹⁾이고 아랫변을 서로 붙인 것은 箭翎田¹⁰⁾이라고 설명하였다. 이 도형들은 默思集算法에서는 다루어지지 않았다.

문제 17부터 문제 19까지의 세 문제는 楊輝算法에서와 같이 사다리꼴의 합으로 넓이를 구하였는데 默思集算法과 마찬가지로 두 사다리꼴의 높이가 같은 것으로 보고 넓이를 구하였다.

위의 牛角田의 문제에서 洪正夏가 算法統宗의 문제를 정확하게 인용하지 않아 문제가 생겼다. 算法統宗의 牛角田문제에서의 中長(중장)은 中依灣長(중의만장), 즉 두 호의 길이의 평균을 뜻하고 풀이에서 中依灣長을 간단히 中長이라 하였는데 洪正夏는 中依灣長이라는 용어를 문제와 풀이에서 모두 ‘中長’이라 하여 혼란을 일으켰다.

이외에도 算法統宗과 九一集에서 ‘中長’이라는 용어가 여러 곳에서 나타난다. 算法統宗에서는 梭田, 橢形田에서 가운데 높이 부분을 ‘中長’이라 하였고 三廣田에서는 가운데 너비 부분을 ‘中廣’이라 하였는데 九一集에서도 梭田, 橢形田, 箭翎田에서 가운데 높이 부분을 ‘中長’이라 하였고 腰鼓田에서는 가운데 너비 부분을 ‘中廣’이라 하였다. 이것을 보면 洪正夏는 程大位の 표현을 그대로 따랐다. 또한 洪正夏는 圭田에서도 삼각형의 높이를 ‘中長’이라는 용어로 나타냈는데 程大位는 圭田을 卽半梭(마름모꼴의 반)이라 하고 삼각형의 높이를 ‘中正長’이라는 용어로 나타내었다. 이 때문에 앞에서 언급한 대로 程大位の 圭田만이 이등변삼각형으로 보이는 것이며 洪正夏는 용어를 사용함에 있어 부주의했던 것으로 보인다.

문제 20은 밑변과 높이가 같은 직각삼각형인 句股田에 弧失田을 합한(句股弧失合併田) 것인데 이는 四分圓(사분원)이 되어 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 로 계산하였다. 그러나 이 弧失田의 모양에 따라서는 四分圓이 되지 못할 수도 있다는 점은 간과하고 있다.

문제 23은 算學啓蒙에서 다른 環田을 慶善徵과 같이 古率, 徵率, 密率을 이용하는 세 가지 방법으로 구하였다.

문제 24부터 문제 29까지는 環田의 넓이에서 1차방정식을 구성한 것이다. 洪正夏가 九一集을 저술한 가장 큰 이유는 방정식론인데 1차방정식을 넓이를 이용하여 구성하였다. 洪正夏는 九章算術과 같이 넓이를 사칙연산의 응용으로 다른 산서와 달리 상권에서 다루었다.

6 결론

산서에서 도형의 넓이를 구하는 문제는 토지와 관련하여 중요한 문제였기에 가능한 여러 가지 경우의 도형을 많이 다루려고 하였다. 九章算術, 楊輝算法, 算學啓蒙, 詳明算法, 算法統宗 등의 중국산서들을 보면 후대에 쓰여진 책일수록 더 많은 형태의 도형을 다루고 있는데 慶善徵과 洪正夏를 비교해 보아도 九一集에서 더 다양한 형태의 도형을 다루었다. 또한 원의 넓이의

9) 原此田勢乃是半梯田一段上關相連

10) 原此田勢乃是半梯田一段下關相連

문제에서 古率, 徽率, 密率을 이용하거나 洪正夏가 넓이에서 1차방정식을 구성한 것을 보면 넓이를 이용하여 수학적인 목적을 이루려는 노력이 보인다.

慶善徵은 半月田과 弧矢田을 따로 다룬 반면 洪正夏는 弧矢田만을 다루었으며 慶善徵이 腰鼓田, 大鼓田, 三廣田, 曲尺田을 모두 다룬 반면 洪正夏는 腰鼓田과 曲尺田, 箭翎田(箭苦田 포함)만을 언급하였는데 算法統宗에서는 三廣田만을 언급하고 나머지는 두 개의 사다리꼴의 넓이의 합으로 구하는 것의 영향을 받아 구하는 방법이 같은 경우는 생략한 것으로 보인다.

또한 洪正夏는 算法統宗에서와 같이 橢形田, 句股弧矢合併田(算法統宗에서는 圭併弧矢), 六角田(육각전), 八角田(팔각전), 즉 정육각형, 정팔각형 등을 더하였다.

慶善徵은 반원과 반원이 아닌 弧矢田을 구별하여 다루었으며 洪正夏는 弧矢田 문제를 중국의 산서와 같이 다루면서도 나름대로의 새로운 방법을 추가하였다. 넓이를 구하는 방법은 대부분 중국산서들에서의 방법을 그대로 사용하여 오류를 범하기도 하였지만 慶善徵과 洪正夏 모두 나름대로의 새로운 방법을 모색하고 있었음을 알 수 있었다.

오늘날 우리의 초, 중 고교에서의 수학교과서에서 도형의 넓이에 관련된 단원에 우리의 산학자(수학자)들이 다룬 내용들을 도입 부분에 넣고 설명한다면 동, 서양의 학문적 차이가 없으며 오히려 어떤 면에서는 우리 선조들이 더 앞선 생각을 하였음을 강조할 수 있어 어린 학생들의 수학을 보는 시각도 많이 달라질 것이다. 이러한 면에서 이 논문에서 다룬 넓이 문제뿐만이 아니라 여러 부분에서 여러 우리 산학자들의 업적을 현재의 교육현장 등에서 사용할 수 있도록 발굴하는 노력이 필요할 것으로 보인다.

감사의 글 이 논문의 주제에 관심을 가져주시고 많은 실수를 바로잡아 주신 홍성사 교수님께 감사드립니다.

References

1. CHO Tae Gu, *Ju Su Gwan Gyun*, Collection of the Historical Sources in the Science and Technology of Korea, Mathematics Part 2, 1-199, Ryeongang Pub. Co., 1985. 趙泰考, 籌書管見, 韓國科學技術史資料大系, 數學篇, 卷二, 1-199, 驪江出版社, 1985.
2. CHOI SeokJeong, *Gu Su Ryak*, Collection of the Historical Sources in the Science and Technology of Korea, Mathematics Part 1, 369-704, Ryeongang Pub. Co., 1985. 崔錫鼎, 九數略, 韓國科學技術史資料大系 數學篇 卷一, 369-704, 驪江出版社, 1985.
3. GUO Shuchun ed., *ZhongGuo Kexue Jishu Dianji Tonghui Shuxuejuan*, Henan Jiaoyu Pub. Co., 1993. 郭書春 主編, 《中國科學技術典籍通彙》數學卷 全五卷, 河南教育出版社, 1993.
4. GYONG SeonJing, *MukSajibSanBeob*, Collection of the Historical Sources in the Science and Technology of Korea, Mathematics Part 1, 1-368, Ryeongang Pub. Co., 1985. 慶善徵, 《默思集算法》, 韓國科學技術史資料大系 數學篇 卷一, 1-368, 驪江出版社, 1985.

5. HONG JeongHa, *Gulljib*, Collection of the Historical Sources in the Science and Technology of Korea, Mathematics Part 2, 201–693, Ryeogang Pub. Co., 1985. 洪正夏, 九一集, 韓國科學技術史資料大系 數學篇 卷二, 201–693, 驪江出版社, 1985.
6. HONG Sung Sa, HONG Young Hee, LEE Seung On, Mathematical Structure of Joseon mathematician Hong Jeong Ha, *Journal for History of Mathematics* 27(1) (2014), 1–12.
7. HONG Sung Sa, HONG Young Hee, KIM Chang Il, Volumes of Solids in Joseon Mathematics, *Journal for History of Mathematics* 27(2) (2014), 101–110.
8. KIM Chang Il, HONG Sung Sa, HONG Young Hee, Chosun Mathematician Hong Jung Ha's Genealogy, *The Korean Journal for History of Mathematics* 23(3) (2010), 1–20. 김창일, 홍성사, 홍영희, 朝鮮算學者 洪正夏의 系譜, 한국수학사학회지 제23권 제3호 (2010년 8월), 1–20.
9. JIN Yuzi, KIM Young Wook, Chosun mathematics in the 17th Century and Muk Sa Jib San Beob, *The Korean Journal for History of Mathematics* 22(4) (2009), 15–28. 김옥자, 김영욱, 17세기 朝鮮算學과 《默思集算法》, 한국수학사학회지 제22권 제4호 (2009년 11월), 15–28.
10. YUN Hye Soon, Mathematics Educational Constructions and Structures in Suan Xue Qi Meng and Muk Sa Jib San Bub, *The Korean Journal for History of Mathematics* 25(4) (2012), 11–19. 윤혜순, 算學啓蒙과 默思集算法의 수학 교육적 구성과 구조, 한국수학사학회지 제25권 제4호 (2012년 11월), 11–19.