한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 2, 291-319, June 2014

Worked-out Example을 통한 중학생들의 수에 대한 학습[1)]

이일웅[2)] · 김구연[3)]

이 연구의 목적은 제곱근과 실수 단원에 대한 Worded-Out Examples을 활용하여 중학생들의 수학적 사고과정을 수학적 숙련도(mathematical proficiency)를 통해 규명하는 것이다. WOE는 “학생의 학습을 위하여 전문가의 풀이 과정을 상세히 제공하는 도구”로 학생들의 수학에 대한 과정과 구조의 학습을 돕기 위한 것이다. 이를 위해, WOE 문항을 개발하여 6명의 중학생들이 활용하도록 하고 2명의 학생을 대상으로 인터뷰를 실시하였다. 수집된 자료를 분석하였고 그 결과는 다음과 같다. 학생들의 사고과정은 이해한 내용을 활용하여 적절한 단계로 문제를 풀어가는 ‘이해 · 계산’, ‘계산 · 추론’, ‘이해 · 계산 · 추론’으로 나타났다. 또한 학생들 대부분이 ‘적용’하는 것에는 어려움을 겪는 것으로 나타났다.

주요 용어: 수학 학습, 수에 대한 이해, Worked-out Example, 수학적 숙련도

Ⅰ. 서론

우리들은 여러 분야에서 예(example)를 이용하여 설명하는 것을 쉽게 경험할 수 있으며 이를 이용한 교육은 우리에게 익숙하다. 수학 수업에서도 예와 예제를 활용하여 학생들의 학습을 돕고 있다. 수업에서 교사가 특정 수학 개념을 정의와 예를 들어 설명하고 예제를 풀이한 뒤, 그와 관련된 문제들을 학생들에게 제시하여 예제에서 이해한 내용을 적용하도록 하는 것을 발견할 수 있다.

지금까지 수학을 가르치고 발전시키는데 예를 이용한 방법은 중요한 역할을 해왔다(Bills & Watson, 2008). 또한, 예를 이용하여 학생들의 학습과 교사의 수업을 돕는 연구들이 많이 진행되어 왔다(Bills & Watson, 2008; Renkl, 1997; 1999; 2002; 2005; Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008; Zhu & Simon, 1987). 다양한 연구를 통해 발견된 예의 종류로는 정의를 통해 생성한 예, 예가 아닌 것(non-examples), 반례(counter-examples) 등이 있다(Goldenberg & Mason, 2008; Rowland, 2008; Zazkis & Leikin, 2008). 하지만 이러한 예들은 개념에 대한 이해와 사고의 확장을 돕지만 문제를 해결하는 능력과 과정적인 기술을 돕는 것에는 어려움을 가지고 있다.

National Council of Teachers of Mathematics[NCTM](2007)에서 제시한 수학과 교육과

---

1) 이 연구는 2011년도 서강대학교 교내연구비 지원에 의한 연구임(20110065).
2) 스와질랜드 Vusweni high school 인턴교사 (leerung21@gmail.com)
3) 서강대학교 (gokim@sogang.ac.kr), 교신저자

정 규준은 크게 내용 규준(contents standards)과 과정 규준(process standards)으로 이루어져 있다. 과정 규준은 문제해결(problem solving), 추론과 증명(proof and reasoning), 의사소통(communication), 연결성(connection), 표현(representation)으로, 이러한 과정 규준은 우리나라의 교육과정에 많은 영향을 주었다. 수학 교육에서 수학적 과정을 매우 중요하며 이는 2009 개정 수학교육과정의 성취 기준에서 학생 스스로 문제해결과정을 설명할 수 있어야 한다는 부분이 반복적으로 강조하는(교육과학기술부, 2011) 것으로 나타난다. 따라서 학생들의 문제 해결 능력과 기술을 돕기 위해서는 개념에 대한 예를 제시하며 동시에 해결 과정이 포함된 예제를 활용을 해야 한다. 예제를 활용하는 방법 중에는 기존의 예제 풀이보다 더욱 자세한 전문가의 풀이를 학생들에게 제공하는 Worked-out Examples[WOE]이 있다(Atkinson, Derry, Renkl, 2000; Van Gog, Paas & Van Merriënboer, 2004). WOE란 "학생의 학습을 위해 전문자의 풀이 과정을 제공하는 도구"(Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000, p.181)로 활용할 수 있으며, "전문가가 사용한 풀이와 함께 사용한 정보에 대한 '이유'와 '방법'을 포함"(Van Gog, Paas & Van Merriënboer, 2004, p. 87)한다. 다시 말해, WOE는 전문가의 풀이 과정을 포함한 예제로서 구체적인 개념과 풀이에 대한 '방법'과 '이유'를 제공하는 수업도구라고 할 수 있으며, 예를 문제와 같은 형식으로 제시하는 예제의 형태인 것이다. 이를 통해 학생들의 수학에 대한 과정과 구조의 학습을 도울 수 있을 것이다.

그동안 WOE의 효과성에 대하여 여러 연구에서 검증하여왔는데(Atkinson, et al., 2000; Tarmizi & Sweller, 1988; Zhu & Simon, 1987), WOE를 통해 학생들이 전문가의 사고 과정과 원리를 배워 자신의 것으로 만들 수 있다면 학생의 수학 학습 능력은 활발히 성장할 수 있음을 보이고 있다. 다양한 WOE에 대한 연구들이 학생의 학습에 미치는 좋은 방향과 효과를 말하고 심리적으로 접근하고 있지만 구체적인 수학 평가 도구를 사용하여 학습에 미치는 영향을 규명한 연구는 매우 희소하다. 따라서 이 연구에서는 WOE를 활용하여 중학생들의 수학적 사고과정에 대하여 살펴보고자 하는데, 이 사고과정을 수학적 숙련도(mathematical proficiency, National Research Council[NRC], 2001)를 통해 면밀히 탐색하고자 한다. 이를 위한 구체적인 연구문제는 다음과 같다. 즉, 제곱근과 실수 단원에 대한 WOE 문제지 학습을 통해서 학생들의 학습이 어떻게 변하며 수학적 사고과정은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학습을 위한 예(examples)

예(examples)는 수학에서 항상 중요한 역할을 해왔다. 그 결과 그것은 다양한 형태로 제시되어왔으며(Bills & Watson, 2008), Goldenberg & Mason(2008)은 다양하게 제시된 예들의 공간인 예 공간(example spaces)을 수학적 대상에 대한 분류거나 개념에 대한 경험이라고 규명하고 예 공간에는 내부의 구조가 있을 것이며 개념과 정리, 과정 등의 관련된 연결점들이 존재한다고 주장하였다. 특정한 예로서 정의를 통해 예를 만들고 분류하는 연구와 예가 아닌 것(non-examples)을 찾아 분석한 연구가 있었으며 예를 선택하고 사용하는 분류에 대한 연구가 있다(Rowland, 2008; Tsamir, et al., 2008; Zazkis & Leikin, 2008).

예에 대한 연구들(Bills & Watson, 2008; Goldenberg & Mason, 2008; Renkl, 1997; 1999; 2002, 2005; Rowland, 2008; Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008; Zazkis & Leikin, 2008; Zhu & Simon, 1987)의 공통적인 목표를 다음 세 가지로 정리할 수 있다. 첫째, 예와 관련된 연

구의 중요성을 알리기 위함이다. 교사가 학생들에게 예를 제시하였을 때 미치는 영향이나 효과를 알기 위해서는 다양한 연구가 필요하다. 또한, 다양한 연구를 통하여 예를 사용하는 방법이 발전된다면 학생들의 학습을 돕는 교사의 입장에서 많은 도움이 될 수 있다. 둘째, 수학을 학습하고 가르치는데 있어서 예의 효과적인 사용과 역할에 대해 주의를 집중시키기 위함이다. 수업에서 사용되는 예들을 분석하여 교사가 다양한 기준으로 예를 개발하고 수업에서 역할에 맞게 사용한다면 학생들의 개념 형성에 좋은 영향을 줄 수 있을 것이다(Bills & Watson, 2008).

또한 이를 더 연장하여 구체적이고 구조와 과정을 상세히 보여줄 수 있는 예제를 살펴볼 필요가 있다. 왜냐하면 학생들의 사고과정과 결과에 이르는 과정이 중요하며 평가에서도 학생의 수학적 사고력 신장을 위해서 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가해야하기 때문이다(교육과학기술부, 2011). 또한 학생들의 문제 해결 능력과 기술을 돕기 위해서는 개념에 대한 예를 제시하며 동시에 해결 과정이 포함된 예제를 활용을 해야 한다. 예제를 활용하는 방법 중에는 기존의 예제 풀이보다 더욱 자세한 풀이를 학생들에게 제공하고 전문가가 생각하는 풀이 방법과 방법에 대한 이유를 구체적으로 제시하는 Worked-out Examples[WOE](Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000; Renkl, 2005; Van Gog, Paas & Van Merriënboer, 2004)를 통해 학생들의 수학에 대한 과정과 구조의 학습을 도울 수 있을 것이다. 또한, 학생들은 문제 해결 단계에서 각 단계를 논리적으로 스스로 설명하고 근거를 밝힐 수 있으며, 이런 과정이 내면화 된 학생은 새로운 문제에도 적용할 수 있을 것이다(Zhu & Simon, 1987; Renkl, 1997; 1999; 2002).

WOE를 사용하는 수업에서는 교사가 정의, 정리, 규칙을 설명하고 WOE를 학생들에게 제공한 뒤, 이와 관련된 문제를 출제하여 이해한 내용을 적용하도록 한다(Renkl, 2005). 교사중심의 설명과 예제 풀이를 대신하여 WOE를 제공하고 학생 스스로 주어진 WOE를 통해 주도적으로 학습하도록 하는 것이 기존 수업과의 차이이다. 학생들은 수업에서 교사의 풀이나 교과서 예제의 풀이를 통해 학습을 한다. 교사의 풀이를 통해서 학습을 하는 경우 학생이 이해하지 못한 상황에도 수업 진도를 위해 풀이를 진행하는 경우가 있으며, 다른 학생들과 함께 수업을 듣기 때문에 이해하지 못한 부분을 질문하기 쉽지 않다. 교과서 예제의 풀이를 통한 학습은 정리된 풀이들을 간략하게 제공되기 때문에 구체적이지 않고 각 단계들을 뛰어넘는 경우가 종종 발견된다. 학생들의 능력은 모두 다르고 차이가 있기 때문에 위와 같이 수업을 따라오지 못하는 학생들이 발견된다.

WOE를 이용한 수업은 개념을 처음 학습하는 초보자들에게 매우 효과적인 학습 수단이 될 수 있다(Renkl, 2005). 즉, 초보자들에게 전반적인 예를 제공하여 수업을 진행하는 것도 중요하지만 WOE와 같은 전문가의 예제를 통해 학생들의 개념 이해를 돕고 문제를 해결할 수 있는 충분한 기회를 제공하는 것이 중요한 것이다. 이에 대한 WOE의 효과성은 많은 연구들을 통해 검증되었다(Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000; Tarmizi & Sweller, 1988; Zhu & Simon, 1987). 하지만 모든 WOE가 학생의 학습에 긍정적인 영향을 주는 것은 아니다. WOE가 구성되는 방법에 따라서 학생들에게 적절한 이해를 제공하지 못하거나 오히려 학습에 어려움을 줄 수도 있다. 이에 WOE를 통한 수업에서 효과적인 도움을 주기 위해서는 학생 스스로 이해한 내용을 설명해야 한다는 연구결과도 있다(Renkl, 1997; 1999; 2002). Renkl(2005)과 Shen & Tsai(2009)는 그동안 진행되었던 WOE 연구들을 바탕으로 WOE의 구성방법과 원리를 정리하였다. 각기 다양한 방법으로 WOE를 디자인하였으며, 이를 통해 각각의 특징을 파악할 수 있었다. 본 연구에서는 기초반 학생들을 위하여 문제해결 과정과 이유를 중요하게 생각하였다. 각 방법에 대한 이유를 제시하는 원리를 따랐으며, 스

스로 설명하는 원리를 추가하여 학생들이 이해한 개념을 확인 할 수 있도록 하였다.

Zazkis & Leikin(2008)은 특정 수학 개념에 대해서 이해한 내용을 바탕으로 예를 만들 수 있었다. 특히 예비교사를 대상으로 사각형의 정의를 이용하여 만들어진 예들을 필요조건과 충분조건을 이용하여 분석하였다. 연구자들은 위와 같이 정의를 이용하여 예를 만드는 것은 수학 개념과 연관된 이해와 수학적 사고력을 더욱 넓힐 수 있다고 말하였다. 또한, 만들어진 예들은 교사 혹은 학생들의 개념에 대한 이해를 통해 만들어지기 때문에 개념적인 이해와 밀접한 관련이 있다.

Tsamir, Tirosh & Levenson(2008)는 예가 아닌 것(non-examples)이 학생들의 개념 형성에 중요한 역할을 한다. 이 연구의 목표는 개념의 정의와 관련된 개념의 이미지를 형성하도록 돕고, 주어진 개념의 예들을 판단할 때 정의를 결정의 기준으로 사용하도록 만드는 것이다. 따라서 이들은 삼각형의 예가 아닌 것을 직관적으로 예가 아닌 것(intuitive non-examples)과 직관적이지 않으며 예가 아닌 것(non-intuitive non-examples)으로 나누어 분석하였다. 직관적으로 예가 아닌 것은 사각형, 육각형, 타원과 같이 학생들이 즉각적으로 예가 아님을 판단할 수 있는 예를 말하며, 직관적이지 않으며 예가 아닌 것은 오각형, 닫혀있지 않는 삼각형과 같이 주어진 예와 유사한 점들을 발견할 수 있고, 구별할 때 실수를 유발할 수 있는 예들을 말한다. 이를 통해 학생이 가지고 있는 개념 습득 수준을 나타낼 수 있으며, 학생의 중요한 지식을 파악할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. Rowland(2008)는 예는 학생들의 모든 수준에서 중요한 역할을 하며 효율적으로 사용해야 한다면서 예의 중요성을 재차 강조하고 있다. 특히 교사들에게 수업에서 각기 다른 역할을 하는 예들과 예를 선택하는데 있어 흔하게 발생하는 문제점들을 알 수 있는 구체적인 지도방법이 필요하다고 주장하면서 교사가 예를 사용하고 선택하는 방법을 4가지와 관련하여 분류하였다. 이들은 변수(variables), 연속성(sequencing), 표현(representations), 학습 목표(learning objectives)와 관련하여 분류하였는데 4가지의 방법은 각각 떨어져 있는 것이 아니며 상대적으로 두드러지는 특징으로 분류된 것이다. 이처럼 위 연구를 통해 학생들의 학습을 위한 교사의 예 선택과 사용이 학생들에게 어떤 영향을 미치는지 알 수 있었다.

지금까지 WOE를 통한 연구는 학생들에게 어떤 효과를 주는지에 대한 주제로 활발히 진행되어왔다(Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000; Tarmizi & Sweller, 1988; Zhu & Simon, 1987). 연구를 통한 WOE의 효과로는 문제 해결 단계에서 각 단계를 논리적으로 스스로 설명하고 근거를 밝힐 수 있고 이런 과정이 내면화 된 학생은 새로운 문제에도 적용할 수 있다는 것이다. 또한, 일반적인 문제해결 과정보다 최소한의 단계로 이루어진 WOE는 더욱 더 효과적인 문제해결력을 보장할 수 있다(Zhu & Simon, 1987; Renkl, 1997; 1999; 2002). 하지만 모든 WOE가 효과가 있는 것을 말하고 있는 것은 아니다. WOE의 학습에 효과성을 높이기 위해 많은 연구자들이 연구를 진행하였다. Renkl(1997; 1999; 2002)에 따르면 WOE가 효과 있기 위해서는 학생 스스로 설명을 할 수 있어야 한다고 말한다. 또한, Trafton & Reiser(1994)은 컴퓨터 프로그래밍 안에서 예제와 문제를 사용하고 배치하는 방법에 대해서 연구하였는데 그 결과 그들은 예제없이 제시된 문제는 문제 해결을 이끌어주는 예제의 부재는 학생의 학습을 방해한다고 강조하였다. 또한, 학생들의 WOE를 통한 학습이 가장 효과적인 방법은 개념과 과정이 포함된 예제를 제시한 뒤, 바로 유사한 문제를 제시하는 것이라고 말하였다. 이뿐만 아니라 Van Gog, Kester & Pass(2011)의 논문에 따르면 전기회로에 대한 학습 중 WOE 예제만, 문제만, WOE 예제-문제, 문제-WOE 예제를 제시하였을 때, 기초반 학생들에게는 WOE 예제-문제가 가장 효과가 있음을 밝혀냈다.

2. 학생들의 무리수 개념에 대한 이해

현재 무리수는 중학교 3학년 '수와 연산'에서 다루고 있다. 중학교 3학년 교육과정 및 교과서는 제곱근의 뜻과 성질, 무리수, 실수의 대소 관계, 근호를 포함한 식의 사칙계산을 제시한다(교육과학기술부, 2011). 무리수의 정의에 따라 역사적 발생과 개념을 강조한 지도법에 대한 연구는 많으나 제곱근에 대한 학생들의 이해 정도에 관한 연구는 부족하다(김부윤 · 이지성, 2008). 학생들은 제곱근은 $\sqrt{\ }$가 있는 수라고 생각하는 것과 무리수의 정의를 근호를 써서 나타내는 수라고 생각하며(박윤희 · 박달원 · 정인철, 2004), 대부분의 학생들은 유리수와 무리수, 실수를 올바르게 정의하지 못하고, 정수와 유리수, 무리수, 실수를 찾아내지 못하며, 특히 무리수의 개념을 매우 혼란스러워하는 것으로 나타났다(Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995). 구체적으로, 이를 통해 학생들은 무리수를 학습할 때 많은 어려움을 겪는 것을 알 수 있다. 나아가 의 연구 결과 유리수의 이해가 부족한 학생은 무리수에 대한 질문들에도 답을 제시하지 못하며 따라서 유리수에 대한 제대로 이해하지 못하면 이는 무리수를 이해하는 데에도 영향을 준다(Voskoglou & Kosyvas, 2011).

그렇다면 학생들이 무리수에 대한 이해를 돕기 위한 교사들의 역할은 무엇일까? Sirotic & Zazkis(2007a)는 학생들에게 무리수를 가르칠 때, 무리수의 다양한 예(examples)를 제공할 것을 제안하는데, 보편적인 예인 $\sqrt{2}$, π만을 알려준다면 학생들이 여러 가지 무리수를 배울 수 있는 기회를 놓칠 수 있으며 이것이 무리수 개념 학습까지 영향을 미칠 수 있다고 강조한다. 또한 교사들은 간단한 예나 학생들에게 친숙한 예들로 시작하는 것이 바람직하며 이때 학생들의 오류나 오개념들을 고려하는 것이 중요하다(Zodik & Zaslavsky, 2008). 교사는 학생들이 종종 실수하는 $\sqrt{50}=2\times\sqrt{25}=2\times5=10$과 같은 오류에 대해서 $\sqrt{50}\neq2\times\sqrt{25}$를 알 수 있도록 해야 하며 $\sqrt{4^2+3^2}\neq\sqrt{4^2}+\sqrt{3^2}$과 같은 계산 실수에 대해서도 같지 않다는 것을 강조해야 한다. 학생들이 무리수의 개념을 정확히 학습하기 위해서는 다양한 예의 제시 및 활용이 필요하다.

3. 수학적 숙련도(mathematical proficiency)

학생들의 수학 학습에 있어서 필수적인 요소들이 있는데, 수학적 숙련도(mathematical proficiency)로 규명된다(NRC, 2001). 이는 다섯 가지 요소들이 서로 밀접하게 연결된 것으로, 개념적 이해(conceptual understanding), 계산(procedural fluency), 적용(strategic competence), 추론(adaptive reasoning), 태도(productive disposition) 등이다. 이 요소들은 각각 독립적인 것이 아닌 상호 의존적이며 연관되어 있다. 이 다섯 가지 구성요소들을 자세히 살펴보면 다음과 같다.

NRC(2001)에 따르면, 이해(conceptual understanding)란 수학의 개념, 연산, 관계 등에 대한 개념적 이해를 의미한다. 개념적 이해를 통한 학습은 수학 주제와 아이디어들을 개념적 연결성 안에서 이해하기 때문에 개념을 쉽게 기억할 수 있게 한다. 계산(procedural fluency)이란 능숙하게 절차를 수행하여 정확하고 효율적으로 계산하는 것을 의미하며, 절차적 지식을 언제 어떻게 그리고 정확하게 사용할 수 있는지를 판단하고 수행하는 능력이다. 적용(strategic competence)은 주어진 문제를 전략적으로 해결할 수 있는 역량에 대한 것으로, 문제를 전략적으로 공식화 또는 형식화하며 이를 수학적으로 표현하여 해결할 수 있느

냐에 관한 요소이다. 추론(adaptive reasoning)은 논리적으로 생각하여 설명하고 풀이를 정당화하는 능력으로 개념과 상황 사이에 관계에 대한 연결성에 수학적 추론과 그에 맞는 이유 또는 근거를 제공할 수 있는 능력을 의미한다. 마지막으로 태도(productive disposition)란 수학에 대한 적극적인 태도 및 성향을 의미하는 것으로, 수학을 의미 있고, 유용하며 가치 있는 학문으로 인식하며 성실하게 수학을 공부하면 자신의 능력이 향상될 수 있음을 믿는 태도를 말한다.

이러한 5가지 구성요소는 학생들의 수학 학습에 강력하게 영향을 주는 것으로 수와 연산에 관련된 수학적 숙련도(mathematical proficiency)는 수학 분야와 수학 교육에서 중요한 토대이다(NRC, 2001). 이러한 주장에 대한 근거는 다음과 같다. 첫째, 수와 연산은 매우 추상적이기 때문이다. 무리수와 같이 실생활에서 찾아보기 힘든 수에 대한 개념 및 이러한 수들을 연산한다는 것의 개념은 각 구성요소들의 연결성 및 연관성을 통해 이해해야한다. 둘째, 학교 수학에서 수와 연산 내용은 수의 체계를 조직화하여 제시하며 이를 학생들이 의미있게 이해하도록 하기 위한 것이기 때문이다. 수 체계를 조직화하여 학생들에게 제공하는 것은 수의 확장을 알려주고 학생들의 수학적 구조와 체계를 세우는데 도움을 줄 수 있다. 셋째, 수의 연산은 수와 연산에 대한 개념적 이해와 함께 연산을 수행하는 데 있어 단계별 알고리즘을 필요로 하기 때문이다. 적절한 단계를 수행하는 계산과 마찬가지로 수와 연산은 다른 영역보다 구체적인 알고리즘이 필요하다. 넷째, 수와 연산은 대수, 측정, 공간, 통계 등의 수학의 여러 내용 영역의 기초가 되기 때문이다. 이런 배경 속에서 학생들의 수와 연산에 대한 학습을 수학적 숙련도(mathematical proficiency)로 파악한다면 학생들의 학습의 정도를 자세히 파악할 수 있을 것이다. 따라서 이 연구에서는 제곱근과 실수 단원의 내용을 WOE 문제지를 통해 학습할 때 중학생들이 겪는 수학적 사고과정이 어떻게 나타나는지 탐구하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

이 연구는 제곱근과 실수단원에 대한 Worked-out Examples[WOE] 문제지를 통하여 학생들의 학습이 어떻게 변화되었는지 알아보고, 학생들의 변화된 학습에서 나타난 영향을 National Research Council[NRC](2001)에서 제시한 수학적 숙련도(mathematical proficiency)를 통해 규명을 시도하는 것이다. 이를 위해 강서구 소재의 중학교 2학년 학생 6명을 대상으로 설문조사와 사전, 사후 검사, WOE 문제지를 이용한 수학 수업 및 인터뷰를 실시하였다. 학생들의 특징과 수학에 대한 태도를 알아보기 위해 간단한 설문조사를 실시하였고 사전검사를 통해 학생들의 기초 지식을 알아보았다. 그리고 겨울방학 3주간 WOE 문제지를 활용한 수학 수업을 5회 진행하였으며 이를 통한 학생들의 학습 효과를 알아보기 위해 사후 검사를 진행하였다. WOE 문제지만으로 파악하기 어려운 구체적인 영향을 규명하기 위해서 연구대상 중 2명을 선정하여 인터뷰를 실시하였다.

연구 대상은 강민중학교(가명)의 2학년생들 6명으로, 박나영, 박수영, 김동진, 박아름, 이지현, 김혜영(모두 가명)이다. 이 학생들은 강민중학교의 공부방 프로그램의 일원으로, 공부방 운영 목적은 교과 교육과 복지 두 가지였으며 담당 교사의 통제로 식사시간과 학업시간을

정하여 운영하였다. 구체적으로 공부방에서는 학생들에게 저녁식사를 제공한 뒤, 학생들 스스로 자율학습을 하도록 지도하거나 강사를 섭외하여 수업을 듣도록 하였다. 공부방의 강사는 봉사활동이나 서울시 교육청에서 시행하는 제도인 '동행 프로젝트'에서 선발된 대학원생 혹은 학부생이며, 제 1저자는 교생실습 기간을 포함하여 약 1년간 공부방 프로그램의 강사로 학생들을 지도하였다. 공부방의 수업은 소그룹 3-4명으로 학교 진도에 맞춰 복습을 하거나 내용 설명 및 학생 질의응답으로 이루어졌다. 이 연구를 수행하기 위해 먼저 WOE를 개발하였고 수정 및 보완이 이루어졌다. 이렇게 완성된 WOE는 강민중학교의 겨울방학 동안 운영된 공부방 시간에 활용되었다. 연구 대상 학생들의 WOE 문제지를 활용한 수업은 겨울방학 중 이루어졌으며 매주 2회, 3주간 총 5번 진행하였다. 또한, 강민중학교의 공부방 담당교사와의 인터뷰를 통해 공부방과 공부방 학생들의 전반적인 정보를 파악할 수 있었다. 학생들 대부분은 학교와 가정 내에서만 공부하며, 학교 내 정규 수업 이외로 방과 후 수업 및 공부방에만 참여하는 것으로 파악되었다. 단, 학기 중 공부방에 참석한 박수영의 경우 별도의 수학 과외를 받고 있었지만 학생이 방학 중 연구에 참여하고자 하여 연구 대상에 포함하였다. 이 연구의 목적과 방향에 영향을 줄 수 있는 외부적인 요인을 줄이기 위해 박수영이 받는 과외의 실제수업내용과는 다르게 하였다.

연구 대상 학생들의 수학 실력과 수학에 대한 태도는 다양하였다. 수학에 대해 흥미를 잃고 수학을 어려워하는 학생들이 있었으며, 반면에 자기주도적인 학습 습관을 가지고 수학에 적극적인 학생들도 있었다. 연구 대상 학생들을 중심으로 설문 조사를 시행한 결과 수학을 선호하는 학생은 1명뿐이고, 나머지 학생들은 보통 혹은 선호하지 않았다. 학생들이 수학을 선호하지 않는 이유로는 '어렵기 때문에', '공부해도 이해되지 않아서', ‘응용문제를 해결하기 어렵다.’ ‘계산해서 안 되면 하기 싫어진다.’, ‘그냥 싫다.’ 라는 응답이 있었다. 학생들의 기본적인 수학 실력은 상, 중, 하 각각 2명으로 나눠졌으며 인터뷰 대상은 WOE 문제지를 성실히 풀고 자신의 생각과 의견을 적극적으로 표현한 박나영, 박아름, 이지현(모두 가명) 학생을 선정하였다. 하지만 박아름의 경우 연구 후반 건강상의 이유로 마지막 수업과 인터뷰를 진행하지 못해 박나영, 이지현 2명만 인터뷰를 실시하였다.

2. 방법 및 절차

1) 사전, 사후 검사지

연구 대상의 기초 지식을 알 수 있는 사전 검사지는 교과서와 문제집을 참고하여 제작하였다. 사전 검사지는 총 20개의 문제로 구성되었으며 그 중 6개의 문제는 학생들의 기초 지식을 파악하기위해 중학교 1, 2학년 때 학습했던 정수, 유리수 단원으로 선정하였다. 정수와 유리수 단원은 제고근과 실수단원에 필요한 기초 지식을 파악하기 위함이므로 하 난이도 문제를 각각 3문항씩 제작하였다. 나머지 14개의 문제는 제곱근과 실수단원으로 선정하였다. 다양한 문제의 유형을 다루기 위해 학교에서 사용하는 한 종의 교과서와 두 종의 문제집을 참고하였으며 난이도는 상 난이도 3개, 중 난이도 7개, 하 난이도 4개로 제작하였다. 난이도 상, 중, 하는 일반적인 3단계 구분에 따른 것으로 교과서나 문제집의 난이도 구분도 참조하였다. 사전 검사지는 WOE 문제지와 동시에 제작되었으며 WOE 문제지를 기초로 사전 검사지의 문제를 선정하였다. 사전 검사지에 포함된 문제로는 정수의 표현, 정수와 유리수의

사칙계산, 제곱근의 정의와 성질, 제곱근의 성질 응용, 제곱근의 대소 관계, 유리수/무리수 찾기, 수직선과 유리수/실수, 집합과 실수, 실수의 대소비교 등이다.

사후 검사지는 사전 검사지를 기반으로 동형으로 제작하였다. 문제의 성격과 문제 개수, 검사 실시 과정, 난이도 등을 사전 검사지와 동일하게 선정하였으며 문제 상 지시문의 형태도 비슷하게 제작하였다. 사후 검사지의 목적은 사전검사와 비교했을 때 WOE문제지를 통한 학생들의 학습 변화를 파악하는 것이므로 사전검사를 진행할 때 학생들이 전혀 풀지 못했던 문제를 그대로 출제하였으며, 계산 문제는 숫자를 바꾸어 제시하였다. 또한, WOE 문제지를 해결한 학생들은 사후 검사지를 충분히 해결 할 수 있도록 문제를 선정하였다(표 III-1).

<표 III-1> 사전, 사후 검사 문항표

	사전검사			사후검사		
	문항 수	난이도	문항 번호	문항 수	난이도	문항 번호
정수	3문제	하(6)	1, 2, 3	3문제	하(6)	1, 2, 3
유리수	3문제		4, 5, 6	3문제		4, 5, 6
제곱근과 실수	14문제	상(3)	11, 19, 20	14문제	상(3)	11, 19, 20
		중(7)	10, 12, 13, 14, 15, 16, 17		중(7)	10, 12, 13, 14, 15, 16, 17
		하(4)	7, 8, 9, 18		하(4)	7, 8, 9, 18
합계	20문제			20문제		

2) WOE 문제지 제작

WOE 문제지는 중학교 3학년 '제곱근과 실수' 단원으로 제작하였다. 이 연구에서 사용된 WOE 문제지의 단원을 위와 같이 선택한 이유는 다음과 같다. 첫째, WOE 문제지를 통한 학습을 파악하기 위해 진도를 나가지 않는 단원을 선정해야 했다. 이미 알고 있는 단원을 선택한다면 학습의 변화를 찾기 어렵다고 판단하였다. 둘째, 개념과 과정을 보여주기에 제곱근과 실수 단원이 유용하였다. 학생들은 제곱근의 개념을 이해하고 적절한 절차를 사용하여 사칙 계산을 할 수 있어야하기 때문이다. 셋째, 학생들의 동기유발이 필요하였다. 중학교 2학년을 마무리하고 약 2주간 겨울 방학을 보냈던 학생들이 방학 기간 중 다시 학교를 나오는 것에는 많은 어려움이 있었기 때문에 예습을 목적으로 중학교 3학년 수학의 첫 단원인 제곱근과 실수 단원을 선정하였다.

WOE 문제지는 WOE와 이와 관련된 문제로 구성되어있다. WOE를 선정하기 위해 5가지의 개념(제곱근, 제곱근의 성질, 제곱근의 대소 관계, 무리수, 수직선과 실수)을 교과서에서 찾았으며 이에 대한 개념도(conceptual map)를 작성하였다. 작성한 내용을 정리한 뒤 각 개념에 대한 WOE를 선정하였다. 선정한 WOE를 학생들에게 제공할 때는 기본적인 정의와

개념을 문제 상황을 함께 제시하였다. 교사의 설명, 학생의 질문, 교과서 판서 등과 같은 학교 상황을 이용하였으며(그림 III-1), 학생들의 학습을 돕기 위해 시각적인 그림과 표를 적극적으로 사용하였다. 또한, 학생들의 문제풀이 과정과 개념에 대한 이해를 파악하기 위해 단순하게 답을 구하는 것이 아닌 답에 대한 이유를 묻는 형식으로 제시하였다(그림 III-2).

WOE의 풀이는 문제집의 풀이를 그대로 선정하지 않고 문제에 대한 해결 방법과 각각의 이유를 연구자가 자세히 풀어서 작성하였다. 해결 과정을 중심으로 설명하였으며 각 과정에는 풀이 방법과 이유를 항상 제시하였다. 또한, 학생들이 문제에 쉽게 다가올 수 있도록 딱딱하지 않고 친근하게 설명하려 노력하였다. 이전에 배운 개념에 대해서는 표를 설정하여 설명하였으며 그림과 함께 제시하여 이해를 도우려 하였다. 본 연구자는 다양한 접근과 발문을 통해 학생의 학습을 도울 수 있도록 다양한 발문들을 개발하였다. 발문의 내용으로는 ‘이런 질문 꼭! 해야 한다.(이렇게 질문할 수 있다.)’, ‘추가설명’, ‘이것도 알 수 있다.(이것도 알아야겠지?)’, ‘다른 방법으로 풀어 봅시다.’, ‘조심하세요!’, ‘복습합시다.’, ‘이렇게 생각하고 정리하자.’등이 있었다. 이러한 WOE를 해결하고 이해한 뒤, 개념과 과정이 동일한 문제를 해결하도록 제시하였다. 두 종의 문제집에서 제작된 WOE와 비슷한 문제를 선정하였으며 단계별로 구성하였다. 단, 비슷한 문제가 없는 경우 연구자가 문항을 개발하였다.

WOE와 문제의 개수는 기본 4개로 계획하여 선정하였지만 다양한 문제 유형이나 반복된 연습이 필요한 경우 WOE와 문제를 추가하였다. 그리고 문제 수가 부족하다는 학생들의 피드백을 받아 마지막 개념에서 문제를 추가하였다. 또한, 학생들이 제곱근의 성질에 대한 개념을 많이 어려워하여 WOE와 문제를 각각 3개씩 추가하였다. 이 3개의 문항은 단계별로 제시되었으며 학생들이 쉽게 이해하고 적용 할 수 있도록 자세한 설명을 제시하였다. 따라서 각 개념의 예제, 문제 개수는 제곱근 각 7개, 추가 문항을 포함한 제곱근의 성질 각 9개, 제곱근의 대소 관계 각 4개, 무리수 각 6개, 수직선과 실수의 예제는 4개, 문제는 7개이다(표 III-2).

예제2_제곱근

학습목표 : 제곱근의 정의를 이해하고 제곱근을 모두 구할 수 있다.

학교에서 제곱근을 공부하는 중 철수가 선생님께 질문하였다.

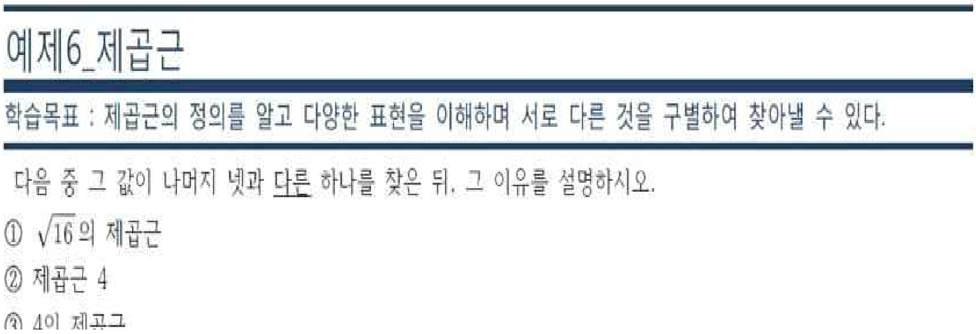
철수 선생님, 1, 4, 9, 16, ...등과 같은 수들은 1, 2, 3, 4, ... 등을 제곱해서 나올 수 있는데 2, 3, 5, 6, 7, 8, ... 등은 어떤 수를 제곱해야 나오는거에요?

선생님 좋은 질문이에요. 자, 칠판을 보세요.

$$x^2 = a, \quad \underbrace{x = \sqrt{a}}_{\text{(양의 제곱근)}} \quad \text{or} \quad \underbrace{x = -\sqrt{a}}_{\text{(음의 제곱근)}} \quad (\text{단}, a > 0)$$

철수말처럼 1이나 4, 9와 같은 숫자들은 같은 숫자를 두 번 곱해서 쉽게 찾을 수 있는데 2, 3, 5와 같은 숫자들은 찾기 어렵죠? 이런 고민을 수학자들도 했었는데 철수와 마찬가지로 찾기가 너무 어려웠어요. 그래서 수학자들은 위와 같은 기호를 만들게 되었어

[그림 III-1] 학교상황으로 제시된 Worked-out Example



예제6_제곱근

학습목표 : 제곱근의 정의를 알고 다양한 표현을 이해하며 서로 다른 것을 구별하여 찾아낼 수 있다.

다음 중 그 값이 나머지 넷과 다른 하나를 찾은 뒤, 그 이유를 설명하시오.

① $\sqrt{16}$의 제곱근

② 제곱근 4

③ 4의 제곱근

[그림 III-2] 이유를 설명하는 Worked-out Example

<표 III-2> 각 개념별 WOE와 문제 개수

중단원	소단원	번호	개념	개수	
				예제	문제
제곱근과 실수	제곱근과 그 성질	1.1	제곱근	7	7
		1.2	제곱근의 성질 (추가 문항)	6 (3)	6 (3)
		1.3	제곱근의 대소 관계	4	4
	무리수와 실수	2.1	무리수	6	6
		2.2	수직선과 실수	4	7
총 합				30	33

WOE 문제를 선정한 후에 현직 중학교 교사의 자문을 요청하였다. 이때 자문양식을 별로도 만들어 교사에게 요청하였는데, 제곱근, 제곱근의 성질, 제곱근의 대고 관계, 무리수, 수직선과 실수에 대하여 각 5회의 자문을 구했다. 자문 양식의 내용은 '주어진 문제의 좋은 점', '수정 및 보안 사항'으로 나누었으며 '수정 및 보안 사항'에서는 '전반적인 사항 및 흐름'과 '각 WOE와 문제에 대한 자문'으로 나누어 점검하였다. 자문 내용은 각 문항별 학습목표의 표현 수정 및 문항과의 연관성 점검, 지시문의 표현 수정, 풀이 상에서 수학적인 오류 발견, 적절한 기호사용 장려, 문제 형식 편집 방법, 오타 수정 등에 관한 것이었다. 이러한 자문 내용을 토대로 WOE 문항을 수정하고 수업에 사용하였다.

3) 인터뷰 질문지

WOE 문제지에서 파악하지 못한 학습의 영향을 구체적으로 알아보기 위해 인터뷰를 실시하였다. 이 인터뷰를 통해 학생들의 성향과 특징을 파악할 수 있었으며 구체적으로 WOE 문제지를 통해 학습에 미치는 영향을 살펴볼 수 있었다. 이 연구에서 사용한 인터뷰 주제는 문제에서 이해한 개념을 스스로 설명하는 부분과 문제의 난이도에 대한 부분, WOE 문제지에 대한 학생의 의견을 들을 수 있는 부분으로 구성되었다. 학생의 의견을 다양하게 물어보려 노력하였으며 인터뷰가 진행되면 될수록 학생의 반복되는 의견을 들을 수 있었다.

인터뷰는 WOE 문제지에 대한 학생의 설명으로 시작하였다. 인터뷰 대상 학생은 자신이 풀었던 WOE와 문제에 대해 한 번 더 생각하였고, 잘못 알았던 부분에 대해서는 연구자가 추가로 설명하였다. 다음으로는 각 문항의 난이도 및 수준에 대해서 질문하였으며 WOE 문제지를 통해 자신에게 미친 영향들에 대해서도 이야기 하였다. 인터뷰 마지막 질문은 WOE 검사지에 대한 학생들의 피드백으로 마무리 하였다. 주로 사용된 질문은 어떻게 이해하였는지, 왜 그렇게 생각하였는지, 앞 예제에서 제시된 풀이를 보았는지, 풀이를 통해 이해하는데 도움을 받았는지, 예제를 통해 문제를 푸는 것에 도움이 되었는지, 도움을 받았다면 어떤 부분에서 도움을 받았는지, 각 문항의 난이도는 어떤지, 주어진 WOE 문제지와 교과서 및 문제집을 비교하면 어떤지, 공부할 때 자신의 태도는 어떤지, WOE 문제지에 추가하고 싶은 내용 및 바라는 점이 있는지 등이다.

3. 자료 수집

자료 수집은 총 3단계로 구성되었다. 첫째, 사전검사를 통해 학생의 기초 지식을 파악하고 둘째, WOE 문제지로 3주간 5번의 수업을 진행한 뒤 셋째, 사후검사를 통해 사전검사와 비교하여 학생 변화를 파악한 뒤, 사후검사에서 드러나지 않은 학습에 미친 영향을 인터뷰를 통해 파악하였다. 사전검사를 진행하기 이전에 학생들에게 본 연구의 목적 및 취지에 대해 자세히 설명하였으며 학생들의 특징과 수학에 대한 태도를 파악하기 위해 간단한 설문을 진행하였다. 설문의 내용으로는 자신의 성적, 사교육 유무, 자신의 꿈과 수학의 관계, 수학을 좋아하는지, 좋아하는 과목과 그 이유, 싫어하는 과목과 그 이유, 수학과 문제에 대한 생각, 교과서 사용 유무, 교과서 예제를 풀어보는지, 예제의 풀이에 대한 학생의 생각 등이 포함되었다. 이를 통해 학생 스스로 자신의 태도를 점검하였으며 동시에 연구자는 연구 대상자들의 수학에 대한 태도를 파악할 수 있었다.

설문조사 후에는 사전 검사지를 이용하여 학생들의 기초 지식을 파악하였으며, 사전 검사 후에는 WOE 문제지를 이용하여 3주간 5회의 수업을 진행하였다. WOE 문제지에 각자의 이름을 적도록 하여 연구를 진행하는 과정에서 학생들의 변화 상태를 파악하였다. WOE를 활용한 수업에서 연구자는 학생들의 활동에 대한 정보를 기록하고 수업을 진행하며 관찰하여 학생들의 정보를 파악하였다. 1차시 수업은 각 50분씩 1, 2교시로 나누어 진행하였다. 각 개념에 대한 WOE 문제지를 1번부터 4번, 5번부터 끝번까지 두 부분으로 나누어 각 수업 시작마다 한 부분씩 나눠주었다. 각 수업은 도입, 전개, 정리로 진행하며 도입에서는 간단한 개념을 설명하고 전개에서는 학생들 스스로 문제를 해결하도록 한 뒤, 해결한 문제에 대해 발표하도록 하였으며 정리에서는 차시 예고 및 질문을 받았다.

WOE를 활용한 수업에서 연구자는 학생들의 활동에 대한 정보를 기록하고 수업을 진행하며 관찰하여 학생들의 정보를 파악하였다. 1차시 수업은 각 50분씩 1, 2교시로 나누어 진행하였다. 각 개념에 대한 WOE 문제지를 1번부터 4번, 5번부터 끝번까지 두 부분으로 나누어 각 수업 시작마다 한 부분씩 나눠주었다. 각 수업은 도입, 전개, 정리로 진행하며 도입에서는 간단한 개념을 설명하고 전개에서는 학생들 스스로 문제를 해결하도록 한 뒤, 해결한 문제에 대해 발표하도록 하였으며 정리에서는 차시 예고 및 질문을 받았다. 수업은 도입, 전개, 정리로 조직하였다. 각 수업의 도입 부분에서는 간단한 정의와 성질을 설명하는데, 개념에 대한 설명은 WOE 문제지 안에 자세히 되어 있어 간단히 설명하였다. 이어 수업의 전개

부분에서는 학생들 스스로 WOE 문제지를 읽고 이해하며 문제를 해결하였다. 이때, 학생들의 문제 해결 과정과 태도를 관찰 및 기록하며, 집중하지 못하거나 어려워하는 학생들에게 다가가 문제를 해결할 수 있도록 지원하였다. 다른 학생에 비해 문제를 빨리 해결한 학생에게는 다른 학생들을 위해 정숙하게 하거나 한 번 더 WOE 문제지를 점검하게 하였다. 시간이 부족한 학생들에게는 추가 시간을 허락하고 학생들이 발표하는 시간이 부족하지 않도록 해결하지 못한 경우에도 학생 문제 풀이를 멈추게 하였다..

학생 문제 풀이가 끝나면 학생의 학습을 더욱 효율적으로 돕기 위해 학생 설명을 진행하였다. WOE 문제지를 통해 해결한 예제와 문제를 함께 점검하면서 문제를 어떻게 풀었으며 어떻게 이해했는지 발표자를 자발적으로 지원받아 발표하도록 하였다. 자원자 학생이 모든 예제와 문제를 발표한 경우도 있었으며, 여러 학생이 돌아가며 발표하는 경우도 있었다. 하지만 고정 인원만 발표하는 경향이 있어 수동적인 학생들을 참여시키기 위해 대답하게 하거나 칠판 앞에 나와서 설명하도록 하였다. 발표자가 발표를 진행하는 동안 발표를 듣는 학생들에게 궁금한 내용을 질문하도록 하였으며 발표를 이해하지 못하는 학생에게는 연구자가 옆에서 이해를 도왔다. 또한, 모든 예제와 문제에 대해서 설명하기에는 짧은 시간이므로 학생들의 반응을 살펴본 뒤, 예제와 문제 중 필요한 것들을 선택하여 발표하도록 하였다. 학생들이 설명한 내용이 부족하거나 다른 풀이가 있는 경우 연구자의 풀이를 추가로 설명하며 학생들의 이해를 도왔다.

예제와 문제에 대한 학생 설명이 끝나면 예제와 문제에 대해 전체적으로 정리하고, 차시 예고를 통해 수업을 마무리하였다. 수업을 마무리 한 뒤, 10분간 휴식한 뒤 2교시를 1교시와 동일한 방법으로 진행하였다. 단, 2교시에도 1교시에서 배운 개념에 대한 WOE 문제를 푸는 경우에는 동일한 개념이므로 수업 도입부분에서 개념 설명을 생략하였으며 그 시간을 학생 문제풀이 시간으로 활용하였다. 위와 같은 수업을 각각의 개념마다(제곱근, 제곱근의 성질, 제곱근의 대소 관계, 무리수, 수직선과 실수) 5번의 수업을 진행하였으며 모든 수업을 마친 뒤 다음 수업이 있던 차주에 사후검사를 실시하였다.

인터뷰는 대부분 WOE를 이용한 수업 이후에 진행하였으며 수업했던 장소에서 진행되었지만 학생의 상황에 따라 장소가 변경되거나 인터뷰가 연기되기도 하였다. 각 인터뷰 시간은 대략 30-40분이며 박나영은 5회, 이지현은 3회 실시하였다. 인터뷰 당시 학생들의 반응 및 패턴을 관찰, 기록하였으며 질문을 한 후 학생의 반응을 약간의 시간을 할애하여 기다렸다. 하지만 저자가 학생이 대답하기 어려운 상황이라 판단한 경우에는 주어진 예제(혹은 문제)에 대해 설명하며 인터뷰를 진행하였다. 각각의 인터뷰에서 하는 질문은 동일하였지만 단원별로 진행하였기 때문에 단원별 학생의 의견 및 이해를 파악할 수 있었다.

인터뷰는 WOE 문제지에 대한 학생의 설명으로 시작하여 각 문항의 난이도 및 수준에 대해서 질문들로 구성되었다. 구체적으로, WOE 문제지를 통해 자신에게 미친 영향은 무엇인지, 어떻게 이해하였는지, 왜 그렇게 생각하였는지, 앞 예제에서 제시된 풀이를 보았는지, 풀이를 통해 이해하는데 도움을 받았는지, 예제를 통해 문제를 푸는 것에 도움이 되었는지, 도움을 받았다면 어떤 부분에서 도움을 받았는지, 각 문항의 난이도는 어떤지, 주어진 WOE 문제지와 교과서 및 문제집을 비교하면 어떤지, 공부할 때 자신의 태도는 어떤지, WOE 문제지에 추가하고 싶은 내용 및 바라는 점이 있는지 등에 대한 질문들이다.

4. 자료 분석

6명의 학생을 대상으로 사전, 사후검사와 WOE 문제지를 통한 수업을 3주간 5회 진행하였다. 이 중 학생 2명을 선정한 뒤 인터뷰를 진행하였으며 담당 교사와의 인터뷰를 통해 연구 대상의 정보를 파악하였다. 6명의 사전, 사후 검사지와 WOE 검사지를 모두 수거하였으며 이를 분석하였다. 사전, 사후 검사의 결과 분석을 위하여 통계 프로그램 SPSS Statistics Version 19를 이용하였다. 각 문항을 5점으로 20문항, 100점 만점으로 사전, 사후 검사 점수를 채점하였다. 결과의 신뢰도를 높이기 위해 채점 기준표를 만들어 각 문항을 채점하였다. 그리고 사전, 사후 검사에 많이 사용되는 대응표본 t-test를 사용하여 정리된 점수에 대한 평균과 표준편차, t값, 유의확률을 구하였다. 학생들의 점수와 산출된 결과 값들을 통해 WOE 문제지를 이용하여 학습의 변화가 일어났는지 파악할 수 있었다.

수집된 인터뷰 자료의 분석은 다음과 같은 과정을 거쳤다. 먼저 인터뷰 녹음 파일은 녹취록으로 작성되었으며, 학생의 말 뿐만 아니라 행동과 표정까지 담으려 노력하였다. 녹취록은 대화의 키워드 혹은 주제를 선정하여 문단을 나누어 주제를 정리하였으며 문단의 내용을 반복적으로 확인하였다. 이를 통해 키워드 중심의 반복되는 학생들의 패턴을 발견하였으며 이를 코드로 만들었다. 학생 1명의 녹취록을 먼저 읽고 각 문단의 키워드 또는 주제들을 찾아 가능한 코드로 설정하였다. 이렇게 설정된 코드들은 코드북(code book)으로 정리 및 조직되었고, 이 코드들로 전체 녹취록을 문단별로 코딩하였다. 코딩을 마친 후, 같은 코드 별로 다시 자료를 분류하여 각 코드 안에서 반복적으로 드러나는 패턴 및 주제를 파악하였으며 이를 코드로 만들었다. 이러한 코드 설정, 코딩, 패턴 및 주제 찾기 과정을 거치는 동안 저자들 간의 논의 및 합의를 통해 신뢰도와 타당도를 높이려고 노력하였다.

같은 코드에 대한 각 학생의 단락을 분석 문단으로 정리한 뒤, 서로에게 부족한 키워드 혹은 동일한 코드간의 관계를 살펴본 뒤, 교차로 비교(cross checking)하며 분석하였다. 모든 인터뷰의 코드를 설정한 뒤, 코드 북의 정의와 한 번 더 비교하며 필요한 부분을 수정하였다. 두 학생 모두 인터뷰공백, 학생문제풀이(이해, 추론, 적용, 계산, 태도), 문항해석, 연구자설명, 학생특징, 학생배경, 학생의견, 문항난이도, 학생피드백으로 모두 9가지 코드(학생문제풀이를 각각으로 보면 12가지 키워드)로 분석하였으며 인터뷰 내용 중 연구와 상관없는 단락을 인터뷰공백으로 설정하여 사실상 8가지 코드로 분석하였다.

학생문제풀이를 NRC(2001)에서 제시한 수학적 숙련도(mathematical proficiency)로 나누었다. 이는 이해, 추론, 적용, 계산, 태도로 분류되는데 각각에 대한 정의와 세부목록을 정리하였으며, 정의들이 부족하거나 명확하지 않을 때는 정의를 추가로 보안하였다. 이를 이용하여 학생문제풀이를 설정하였지만 위의 5가지의 개념은 독립적이고 분리된 것이 아닌 상호유기적이므로 코드가 중복되는 문단이 많았다. 그리고 코드로 나누었던 단락을 학생이 풀었던 WOE 문제지와 비교하여 다시 한 번 점검하였다. 이렇게 분석한 박나영과 이지현의 녹취록을 코드를 중심으로 강조되거나 반복되는 부분을 정리하였다. 또한, 두 학생의 공통점과 차이점을 발견하려하였고 이러한 차이가 있는 이유를 학생의 학습 방법이나 학생 특징을 통해 알아내려 하였다. 위와 같은 방법으로 분석된 결과를 다음 장에서 자세히 제시하도록 한다.

Ⅳ. 결과

1. WOE를 통한 학생들의 학습 변화

사전, 사후 검사를 통해 학생들의 학습의 변화를 알아보았다. 이를 통계프로그램 SPSS Statistics Version 19를 이용하여 분석한 결과 6명의 연구 대상 중 5명의 학생이 사전검사보다 사후검사 점수가 높았으며, 대응표본 t-test로 분석한 결과 신뢰도 95%에 유의확률 0.025로 유의미한 결과가 나왔다. 사전검사의 평균은 100점 만점에 28.42점이었으며 사후검사의 평균은 49.92점으로 2배가량 점수가 올랐다는 것을 알 수 있다. 100점 만점에서 6명의 평균이 50점이 안 된다는 것은 학습의 많은 변화가 있었다고 볼 순 없지만 사전검사의 표준편차(11.91)에 비해 사후검사의 표준편차(22.18)가 증가하여 학생 간의 편차가 더 커졌다는 것을 알 수 있었다(표 Ⅳ-1, 그림 Ⅳ-1).

위와 같은 통계적인 결과를 문항을 통해 자세히 살펴보면 중학교 1, 2학년 사전 지식을 묻는 1번부터 6번까지 문제는 대부분의 학생들이 해결하였지만, 몇몇 학생들은 계산을 실수하거나 해결하지 못하였다. 박아름과 김동진을 제외한 모든 학생이 사전검사보다 사후검사에서 1번부터 6번까지의 문제를 더 많이 해결하였다(그림 Ⅳ-2). 또한 사전, 사후 검사에서 기초지식은 편차가 크지 않았지만 제곱근과 실수를 묻는 7번부터 20번까지의 문제에서는 학생마다의 편차가 기초 지식보다 상대적으로 크게 나타났다(그림 Ⅳ-3). 이를 통해 학생들은 사후검사에서 기초지식보다 제곱근과 실수의 학습 변화가 많이 있었다는 것을 알 수 있다.

WOE를 통한 학생들의 학습의 변화를 학생별로 살펴보면, 박나영은 기본적인 제곱근의 정의(문제 7)와 성질(문제 8)을 알고 있었으며 다른 학생들과 비교하였을 때 사전검사 점수가 높았지만 제곱근의 정의와 성질을 제외한 문제에서는 다른 학생과 비슷한 수준을 보였다. 박나영은 사전검사에서 제곱근의 성질 응용문제(문제 11), 자연수 x를 포함한 제곱근이 자연수가 될 때 자연수 x 찾기(문제 12), 제곱근의 대소 관계를 이용하여 집합의 원소의 개수 구하기(문제 13), 무리수 찾기(문제 14), 집합과 실수(문제 15), 수직선에 무리수의 위치 표시하기(문제 16, 문제 17, 문제 19), 실수의 대소비교(문제 18, 문제 20)를 해결하지 못하였지만 사후검사에서 제곱근의 성질 응용문제와 수직선에 무리수의 위치를 표시하는 문제 2문제를 제외하고 구체적인 풀이를 이용하여 해결하였다.

이지현도 박나영과 마찬가지로 제곱근의 정의와 성질에 대한 사전 지식을 가지고 있었지만 자세한 이해보다는 전반적인 정의만을 암기한 상태였다. 사전검사에서는 계산 실수로 제곱근의 정의와 성질에 대한 문제를 틀렸지만 사후검사에서는 관련된 문제를 모두 해결하였다. 이지현이 사전검사에서 해결하지 못한 문제로는 박나영이 해결하지 못한 문제들과 a의 제곱근과 제곱근a에 대한 차이점 찾기(문제 9), 제곱근을 구했을 때 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 수 고르기(문제 10)가 있었다. 하지만 이지현은 사후검사에서 위의 두 문제(문제 9, 문제 10)를 모두 해결하였으며 박나영이 사전검사에도 해결하지 못한 제곱근의 성질을 응용한 문제를 해결할 수 있었다. 또한, 수직선에 무리수 위치를 표시하는 문제를 자신의 방법으로 해결하였다. 하지만 자세한 풀이와 근거보다는 자신의 계산 과정만을 보이고 있어 문제에 대한 학생의 이해를 파악하기 어려웠으며 무리수 찾기(문제 14)와 집합과 실수 문제(문제 15), 실수의 대소비교(문제 18)를 해결하지 못하였다. 풀이 중 정답만 제시한 문항들은 감점 처리하였으며 이후 인터뷰를 통해 학생의 수학적 사고과정을 자세히 파악하려고 하였다.

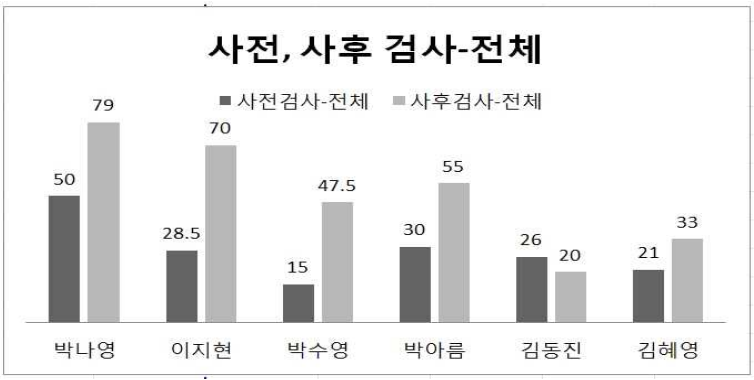
박수영과 박아름의 변화는 비슷한 수준으로 나타났다. 이들은 사전검사에서 제곱근의 정

의와 성질에 대한 사전 지식이 거의 없이 문제를 해결하지 못하였지만 사후검사에서 기본적인 제곱근의 정의와 성질(문제 7, 문제 8), a의 제곱근과 제곱근 a의 차이(문제 9), 자연수 x를 포함한 제곱근이 자연수가 될 때 자연수 x을 값을 찾기(문제 12), 제곱근의 대소 관계를 이용하여 집합의 원소의 개수 구하기(문제 13)와 같은 유형의 문제를 모두 해결하였다. 하지만 박수영은 제곱근을 구할 때 잘못 구하는 실수가 종종 발견되었으며 제곱근을 구했을 때 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 수 고르기(문제 10)를 해결하지 못하였다. 박수영보다 박아름의 점수는 높지만 전반적으로 두 학생은 미흡한 풀이과정이 공통적이었으며 무리수를 찾는 문제(문제 14)부터 마지막 문제(문제 20)까지 두 학생 모두 해결하지 못하였다.

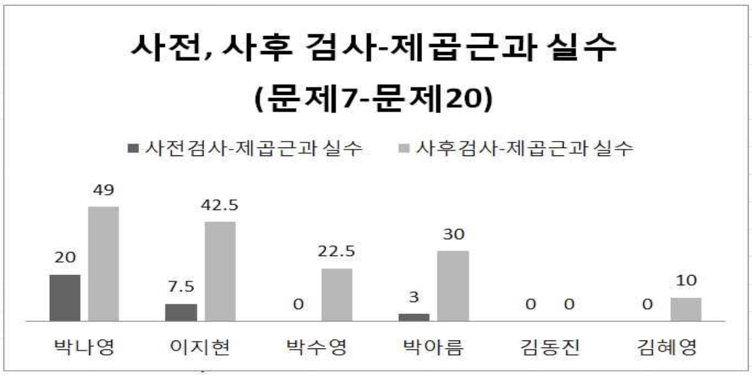
<표 IV-1> 사전, 사후 검사 결과

변수명	평균	표준편차	t값	p값
사전검사	28.42	11.91	-3.152	0.025
사후검사	49.92	22.18		

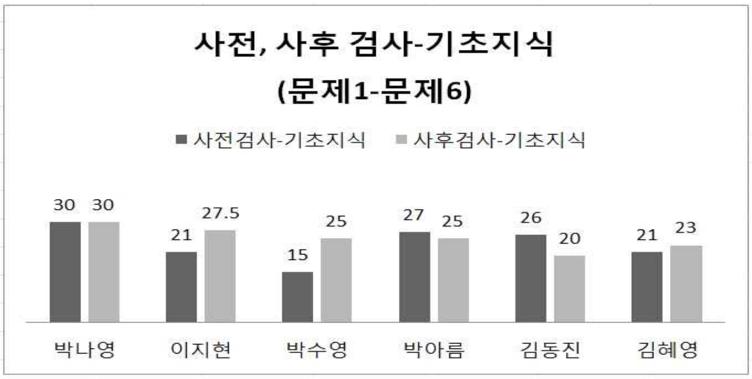
* $p<0.05$



[그림 IV-1] 사전, 사후 검사 - 전체 (문제 1-문제 20)



[그림 IV-2] 사전, 사후 검사 - 제곱근과 실수(문제 7-문제 20)



[그림 IV-3] 사전, 사후 검사 - 기초지식(문제 1-문제 6)

김혜영은 사전검사에서 제곱근과 실수 단원의 문제를 모두 해결하지 못하였지만 사후검사에서는 제곱근의 정의와 성질(문제 7, 문제 8)을 묻는 문제를 모두 해결할 수 있었다. 또한, a의 제곱근과 제곱근a에 대한 차이점을 묻는 문제(문제 10)에서 학생은 '모른다.'라고 소극적으로 답하였으며 이후 문제를 모두 해결하지 못하였다. 또한 김동진은 기본적인 제곱근의 정의에 대한 문제를 해결하지 못하였다. 김동진은 제곱근을 구하는 문제에서 양의 제곱근만을 구하였으며, 제곱근의 성질을 정확히 이해하지 못한 결과 $(-\sqrt{7})^2 = \sqrt{7}$, $(\sqrt{49})^2 = \sqrt{7}$ 등과 같이 답을 구하였다. 그리고 a의 제곱근과 제곱근a에 대한 차이점을 묻는 문제(문제 10)에서는 차이점을 발견하지 못하고 '같다.'라고 답을 하였다. 김동진은 사전검사보다 사후검사의 성적이 낮았으며 이러한 이유는 김동진의 풀이에서 드러나는 소극적인 태도와 1, 2학년의 지식을 묻는 문제를 사전검사보다 사후검사에서 해결하지 못하였기 때문으로 보인다.

2. WOE를 통한 학습자들의 사고과정-수학적 숙련도(mathematical proficiency)

사전, 사후 검사로 파악하기 어려웠던 학생들에게 WOE가 미치는 영향을 자세히 알아보기 위해 박나영 및 이지현을 대상으로 인터뷰를 실시하였다. 인터뷰 자료 분석 결과, 두 학생은 이해, 이해 · 계산, 계산 · 추론, 이해 · 계산 · 추론, 적용의 어려움에서 공통적인 특징을 나타내었다. 또한 수학적 숙련도(mathematical proficiency)의 각각의 규준은 분리되어 있지 않기 때문에 이해 · 계산, 추론 · 계산, 이해 · 추론 · 계산과 같이 복합적인 모습들을 발견할 수 있었다. 이해에 대한 영향을 파악할 수 있는 내용으로는 기본적인 개념을 바로 문제에 적용한 경우와 정의를 언급하며 문제를 해결한 경우가 있었다. 또한, 학생들이 공통적으로 이해를 하지 못한 경우를 발견하였으며 대체적으로 개념 자체는 이해하였지만 적용을 어려워하는 모습을 볼 수 있었다. 계산 · 추론에 대한 영향은 학생들이 사용하는 계산 단계에서 적절하고 올바른 근거를 사용하는 경우가 있었지만 두 학생이 제시하는 근거가 같을 때도 있었고 차이가 있는 경우도 있었다. 하지만 두 학생 모두 계산 과정에서 적절한 이유를 제시하였으며 관련된 문제를 잘 해결하였다. 마지막으로 이해 · 계산 · 추론에 대한 영향은 이전의 공통점인 계산 · 추론에서 부족했던 개념의 이해를 사용하는 방법이다. 개념의 이해를 먼저 적용한 경우도 있었으며, 계산 과정 중 추론과 동시에 적용한 경우도 발견할 수 있었다. 이러한 학생들이 보인 유사점과 함께 차이점에 대하여 다음에서 자세히 기술한다.

1) 이해

박나영과 이지현은 개념에 대한 이해를 통해 문제를 해결하였으며 단순히 제곱근의 정의를 외운 것이 아니라 제곱근의 의미를 파악하였다. 두 학생은 a의 제곱근을 '어떤 수 x를 제곱하였을 때 a가 나오는 수'로 암기하고 있었으며 정확히 이해하고 있었다. 박나영은 4의 제곱근을 $2\times2=4$, $(-2)\times(-2)=4$를 먼저 계산한 뒤, +2, -2를 찾았으며 이와 마찬가지로 이지현은 81의 제곱근을 $9\times9=81$, $(-9)\times(-9)=81$을 직접 구한뒤 이를 정리하여 +9, -9를 찾았다. 두 학생 모두 양의 제곱근을 먼저 구한 뒤, 음의 제곱근을 구하였으며 개념을 이용하여 쉽게 해결하였다. 특히 박나영은 양의 제곱근과 음의 제곱근을 함께 정리하며 4의 제곱근을 예를 들면서 8의 제곱근을 찾았다. 또한, 소수의 제곱근을 구할 때 계산이 용이하게 되도록 분수로 수정하여 문제를 해결하는 모습을 발견할 수 있었다. 제곱근을 구하는 문제에서 두 학생 모두 제곱근과 근호 사용을 서로 연결하여 생각했기 때문에 개념을 좀 더 쉽게 기억할 수 있었으며 문제를 해결할 때 음의 제곱근을 생각하지 못하는 결정적인 실수를 피할 수 있었다.

하지만 개념에 대한 이해가 부족하여 문제를 해결하지 못한 경우도 발견되었다. 두 학생은 위와 같이 무리수의 조밀성과 유리수의 조밀성, 실수의 연속성을 선택하고 판단하여 스스로 설명할 수 있었지만 관련된 문제를 해결하지는 못하였다. 참, 거짓을 판단하는 보기 중 "1의 가장 가까운 무리수는 $\sqrt{2}$이다."라는 명제를 학생들은 참이라고 판단하거나 '모른다.'고 응답하였다. 학생들은 유리수의 조밀성, 무리수의 조밀성, 실수의 연속성을 학습하면서 1, 2사이에는 무수히 많은 유리수가 있는 것을 알았으며, $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$사이에는 무수히 많은 무리수가 있는 것 또한 알았지만 1과 $\sqrt{2}$사이에 얼마나 많은 무리수(혹은 유리수)가 있는지 판단하지 못하였다.

박나영: (생략) 1은 $\sqrt{1}$이잖아요? 근데 $\sqrt{1}$에서 가장 가까운 무리수는 $\sqrt{2}$라는 건데... $\sqrt{1}$은 무리수잖아요? 여기서 무리수의 조밀성을 사용해보면 $\sqrt{1}$이랑 $\sqrt{2}$사이에는 또 무리수가 있을 텐데...여기서는 지금 가장 가까운 수가 $\sqrt{2}$라고 고집을 하니까 틀린 거죠.

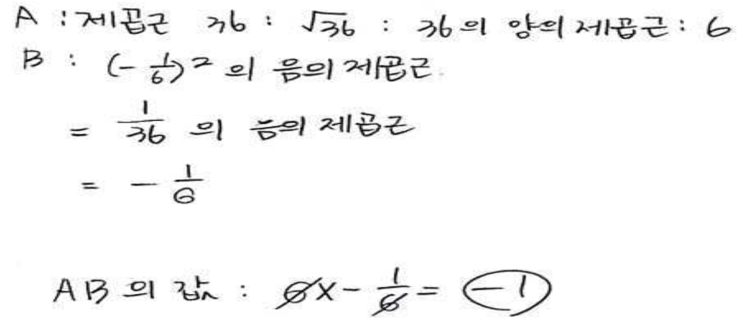
이지현: 1의 가장 가까운 무리수는요 $\sqrt{2}$가 아니에요. (생략) $\sqrt{1.1}$. $1=\sqrt{1}$이잖아요? $\sqrt{1}$과 $\sqrt{2}$에 무수히 많은 무리수가 있을 거 아니에요.

2) 이해 · 계산

이해를 이용하여 계산을 사용한다면 학생들은 더 쉽게 단계들을 사용 할 수 있고 실수를 줄일 수 있으며 개념을 오래 기억하도록 돕고 계산은 개념에 대한 이해력을 발전시키고 강화하는데 도움을 주며, 이해와 계산은 서로 상호작용을 통해 개념을 학습하도록 돕는다(NRC, 2001). 박나영과 이지현은 주어진 문제 '제곱근 36을 A, $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$의 음의 제곱근을 B라 할 때, AB의 값을 구하여라.'를 개념에 대한 이해와 적절한 계산과정을 통하여 문제에서 원하는 답을 구하였다. 먼저, 제곱근 a를 양의 제곱근으로 구하였으며 a의 음의 제곱근 또한 근호를 이용하여 구하였다. 이때 정확한 개념적 이해와 계산이 필요하며 두 학생은 이들

을 활용하여 문제를 해결할 수 있었다. 박나영은 제곱근 36을 36의 양의 제곱근이라고 한 번 더 작성한 뒤 6을 구하였으며, $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$의 음의 제곱근은 $\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$으로 계산한 뒤 $\frac{1}{36}$의 음의 제곱근 $-\frac{1}{6}$을 구하였다. 또한, 소수의 제곱근을 구할 때 박나영은 계산의 편의를 위해 소수를 분수로 바꿔 계산하기도 하였다. 이지현도 제곱근 36을 $\sqrt{36}$으로 표현한 뒤 $\sqrt{36}=6$을 구하였으며, 박나영과 마찬가지로 $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$의 음의 제곱근을 $\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$로 계산한 뒤 음의 제곱근을 구하였다. 적절한 단계를 사용하여 $A=6$, $B=-\frac{1}{6}$를 구한 뒤, 두 학생은 마지막 계산 과정에서 음수를 곱하였을 때, 괄호를 사용하지 않는 공통적인 특징을 나타내었다. 다른 상황에서도 두 학생 모두 음수의 경우 괄호를 사용하지 않는 특징을 보였다. 박나영, 이지현 모두 이해한 내용과 적절한 과정을 이용하여 문제를 해결하였다(그림 IV-4).

학생들은 제곱근의 대소 관계 단원에서 제곱근의 성질과 대소 관계를 묻는 문제에서 제곱근의 성질을 매우 어려워하였으며, 제곱근의 대소 관계는 매우 쉽게 생각하였다. 주어진 문제 '$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$를 간단히 만들어보세요.'는 대소 관계를 이용하여 제곱 안의 부호를 판단한 뒤, 제곱근의 성질을 이용하여 계산할 수 있는지를 파악하는 문제로다.



[그림 IV-4] 박나영 풀이_제곱근 문제 7번

제곱근의 성질과 제곱근의 대소 관계를 모두 이해해야 해결할 수 있는 문제이다. 두 학생 모두 $1-\sqrt{3}$의 부호를 대소 관계를 활용하여 음수로 판단($1<\sqrt{3}$)하였으며, $2-\sqrt{3}$의 부호 역시 대소 관계를 활용하여 양수($2=\sqrt{4}>\sqrt{3}$)로 판정하였다. 박나영과 이지현 모두 $1-\sqrt{3}=\sqrt{1}-\sqrt{3}$으로 수정하여 $\sqrt{1}-\sqrt{3}<0$이라는 결과를 유도하였으며 제곱근의 성질을 적용하여 정리하였다. 그리고 다른 값($2-\sqrt{3}$)도 마찬가지 방법으로 정리한 뒤 구해진 두 값을 계산하였다. 각각의 구체적인 단계를 통하여 제곱근의 성질을 적용하였으며 정확한 계산으로 문제에서 요구하는 답을 구하였다. 이를 통해 두 학생 모두 이해한 개념과 성질을 적절히 사용하여 문제에서 요구하는 답을 구한 것을 알 수 있다. 박나영과 이지현은 대소 관계라는 개념의 이해를 먼저 생각한 뒤 이해를 통해 적절한 단계와 계산과정으로 문제를 해결하였다.

제곱근 대소 관계를 확장하여 실수의 대소 비교 문제에서도 두 학생들은 이해를 바탕으로

단계별로 계산을 하였다. 개념적 이해는 익숙하지 않은 문제나 새로운 유형의 문제를 해결할 기초를 제공할 수 있었다. '다음 중 두 실수의 대소 관계를 나타내고 그 이유를 설명하세요. (1) $17-1$, $-3-\sqrt{5}$ (2) $-\sqrt{11}-1$, $-\sqrt{11}-2$' 라는 문제를 두 학생은 주어진 대소 비교 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있었다. 기본적으로 학생들은 두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0 \Rightarrow a>b$, $a-b=0 \Rightarrow a=b$, $a-b<0 \Rightarrow a<b$ 를 항상 기억하고 의미를 이해하며 문제를 해결하는 모습을 확인할 수 있었다. 이지현의 경우 이를 기억하기 위해 문제 상단에 직접 필기하고 이를 참고하여 문제를 해결하였으며 두 학생 모두 두 수의 차이를 구한 뒤 부호를 판단하여 대소 관계를 찾아내었다. 위 문제에서 두 학생은 개념적 이해를 바탕으로 계산한 뒤 두 실수의 대소 관계를 나타낼 수 있었다.

또한, 두 학생 모두 (2)번 문제에서도 (1)번 문제와 동일한 방법으로 문제를 해결하였다. 하지만 (2)번 문제는 $-\sqrt{11}$을 기준으로 각각 1과 2를 뺀 값을 비교하는 문제였으므로 당연히 $-\sqrt{11}-1$이 $-\sqrt{11}-2$보다 크다라는 사실을 발견할 수 있어야 했는데 두 학생 모두 개념적인 이해보다는 대소를 비교하는 방법에 집중하는 모습을 보였다. 개념에 대한 이해를 바탕으로 문제를 해결하려는 박나영도 직관적인 이해를 발견하기보다는 공식을 사용하여 풀었으며, 이지현도 이와 마찬가지였다. 특히, 박나영의 경우 문제를 모두 해결한 뒤 스스로 필기를 통해 개념을 확인하는 모습을 나타내었고 이를 통해 스스로의 사고 과정을 돌아보며 반성하였다.

3) 계산 · 추론

두 학생은 모두 계산에 대해 자신감을 보였다. 개념을 정확히 이해하였고, 계산을 진행하는 과정에서 이해한 내용을 적절히 사용하였다. 또한, 이들은 각 단계의 추론을 제시하며 단순한 계산과정을 보이는 것이 아닌 각각의 이유를 제시하여 문제를 해결하였다. 박나영의 경우 문제를 해결하며 각 단계와 근거를 제시하며 무리수가 순환하지 않는 무한 소수임을 발견하는 문제에서는 적절한 근거를 통해 $\sqrt{3}$의 범위를 찾아내었으며 각 단계의 빈 공간을 채웠을 뿐만 아니라 각 단계가 진행되는 이유와 근거를 풀이에 자세히 적었다. 또한, 이 학생은 $\sqrt{3}$의 소수 첫째자리를 구하는 다음 단계에서 '더 자세한 값을 알아본다.'라고 적으며 단계가 넘어가는 이유에 대해서 정확히 파악하고 있었고 $\sqrt{3}$의 소수 첫째자리를 구하기 위한 과정도 상세히 설명하였으며 이 역시 각 단계가 진행되는 이유와 근거를 자세히 기록하였다.

박나영: 이게, 일단은 $\sqrt{3}$을 소수로 나타낼 수 있는지 방법을 구하는 거잖아요? 그러니까 일단 근호를 벗겨내고 3만 가운데다 놓고 옆에 제곱수 두 개를 놔요. (생략) 그래서 3일 경우에는 여기 b에 들어가야 되는 게 $1\times1=1$이고 d는 $2\times2=4$가 들어가야 되는데, 우리가 구해야 되는 건 $\sqrt{3}$을 소수로 바꿀 수 있는지를 구하는 거니까 다 똑같이 근호를 씌워요 ($1<3<4 \Leftrightarrow \sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$). (생략) 똑같이 다 씌우고 나면 $\sqrt{1}$은 여기가 제곱수니까... 아! 제곱수로 만든 이유는 나중에 루트를 씌웠을 때 딱 나와야 하니까. (생략) 그래서 $\sqrt{1}=1$이니까 $a=1$이 되고, $\sqrt{4}=2$이니까 $c=2$가 되는 거죠. 그래서 $1<\sqrt{3}<2$이니까 ($\sqrt{3}$은) $1.xxx$가 나오게 되는 거죠.

이지현의 경우는 박나영과 마찬가지로 계산 과정에 대한 이유과 근거를 설명하였다. 이지현은 각 단계마다 대입해야하는 숫자를 정확히 구하였으며 근호를 씌운 뒤 정리하였지만 박나영에 비하면 이해한 내용에 대한 설명이 적으며 처음에 연구자가 질문하였을 때는 대략적인 과정만을 언급하였다. 연구자가 한 번 더 자세한 설명을 요구하였을 때 본인이 계산한 방법과 근거를 설명하였으며, 각 단계의 값들을 말할 때도 연구자가 물어보면 대답하였다. 이런 모습은 이지현의 반복되는 특징이다. 이지현은 적절한 과정과 계산을 통해 주어진 문제를 쉽게 해결하였으며 처음 위의 문제를 접하였을 때 어려워하였던 박나영과는 다르게 문제를 쉽게 해결하였다.

두 학생은 가로와 세로의 길이가 1cm인 정사각형의 대각선 길이를 구하는 과정에서 근거를 제시하며 설명하는데, 넓이가 $2cm^2$인 직사각형의 한 변의 길이를 $\sqrt{2}$로 구해야하는 문제에서 다음과 같은 근거를 제시하였다. 이지현은 중학교 2학년 때 배웠던 '정사각형의 중점을 연결하여 만든 사각형은 정사각형이다.'를 문제에 적용하였지만, 작은 정사각형의 넓이를 구하지는 못하였다. 하지만 곧 다시 계산하여 정확한 값을 구한 뒤, 한 변의 길이를 구하였다. 박나영도 이지현과 마찬가지로 사전 지식을 사용하여 설명하였으며 정리만을 사용하지 않고 정리를 증명하는 방법인 삼각형의 중점 연결 정리까지 제시하였다. 삼각형의 중점 연결 정리를 통해 정사각형의 중점을 잇는 도형이 정사각형인 것은 WOE에 제시되었다.

박나영: 이게요... 지금 제가 그린 사각형이요. 제가 그린 사각형의 넓이가 $8cm^2$ 잖아요? 맞나? (잠시 고민 중) 이게 1인가? 아, 그렇지. 1, 2니까 아! 8이 아니 구나. $2\times2=4cm^2$ 잖아요? 그리고 중점연결정리에 의해서 정사각형이 하나 더 만들어졌으니까 얘 넓이는 중점연결정리에 의해서 2잖아요. 그러니까 한 변... 이 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$가 되는 거잖아요? (생략)

4) 이해 · 계산 · 추론

수학적 숙련도(mathematical proficiency)는 각 규준이 서로 얽혀있으며 상호작용한다(NRC, 2001). 이해 · 계산 · 추론이 모두 발견된 특징을 살펴보면 학생들이 정의에 대한 이해를 바탕으로 적절한 단계와 이유를 제시한다는 것을 알 수 있다. 학생들은 제곱근의 정의, 대소 관계, 수 체계, 제곱수의 제곱근 등과 같은 정의의 이해를 통해서 계산하였으며 이를 추론에 사용하기도 하였다. 또한, 이들은 문제를 해결하는 근거로 정의를 사용한 경우도 있었다.

박나영은 $\sqrt{12x}$가 자연수일 때, 가장 작은 자연수 x의 값을 구하라는 문제에서 $\sqrt{a}$가 자연수가 되기 위해서는 a가 제곱수가 되어야한다고 말하며 제곱수의 제곱근 개념을 문제에 바로 적용하였다. 이 학생은 제곱수의 제곱근이 자연수로 표현된다는 것을 $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{16}=4$와 같은 예시를 들어 설명하였고 $12x=2^2\times3\times x$를 소인수 분해하여 제곱수로 만드는 자연수 x를 찾았다. 박나영의 사고 과정을 그의 풀이를 통해 살펴보면 가장 먼저 제곱의 제곱근이라는 성질에 대한 이해로 문제를 풀기 시작하고 소인수분해를 통해 단계와 계산으로 문제를 풀어 마지막에 소인수분해를 한 결과 $12x$가 제곱수가 되기 위해서는 3이 필요하다는 판단 근거를 제시하여 적절한 추론을 보여주었다. 또한, 개념의 정확한 이해는 $12x$가 제곱수가 될 수 있다는 사실을 발견하도록 도움을 주었다. 즉, 가장 먼저 개념의

이해로 문제풀이를 시작하였으며 이어 추론, 계산 과정을 통해 문제를 해결하였다.

박나영: $\sqrt{a}$가 자연수가 되려면 a의 값이 제곱수가 되어야 해요. 예를 들어서 $\sqrt{4}$는 2가 되고, $\sqrt{16}$은 4가 되는 것처럼. 그래서 얘 같으면 $\sqrt{12x}$잖아요? 그러면 얘가 자연수가 되어야한다고 하잖아요. 근데 자연수 x값을 구해야 한단 말이에요. $\sqrt{12x}$가 자연수가 되야 하기 때문에 $12x$가 제곱수가 되어야 하잖아요? 12를 소인수 분해하면 3×2^2이 나온단 말이에요. 근데 여기다 x값을 곱해줘야 되잖아요. 근데 2^2은 제곱수가 됐잖아요. 근데 3이 한 번 더 제곱이 되어야 된단 말이에요. 제곱수가 되기 위해선... 그래서 가장 작은 x의 값은 3이에요.

이지현은 개념에 대한 이해, 계산, 추론을 바탕으로 유리수와 무리수를 구별하는 문제를 해결하였는데, 먼저 무리수와 유리수 체계를 이해하였고 각각에 대한 근거를 제시하며 설명하였다. 이지현은 분수가 유리수인 이유는 정수가 아닌 유리수에 분수가 포함되었기 때문이며, 무리수에 정수를 더한 값도 여전히 무리수라는 것이라고 설명하였다. 또한, 이 학생은 π가 무리수임을 알고 있기 때문에 $-\pi$도 무리수라는 사실을 쉽게 생각할 수 있었다. 이지현은 제곱수의 제곱근과 관련된 문제를 제곱근의 성질와 계산을 사용하여 직접 구하였고, $\sqrt{\frac{1}{3}}$은 제곱근 밖으로 나오지 못하기 때문에 무리수라고 답하였다. 이지현은 추론의 과정이 다소 간단하지만 자신의 논리적인 생각으로 판단의 근거를 제시하였다. 이지현은 제곱수의 제곱근을 계산할 때는 제곱과 제곱근을 바로 지우는 자신만의 방법을 사용하여 문제를 해결하였지만 사용한 방법에 대해서 개념적인 이해보다는 기술적인 사용에 치중하여 문제를 빨리 해결하려는 모습을 보였다. 이는 박나영과는 다른 모습으로 두 학생의 차이점은 뒷부분에서 자세히 다룬다.

또한 박나영과 이지현은 수직선과 실수 단원에서 무리수가 대응하는 점을 찾는 문제 유형에 대해서 이해 · 계산 · 추론의 모습을 보였다. 주어진 문제를 해결하기 위해서는 각각의 무리수의 대략적인 값을 알아야하고 그에 대해 대응하는 점과 값을 일치시켜야한다. 주어진 무리수는 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $2+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{5}$로 각각의 대응되는 점을 찾을 때 대략적인 값을 추정해야 하는데 두 명의 학생들은 자신들의 논리를 사용하고 계산하여 문제를 해결하였다. 박나영은 $-\sqrt{7}$의 대략적인 값을 구하기 위해 $\sqrt{7}$의 범위인 $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$를 먼저 구하였으며 $2<\sqrt{7}<3$를 통해 $\sqrt{7}=2.\times\times\times$를 찾았다. 이 값에 음수를 곱하여 $-\sqrt{7}=-2.\times\times\times$를 구하였다. 이지현은 바로 $-\sqrt{7}$의 범위를 $-\sqrt{9}<-\sqrt{7}<-\sqrt{4}$로 찾은 뒤 $-3<-\sqrt{7}<-2$를 통해 $-\sqrt{7}$의 값을 단계별로 구하였다. 다른 값들도 위와 같은 방법으로 대응점을 찾았다. 박나영은 대략적인 수를 1.××× 혹은 2.×××로 언급하여 대응하는 점을 판단하였고, 이지현은 구간의 범위(A구간, B구간 등)로 판단하였다. 두 학생은 개념의 이해를 통해 추론을 하였으며 이러한 내용을 계산 과정에 적용하여 문제를 해결하는 것을 알 수 있었다.

5) 적용(문제해결)의 어려움

적용이란 문제를 수학적으로 공식화 할 수 있는 능력으로, 주어진 문제를 수식화로 표현

하고 이를 수학적으로 해결할 수 있는 능력이며 다양한 전략을 통해 문제를 해결할 수 있으며 이를 통해 학생들의 유연한 사고과정을 파악할 수 있다(NRC, 2001). 이 연구의 WOE 문제지에는 적용(문제해결)과 관련된 문항의 수가 적은데 그 이유는 문항 개발에 있어 학생들의 수준을 고려하였기 때문이다. 연구 대상 학생들은 다양한 수준의 학생들이 있었지만 대부분 기초반으로 학생들이었기 때문에 문제해결과 같이 다양한 풀이를 활용하는 문제를 출제할 경우 학생들은 어려워할 것이라고 예상하였다. 상대적으로 상위에 속했던 박나영과 이지현 두 학생에서도 나타났는데, 학생들에게 수직선과 실수단원의 대소비교에 대한 적용문제를 문제 상황과 함께 제시하였지만 문제를 해석하는 것부터 어려움을 겪는 것을 쉽게 알 수 있었다. 박나영은 주어진 문제 상황을 이해하지 못하였으며, 이지현도 마찬가지로 문제 상황과 대소비교를 연결하지 못하였다. 두 학생 모두 문제 상황에만 집중하였으며 문제 상황 안에 담겨있는 수학적인 내용을 이해하지 못하는 것으로 나타났다.

연구자: 모르겠어? 풀이 한 번 읽어보세요. (10초 후) 지금 수입이 $1+\sqrt{3}$ 이고, 지출이 3이야.
이지현: 대소비교는 알겠는데요... 여기서 대소비교를 할 수 있는 거에요?

하지만 연구자가 대소 관계와 문제와의 관계를 간단히 설명하자 학생들은 곧 이해하여 예제와 문제를 해결할 수 있었다. 그리고 두 학생 모두 설명을 듣고 문제를 해결한 뒤, 자신들이 생각했던 것보다 훨씬 쉽다고 말하였으며 학생 스스로 계산과정과 추론을 통해 설명할 수 있었다.

6) 태도의 차이

태도란 수학에 대한 인식과 습관적인 성향을 말하며, 태도를 통해 학생들의 이해, 계산, 적용, 추론이 활발하게 일어날 수 있으며 학생의 실력이 발전될 수 있다(NRC, 2001). 박나영과 이지현은 수학에 대한 각자 다른 인식과 태도를 가지고 있었다. 먼저 박나영과 이지현의 태도에 대한 가장 큰 차이점은 ‘주어진 WOE를 이해하려는 노력’이다. 박나영은 수식과 설명이 많아 읽기 힘든 경우에도 참고 성실하게 읽으며 주어진 WOE를 이해하려고 노력하였다. 또한, 박나영은 문제를 해결할 때 자신이 어떤 노력을 하였으며 문제를 해결하는 배경 상황을 자세히 설명하였는데, 2학년 때 배웠던 내용과 선생님의 필기 내용을 기억하여 진술하는 적극적인 태도를 보여주었다. 뿐만 아니라, 수학에 대해 재밌어하는 부분(수 체계, 방정식과 부등식, 함수 등)이 명확하였으며 이런 부분들이 학습에 긍정적인 영향으로 이어진 것을 짐작할 수 있었다. 박나영은 특히 좋아하는 개념에 대해서 주도적인 모습으로 이전에 배웠던 내용을 스스로 확인하였으며 이를 문제 해결 과정에 적용할 수 있었다.

반면 이지현은 자신이 필요한 경우에만 WOE를 확인하고 문제에 적용하였다. 이지현은 먼저 스스로 문제를 먼저 풀어본 뒤, 문제 해결이 어려운 경우 주어진 WOE의 풀이를 참고하여 문제를 해결하였다. 연구자가 WOE 검사지를 나눠주면서 WOE의 중요성을 언급하기 위해 WOE를 먼저 해결하고 문제를 풀라고 반복하여 설명하였지만 이지현은 한 문제를 집중하기보다 많은 문제를 해결하고자 하여 주어진 WOE를 모두 풀어보지 않고 풀이를 부분적으로 참고하는 방법으로 문제에 접근하였다. 이지현의 학습 방법이 한 문제를 오랫동안 깊이 살펴보기보다는 다양한 문제를 반복적으로 해결하는데 있었기 때문으로 추정할 수 있었다. 또한, 이지현은 대체적으로 수학을 좋아하였으며 문제를 스스로 해결하려는 모습도 발

견할 수 있었다.

두 번째 태도의 차이점은 '개념 중심과 문제풀이 중심의 학습방법'이다. 박나영은 문제를 개념 중심으로 접근하였다. 인터뷰를 진행하는 동안에도 개념을 사용하면 쉽게 풀 수 있는 문제를 다른 학생들은 공식을 암기하여 계산하는 것을 이해하지 못하였다. 또한, 박나영은 도형단원에서 단순히 공식을 암기하는 것에 답답함을 느끼며 선생님들까지도 당연한 거라고 설명하고 암기를 강요하는 부분에 대하여 매우 부정적인 견해를 표출하였다. 이런 모습과 함께 박나영은 개념과 공식의 각 단계를 적절한 논리와 근거로 이해하려는 모습을 드러내었고 항상 궁금증을 가지고 선생님께 질문하려는 태도를 나타내었다. 나아가 박나영은 간단한 문제는 단순히 공식을 암기해서 풀 수 있지만 어려운 문제나 새로운 개념은 단순한 공식 암기로 해결하지 못한다고 강조하였다. 제곱근의 성질 단원에서 정의를 이용하다가 정확히 적용하지 못해 문제를 틀린 경험도 있었지만 개념에 대한 지속적인 학습과 노력으로 문제를 풀 수 있었다. 인터뷰마다 박나영은 개념의 중요성을 반복하여 강조하였다. 또한 박나영은 개념만을 강조하는 것이 아니라 개념의 충분한 이해를 통한 공식의 사용에는 적극적이었으며, 충분한 이해 없이 단순히 공식만을 사용하면 개념에 대한 이해도 어렵다고 말하였다. 그러나 개념을 중요하게 생각하지만 박나영은 기호를 사용하여 표현한 정리(예,$a>0$, $\sqrt{a^2}=a\ \sqrt{(-a)^2}=a$)에 대해 어려움을 느끼며 개념으로 제시되지 않고 기호만으로 제시된 문제 해결을 부정적인 태도를 나타내었다. 이전에 $\sqrt{12x}$를 자연수로 만드는 문제를 풀기 위해 $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{16}=4$ 과 같은 제곱근의 성질을 이용하여 $12x$를 제시하였을 때 기호로 설명하는 경우에 개념에 대하여 제대로 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 제곱근의 성질을 어려워한 가장 큰 이유도 주어진 개념이 위와 같이 기호를 사용하여 제시되었기 때문이었다. 박나영은 개념에 대한 구체적인 예를 통해 학습하는 것을 선호하며 이를 이용하여 문제를 해결하기도 하였지만 기호로 제시된 개념은 어려워하였다. .

박나영: 저 이런 거($a>0$, $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$) 싫어요. 이런 거. (생략) 아니요. 그냥... (한숨 쉬며) 아, 정말 복잡해요. 이렇게 써 놓으면...
(2013. 1. 23 인터뷰 녹취록)

박나영: (생략) 확실히 그 개념에 대해서 이해를 하고 공식을 외우는 거지... 이해를 안 하고 공식을 그냥 외워서 시험 문제를 잘 풀고 더 빨리 풀기 위해서 공식을 외워서 푸는 건 아니라고 생각해요.
(2013. 2. 13 인터뷰 녹취록)

반면 이지현은 문제를 빠르게 해결하는 것을 목표로 개념과 과정보다는 공식을 선호하였는데, 문제를 해결하는 것을 중심으로 공식을 대입하거나 적용하였으며 주어진 개념과 과정을 이해하지 못하거나 어려워하기보다 간편하고 쉽게 적용할 수 있는 것을 선호하였다. 이지현은 주어진 여러 단계들과 다양한 방법들을 선호하지 않았으며 학생 스스로 판단하여 필요하다고 생각하는 정보들만 WOE의 풀이에서 선택하여 사용하였다. 특히, WOE의 경우 이지현 스스로 해결한 뒤 마무리 부분 혹은 답만 확인하였으며 확인한 뒤에는 다른 문제를 해결하였다. 이 학생은 무한 소수나 무리수의 개념을 묻는 문제보다는 제곱근의 정의나 성질을 이용하여 숫자를 풀고 정리하는 문제를 선호하였으며 스스로 풀기까지 풀이를 참고하지

않았다. 이러한 모습은 개념적인 이해의 부족함보다 이미 알고 있는 이해를 계산하고 풀이하는 것을 선호하는 이지현의 특징으로 볼 수 있다.

이지현: 아, 저는 그냥 단계 안하는데...이런거 쓸 시간에 다른 문제 풀죠.
(2013. 2. 1 인터뷰 녹취록)

이지현: 푸는 거요. 이런 건(개념에 대한 문제) 싫어요. (생략) 공식 외워서 이렇게 하는 게 (제일 좋아요).
(2013. 2. 13 인터뷰 녹취록)

7) 추론의 차이

두 학생 모두 문제를 해결하는 과정에서 자신의 논리로 근거와 이유를 제시하는 모습을 보여주었지만, 자신의 논리를 제시하는 방법에 차이가 있었다. 박나영은 자신이 이해한 내용을 구성하여 이야기하였으며, 인터뷰에 대한 대답을 할 때도 주도적인 설명을 하였다. 반면에 이지현은 개념적인 이해와 논리적인 근거를 모두 알고 있었지만 자신이 이해한 내용에 대한 설명이 구체적이지 못하였으며 인터뷰에 대한 대답도 종종 단답으로 제시한 경우가 많았다. 가장 기본적인 제곱근의 정의를 도입하는 부분에서도 박나영은 자신이 이해한 내용을 적절한 근거를 통해 끊임없이 설명하였지만, 이지현은 설명 중 생각하는 경우가 빈번했으며 자신이 이해한 내용을 설명하는 것을 매우 어려워하였다.
또한 박나영과 이지현은 이해한 개념에 대해 설명할 때 큰 차이를 드러내었다. 두 학생 모두 유리수의 조밀성, 무리수의 조밀성, 실수의 연속성을 이해하였다고 생각하였지만 박나영의 설명보다 이지현의 설명이 다소 부족하였다. 박나영은 자신이 이해하는 내용을 적절한 근거를 제시하며 이전에 배운 집합의 개념을 수직선과 연계하여 구체적으로 설명하였다. 실수는 유리수랑 무리수로 나눠지므로 유리수의 조밀성과 무리수의 조밀성을 합하여 실수의 연속성을 발견할 수 있다는 것을 정확히 파악하였으며 자신의 이해와 추론을 논리적으로 설명하였다. 반면 이지현은 이해한 내용 그대로를 한 번 더 언급하는 것으로 설명을 끝냈으며 논리적인 설명이나 이해한 내용에 대한 설명이 충분히 이루어지지 않았다. 인터뷰 마지막 부분에서도 이지현의 경우 유리수의 조밀성, 무리수의 조밀성, 실수의 연속성에 대하여 충분히 이해하였는지 파악하기 어려웠다. 이처럼 두 학생 모두 추론과 설명하는 과정을 발견하였지만 정도에 많은 차이가 있었다.

박나영: 이게요. 그러니까 실수는 아까 말했듯이 유리수랑 무리수로 나눌 수 있는 거잖아요? 세세한 부분은 아까 전에 나눴던 거고. 근데 이게 수직선에는 무한한 수가 있는 거잖아요? 이게 길이가 한정 되어 있는 것이 아니고 무한한 거니까. 그러니까 각 점에 어떤 수든지 그 한 점에 대응하는 것이 있는 거 에요. 그게 어떤 수든지. (생략) 무리수의 빈 공간들이 남는 거고 무리수가 들어가 있으면 유리수의 빈 공간들이 남는 거 에요. 그래서 얘는 이 수직선은 결국에 실수의 집합이라고 볼 수 있죠. 한꺼번에. 그렇죠. 하나당 대응하는 게 딱 하나씩 있으니까. 그래서 유리수의 조밀성은 당연한 거죠. 유리수 사이에 수많은 유리수가 있는 거고 무리수 사이에도 수많은 무리수가 있는 게 당연한 거잖아요. 그리고 실수는 유리수 무리수 합친 거니까 애네 둘이 맞으면 실수의 연속성도 당연히 맞는 이치구요.

이지현: (잠시 고민) '두 실수 사이에는 많은... 무수히 많은 실수가 있다.' (생략) 이거랑요. '두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.' 그 다음에 '두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.'랑 뭐더라... 유리수나 무리수로 그 수직선을 메울 수 없어요.

Ⅴ. 결론 및 제언

이 연구는 제곱근과 실수단원에서의 WOE 문제지를 통하여 학생들의 학습이 어떻게 변화되었는지 알아보고, 학습에 미치는 영향을 NRC(2001)에서 제시한 수학적 숙련도(mathematical proficiency)의 규준으로 규명하는 것이다. WOE 문제지를 통한 수업에서 나타난 학생들의 공통적인 영향은 정의를 이해, 이해·계산, 계산·추론, 이해·계산·추론, 그리고 적용의 어려움이 있는 것으로 나타났다. WOE 문제지를 통한 수업에서 나타난 학생들의 차이점은 학생 태도와 추론의 차이가 있었다. 위와 같은 분석 결과에서 나타난 특징을 기반으로 논의하고자 한다.

첫째, 박나영과 이지현을 제외한 학생들은 제곱근과 실수의 개념을 학습하기 이전에 사전지식을 파악하는 문제에서 자연수와 정수, 유리수를 구별하는데 어려움을 보였다. 정수를 고르는 문제에서 학생들은 0을 제외하거나 정수와 유리수를 구별하지 못하는 경우도 있었으며, 정수가 아닌 유리수를 발견하지 못하였다. 또한 자연수와 정수, 유리수를 구별하는데 어려움을 보인 학생 대부분은 무리수를 찾는 문제를 해결하지 못하였다. 이런 결과를 통해 자연수와 정수, 유리수의 수 체계에 대한 이해와 무리수의 이해는 연결되어 있다는 것을 알 수 있었다.

둘째, 학생들은 다양한 규준(이해 · 계산 · 추론)을 이용하여 문제를 해결할 수 있었다. 수직선 위의 무리수를 찾는 문제는 무리수와 수직선과 실수 개념에 해당되며 사전, 사후 검사지와 WOE 문제지에서 다루었다. 수직선에서 무리수를 발견할 때 대부분의 예비교사들은 기하적인 접근(Geometric approaches)과 대수적인 계산을 통한 접근(Numeraical approaches), 그리고 그래프를 활용한 접근(Function-graph approach) 등을 사용하였다(Sirotic & Zazkis, 2007). 마찬가지로 이 연구의 중학생들도 기하적인 접근(정사각형의 대각선과 원의 반지름을 이용하는 방법)과 대수적인 계산을 통한 접근(무리수의 범위를 이용한 방법)을 사용하여 무리수를 찾았다는 것을 알 수 있으며 기하적인 접근과 대수적인 접근을 동시에 이용하여 무리수의 위치를 표시할 수 있었다. 교사는 수직선과 실수에 대한 개념을 익힐 때 여러 가지 접근을 통해 다양한 규준들을 학생들의 학습에 적용할 수 있어야하며, 위와 같이 기하적인 접근과 대수적인 접근을 접목하여 다양한 방법으로 학생들의 학습을 지원하는 노력이 필요할 것이다.

셋째, 대부분의 학생들은 문제 상황과 함께 제시된 적용 문제를 어려워하였다. 그 이유는 문제 상황 자체를 이해하지 못하고 문제 속에 포함된 수학적 개념을 발견하지 못하였기 때문이었다. 학생들의 인터뷰 결과에서도 제시되었듯이 박나영은 문제를 해결하기 어려워하여 문제에 접근하지 못하였으며 이지현은 문제 상황 속에 포함된 개념을 발견하지 못하는 모습을 파악할 수 있었다. 따라서 교사들은 적용 문제의 WOE를 제시할 때 문제 상황을 해석하는 방법에 대해 전문가의 설명을 다양한 방법으로 추가하며 수식화 할 수 있는 방법과 이유를 제시해야 한다(Van Gog, et al., 2004). 또한, 학생들에게 주어진 문제 상황을 해석하는

능력을 기르도록 도와야하며 그와 동시에 문제 상황을 발견하고 수식화 하는 능력을 또한 계발하도록 장려해야 할 것이다.

넷째, 학생들은 다양한 규준(이해·계산·추론)을 이용하여 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 수직선 위의 무리수를 찾는 문제를 통해 학생들은 수직선 위에 정사각형을 올려놓은 뒤 정사각형의 대각선과 원의 반지름을 이용하여 무리수를 찾는 방법을 학습하였고 무리수의 범위에 대한 대수적인 계산을 통해서도 무리수를 수직선 위에서 찾을 수 있었다. 수직선에서 무리수를 발견할 때 예비교사들은 기하적인 접근(Geometric approaches)과 대수적인 계산을 통한 접근(Numeraical approaches), 그래프를 활용한 접근(Function-graph approach) 등을 사용하는 것으로 밝혀졌다(Sirotic & Zazkis, 2007b). 이와 유사하게, 이 연구의 중학생들도 기하적인 접근(정사각형의 대각선과 원의 반지름을 이용하는 방법)과 대수적인 계산을 통한 접근(무리수의 범위를 이용한 방법)을 사용하여 무리수를 찾으며 기하적인 접근과 대수적인 접근을 동시에 이용하여 무리수의 위치를 표시하는 것을 볼 수 있었다. 따라서 교사는 수직선과 실수에 대한 개념을 익힐 때 여러 가지 접근을 통해 다양한 규준들을 학생들의 학습에 적용할 수 있어야 하며, 이와 같이 기하적인 접근과 대수적인 접근을 접목하여 다양한 방법으로 학생들의 학습을 지원하는 노력이 필요할 것이다.

NRC(2001)에서는 독립된 하나만의 규준으로 학생들의 학습을 효과적으로 도울 수 없으며 이를 향상시키기 위해서는 모든 규준들이 연결되어 있음을 강조한다. 이는 이 연구를 통해 학생들의 개념적 이해가 중심인 수업에서도 적용과 문제해결력이 필요할 수 있으며 단계별 적절한 계산이 요구될 수 있음을 보여준다. 또한, 이해하는 과정 단계마다 학생의 추론이 필요하며, 따라서 이들을 학생들의 학습과 함께 전체적으로 다룰 수 있는 연구가 필요하며 이런 규준들을 통해 학생들의 학습이 변화되는 과정을 규명하는 연구들이 후속되어야 할 것이다.

학생 개인의 특징에 따른 학습의 영향에 차이를 규명할 수 있었다. 박나영은 과정을 선호한 결과 주어진 WOE에 대한 학습을 효과적으로 경험하였으며 WOE 문제지를 통해 개념학습에 많은 도움을 받아 스스로 만족하는 모습을 발견할 수 있었다. 스스로 혼자 공부하였을 때 이해되지 않았던 개념에 대해서 WOE를 통해 이해할 수 있었고 새로운 개념에 대해서도 WOE를 통해 지속적으로 학습하길 원하였다. 한편, 이지현은 과정보다 문제해결을 선호하기 때문에 WOE에서 필요한 내용을 선별하여 사용하였으며 선별한 내용을 통해 학습하는 모습을 나타내었다. 선별한 내용은 문제를 풀기위한 도입 방법, 표현 방법, 정리 방법 등이 있었다. 이러한 학생들 개인의 특징을 통해 각 학생들이 자신이 선호하는 방법으로 WOE를 활용한다는 사실을 발견할 수 있었으며 그에 따른 학생들의 추론 방법에도 차이가 있다는 것을 도출할 수 있었다. 따라서 학생 개인의 특징에 따라서 WOE가 주는 효과도 차이가 있을 수 있으며 교사는 이러한 학생의 특징을 사전에 파악하여 학생의 학습에 도움을 줄 수 있는 방법을 계획해야 하며, 이를 통해 교사는 학생들이 선호하는 학습 방법을 발견할 수 있을 것이다.

참고 문헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

김부윤·이지성 (2008). 제곱근 개념에 대한 학생들의 이해와 정당화 유형. 중등교육연구, 56(2), 447-464.

박윤희 · 박달원 · 정인철 (2004). 중학교 수학에서 무리수 개념에 관한 학습자의 이해 연구. 한국학교수학회논문집, 7(2), 99-116.

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. Review of educational research, 70(2), 181-214.

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 77-79.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. Educational Studies in Mathematics, 29(1), 29-44.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 183-194.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). The Learning of Mathematics. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2001). Adding it up: helping children learn mathematics. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B (Eds.). Washington, DC: National Academies Press.

Renkl, A. (1997). Learning from worked-out examples: A study on individual differences. Cognitive science, 21(1), 1-29.

Renkl, A. (1999). Learning mathematics from worked-out examples: Analyzing and fostering self-explanations. European Journal of Psychology of Education, 14(4), 477-488.

Renkl, A. (2002). Worked-out examples: Instructional explanations support learning by self-explanations. Learning and instruction, 12(5), 529-556.

Renkl, A. (2005). The worked-out-example principle in multimedia learning. The Cambridge handbook of multimedia learning, 229-244.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 149-163.

Shen, C. Y., & Tsai, H. C. (2009). Design Principles of Worked Examples: A Review of the Empirical Studies. Journal of Instructional Psychology, 36,(3), 238-244

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. Educational Studies in Mathematics, 65(1), 49-76.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line - where are they?. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(4), 477-488.

Tarmizi, R. A., & Sweller, J. (1988). Guidance during mathematical problem solving. Journal of Educational Psychology, 80(4), 424-436.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 81-95.

Trafton, J. G., & Reiser, B. J. (1994). The contributions of studying examples and solving problems to skill acquisition, (Unpublished Doctoral dissertation, Princeton University).

Van Gog, T., Kester, L., & Paas, F. (2011). Effects of worked examples, example-problem, and problem-example pairs on novices' learning. Contemporary Educational Psychology, 36(3), 212-218.

Van Gog, T., Paas, F., & Van Merriënboer, J. J. (2004). Process-oriented worked examples: Improving transfer performance through enhanced understanding. Instructional Science, 32(1-2), 83-98.

Voskoglou, M. G., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Mathematiche), University of Palermo, 21, 127-141.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 131-148.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 165-182.

Zhu, X., & Simon, H. A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. Cognition and instruction, 4(3), 137-166.

Examining Students' Mathematical Learning through Worked-Out Examples on Numbers[4]

Il Woong Lee[5] · Gooyeon Kim[6]

Abstract

The purpose of this study is to investigate students' thinking and understanding through working on Worked-out Examples on numbers and operations, specifically, radical and real numbers and operations in the middle grades. For this purpose, we developed a set of Worked-out Examples; middle school students independently worked on them. Then two students were interviewed. These data were analyzed by using the framework of mathematical proficiency. The data analysis suggested that the students seemed to go through the processes involving a combination of understanding and computation, computation and reasoning, and understanding, computation and reasoning. Also, it appeared that most of the students have difficult solving problems involving with radical and real numbers in related to strategic competence.

Key Words : worked-out examples, mathematical learning, mathematical proficiency, understanding of numbers

Received May 1, 2014
Revised June 23, 2014
Accepted June 25, 2014

4) This work was supported by the Sogang University Research Grant of 2011.
5) Swaziland, Vusweni high school (leerung21@gmail.com)
6) Sogang University (gokim@sogang.ac.kr), Corresponding author