한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 2, 167-191, June 2014

초등수학에서 입체도형의 밑넓이 이해에 대한 연구[1)]

김성준[2)]

본 연구는 초등수학에서 '밑'의 용어집합인 '밑변'과 '밑면'에 대한 고찰에서부터 입체도형의 '밑넓이' 개념과 그것을 구하는 과정에 대한 물음에서부터 출발한다. 곧, 연구는 초등학교 6학년 수학에서 직육면체의 밑넓이를 구하라는 문제에서 출발한다. 이에 대한 일차적인 답은 초등수학에서는 밑넓이라는 용어를 사용하지 않는다는 데서 찾을 수 있다. 그러나 중학교 1학년 수학에서 밑넓이를 '한 밑면의 넓이'로 사용하고 있는데, 문제는 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행에서 이에 대한 설명이 없다는데 있다. 또한 초등수학에서 밑면을 정의하고, 겉넓이와 옆넓이를 다루는데, 이로부터 자연스럽게 밑넓이를 구하는 문제를 생각해볼 수 있다는데 있다. 이에 본 연구는 '밑'의 용어집합에서 그 원소인 '밑변'과 '밑면'을 검토해보고, 다음으로 밑넓이에 대한 논의를 교육과정, 교과서를 비롯하여 사전적 정의와 함께 살펴보았다. 또한 입체도형 관련 설문 문항을 작성하여 예비교사와 현장교사를 대상으로 설문을 실시하여 밑면과 밑넓이에 대한 이해 정도를 비교 분석하였다. 특히 처음과 마지막 문항에 밑넓이를 구하는 문제를 제시하여, 이 사이에서 어떤 변화가 나타나는지를 비교하였다. 그 결과 초등수학과 중학교 수학 사이의 '인지적 간극'(cognitive gap)을 확인할 수 있었으며, 이를 통해 입체도형에서 밑넓이 지도를 위한 제언과 함께 이후 도형에서의 용어 지도를 위한 후속 과제를 제안하고 있다.

주요용어 : '밑'의 용어집합, 밑변, 입체도형, 밑면, 밑넓이, 인지적 간극

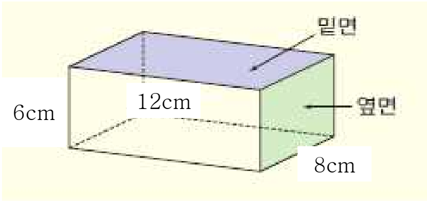
Ⅰ. 서론

본 연구는 초등학교 교사 A와의 대화에서부터 출발했다. 교사 A는 2013학년도에 부산 ○○초등학교에서 6학년 담임을 맡았으며, 교사 경력은 올해로 4년차이다. 교사 A가 속한 학교에서는 2학기 중간 성취도 평가를 실시하였으며, 6학년 수학 평가 문항 가운데 3단원(2007 개정 교육과정 기준)에서 학습한 '직육면체의 겉넓이와 부피'와 관련된 문제가 출제되었다.

출제된 문항은 <그림 1>과 같이 직육면체를 제시하고 밑면을 표시한 다음, 직육면체의 밑넓이를 구하는 것이었다. <그림 1>에서 보듯이 직육면체에서 가로의 길이는 12cm, 세로의 길이는 8cm, 높이는 6cm로 제시되어 있다.

---

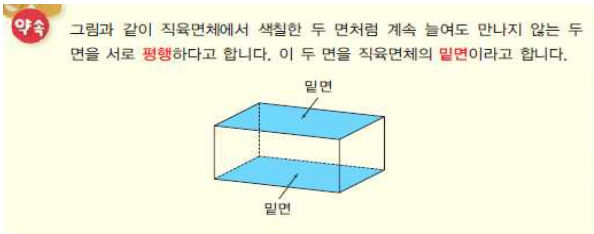
1) 이 논문은 2014년도 부산교육대학교 교육연구원의 지원을 받아 연구되었음.
2) 부산교육대학교 (joonysk@bnue.ac.kr)



<그림 I-1> 직육면체의 밑넓이 구하기

문제는 <그림 I-1>에서 주어진 직육면체의 밑넓이를 구하는 것인데, 교사 A가 생각한 정답은 12×8=96(㎠)이었다. 그는 그림에서 밑면으로 제시된 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 12cm, 8cm이고, 여기서 밑넓이는 밑면의 넓이를 구하는 것이기 때문에 밑면에 해당하는 직사각형의 넓이를 구하는 것으로 생각했다.

그런데 교사 A가 담임을 맡고 있는 학생들 가운데 몇 명이 이의를 제기한 것이다. 그들의 이유인즉, 5학년 1학기에서 ‘직육면체와 정육면체’를 배웠는데, 그 때 직육면체의 밑면은 언제나 평행한 두 면으로 약속했다는 것이다. 그러니까 직육면체의 밑넓이를 구할 때에도 밑넓이가 밑면의 넓이라고 한다면 그에 해당하는 두 면의 넓이를 구해야 한다는 것이다. 실제로 이 문항에서 이의를 제기한 학생들은 답을 모두 96×2=192(㎠)라고 했다. 교사 A는 <그림 I-2>의 5학년 1학기 교과서(교육과학기술부, 2011a)를 살펴보면서 학생들이 제기한 이의에 대해 고민하게 되었다. ‘직육면체에서 밑넓이를 구하라고 할 때, 밑면 가운데 한 면의 넓이를 구해야 하는가 아니면 밑면에 해당하는 두 면의 넓이의 합을 구해야 하는가?’ 그러나 교사 A는 중학교, 고등학교 수학에서 이와 같은 고민을 해본 적이 없었다. 왜냐하면 밑넓이는 정해져 있었고, 겉넓이를 구할 때에도 (밑넓이)×2+(옆넓이)와 같은 공식으로 그리고 부피를 구할 때에도 항상 (밑넓이)×(높이)와 같은 공식으로 배웠었기에 교사 A에게 밑넓이는 밑면이 결정되면 한 밑면의 넓이 곧, 위의 그림에서 교사 A가 당연하게 생각했던 96(㎠)이기 때문이다.



<그림 I-2> 직육면체의 밑면 약속하기

교사 A는 2013학년에 처음으로 6학년 담임을 맡으면서 이와 같은 문제를 접하게 되었고, 2013학년도 2학기 교육대학원에서 ‘초등수학과 PCK(Pedagogical Contents Knowledge)’를 주제로 한 강의에서 이 문제에 대해 연구자를 비롯하여 교사들과 함께 논의하는 시간을 가졌는데, 그 때 나왔던 여러 주제들이 본 연구를 시작하게 된 결정적인 계기가 되었다.

본 연구는 밑, 밑면, 밑넓이를 중심으로 평면도형에서의 밑변, 높이, 넓이에 대해 선행연구

들을 검토하면서 그리고 입체도형에서의 겉넓이, 옆넓이, 높이, 부피에 대한 사전적 의미와 외국의 교과서를 비교하면서 진행되었다. 이 과정에서 초등수학과 중학교 수학의 간극을 검토하였으며, 더불어 교육대학교에서 초등임용시험을 준비하는 예비교사 4학년 학생들을 대상으로 그리고 교육대학원에 소속된 초등학교 교사들을 대상으로 한 설문 문항을 통해 이러한 논의를 확장했다는 점에서 지금까지의 선행연구와의 차별성을 기하고 있다.

먼저 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ장에서는 밑변, 밑면, 밑넓이 각각의 용어들에 대한 이론적 논의를 이끌어내기 위해 몇 가지 선행연구를 검토하고 아울러 사전적 의미를 비롯하여 초등수학 교육과정 및 교과서를 중심으로 살펴볼 것이다. 다음으로 Ⅴ장에서는 예비교사와 현장교사를 대상으로 이와 관련된 문항을 검사지로 제시하고, 이를 통해 처음 이 논의를 시작한 직육면체에서의 밑넓이를 비롯하여 초등수학에서 다루어지는 입체도형과 관련된 용어들에 대해 그들의 인식이 어떤 상태에 놓여 있는지를 살펴볼 것이다. 그리고 Ⅵ장 결론에서는 이러한 논의로부터 초등수학에서 제시된 용어의 문제점을 검토하면서 특히 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행 과정에서 생각해보아야 할 문제점을 비롯하여 이러한 문제점을 개선하기 위한 제언과 함께 후속과제를 제시한다.

Ⅱ. 평면도형에서 밑변에 대한 고찰

먼저 초등수학에서 밑변과 밑면이라는 용어가 등장하는 순서를 생각해보면, 그리고 이것을 교육대학교 학생이나 교육대학원 교사들에게 질문으로 제시하면 의외의 반응을 얻게 된다. 응답자 대부분이 평면도형에서 밑변을 먼저 가르치고 다음으로 입체도형에서 밑면을 다루는 것으로 생각하는데, 이는 중학교 수학 이후에 학습하는 2차원에서 3차원으로의 공간구성과 관련되어 있다. 그러나 2007 개정 수학과 교육과정을 보면, ‘밑면’이 5학년 1학기 6단원 ‘직육면체와 정육면체’ 86쪽에서 약속으로 먼저 제시된 다음에 ‘밑변’이 7단원 ‘평면도형의 넓이’ 98쪽에서 약속으로 제시되고 있다(교육과학기술부, 2011a).

이러한 순서가 의미하는 것은 무엇일까? 초등수학에서 4학년 수학은 도형 영역에서 평면도형의 개념이 완성되는 시기이다. 물론 5학년 1학기에서 도형의 합동을 다루고 있지만 선분, 직선, 각, 평행, 수직을 비롯하여 삼각형, 사각형 등의 다각형 등 평면도형과 관련된 대부분의 내용들이 4학년 수학에서 다루어진다. 그러나 밑변에 대한 정의는 도형 영역이 아닌 측정 영역에 해당하는 ‘평면도형의 넓이’에 등장하는데, 이것은 밑변이 넓이를 측정하기 위한 개념이기 때문이다(김상화·방정숙·정유경, 2013). 곧, 먼저 밑변이 정의되어야만 평행한 선분 사이의 거리 또는 한 꼭짓점에서 수선의 발까지의 거리를 높이로 정의할 수 있고, 그래야만 평면도형에서의 넓이 개념을 이끌어낼 수 있기 때문이다(정경순·임재훈, 2011). 결국 초등수학에서 밑변은 넓이 개념을 이끌어내기 위해 전제되어야 할 개념으로 다루어지는 것임을 알 수 있다. 한편 밑변은 2009 개정 수학과 교육과정 등재용어의 분류에 따르면, 5~6학년군 측정 영역에서 등장하며, 용어의 조어 및 일상어에 따른 분류에서 보면 수학 분야에서 만들어진 용어임을 알 수 있다(박교식, 2011; 박교식·권석일, 2012). 또한 한글, 한자어 및 영어별 분류에 따르면 밑변은 ‘한글+한자’ 용어에 해당한다.

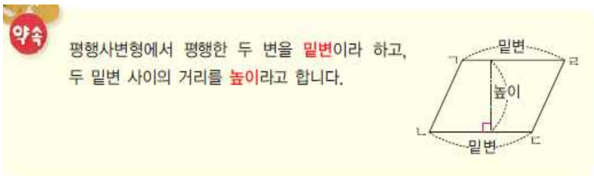
본 연구는 밑넓이 문제에서 출발하지만 밑넓이를 생각하기에 앞서 밑면에 대해 살펴보려고 했으며, 그리고 밑면에 앞서 밑변을 먼저 생각해보고자 한다. 이는 ‘밑’의 용어집합에 ‘밑

변'과 '밑면'이 함께 속하기도 하지만(박교식·권석일, 2012), 밑넓이와 밑면을 검토하면서 자연스럽게 평면도형에서의 밑변을 살펴보는 것이 우선이라고 생각했기 때문이다.

초등수학에서 밑변에 대한 정의는 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴에서 각각 3번의 약속하기를 통해서 다루어진다. 여기서 주목할 점은 평행사변형과 사다리꼴에서 밑변의 경우 평행을 전제로 밑변을 약속하는데 비해 삼각형은 임의의 한 변으로 밑변이 다루지는 부분이다(정경순·임재훈, 2011).

그렇다면 '밑변'에서 '밑'은 사전적 의미[3]의 그것과 달리 어떻게 '평행'에 방점을 두게 되었을까? 이로 인해 교사들은 평행사변형에서 밑변을 처음 지도할 때부터 밑변은 밑에 놓여있는 한 개의 변이 아니라 평행한 두 개의 변이라는 사실을 계속해서 강조한다. 그렇다면 삼각형에서의 밑변과 같이 임의의 변 또는 정말 밑에 있는 변으로서의 밑변은 가능하지 않을까? 이러한 물음들은 초등수학을 가르치는 교사라면 한번쯤 해보는 의문이다. 이러한 의문은 초등수학에서 입체도형의 밑면을 지도하면서 다시 한 번 하게 되고, 이후 논의할 밑넓이를 구하는 문제와도 밀접하게 관련되어 있다.

다음은 초등수학 5학년 1학기 7단원 '평면도형의 넓이' 중 평행사변형에서 밑변을 약속하는 부분이다(교육과학기술부, 2011a). 평행사변형에서 평행한 두 변을 밑변으로 정의하는데, 여기서 중요한 전제 조건은 밑변을 정의하기 위한 대상으로 평행사변형이어야 한다는 점, 그리고 밑변은 평행한 관계에 놓여 있는 두 변이라는 점이다.



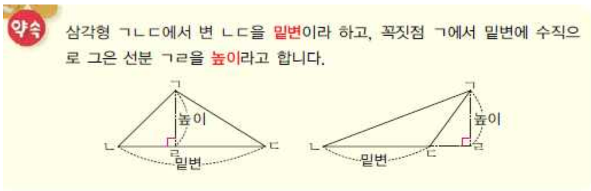
<그림 II-1> 평행사변형의 밑변 약속하기

그러나 이 약속은 그리 오래가지 않는데, '밑변'이 꼭 평행한 두 변이 아니라는 것을 확인하게 된다. 곧, 평행사변형에서 평행을 전제로 한 밑변의 정의는 그 대상이 삼각형으로 바뀌면서 삼각형에서는 어느 변이든 삼각형의 한 변이 밑변이 될 수 있음을 배우게 된다. 그러나 밑변이 위치와는 관련 없음에도 불구하고 거의 모든 삼각형에서 밑변은 아래(밑)에 놓인 상태에서 다루어지고 있는데,[4] 이와 관련해서 박교식(2007)은 '수학용어 다시보기'에서 다음과 같이 설명한다.

밑변은 한자 底邊(저변)에서 底를 '밑'으로 번역한 것으로, 대체로 삼각형에서 바닥에 놓인 변이 밑변이다. 이때 밑변은 말 그대로 '밑에 놓인 변'을 의미하는데, 영어로는 base라고 한다.

---

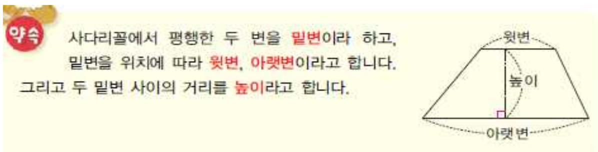
3) '밑'의 사전적 의미에서 그 첫 번째 뜻은 '물체의 아래나 아래쪽'을 나타내는 명사로 사용된다. 이때 '밑'은 한자 '底'(저)를 번역한 것이다. 밑은 영어로는 'base'라고 한다.
4) 임승현·박영희(2011)에 따르면 초등학교 6학년 학생들의 평면도형에서의 높이 개념은 밑변 개념과 밀접하게 관련되어 있으며, 특히 삼각형의 경우 높이를 결정하는 과정에서 드러난 오류에는 밑변은 밑에 있는 변으로 생각하고 높이를 잘못 결정하는 경우가 많았음을 보여주고 있다.



<그림 II-2> 삼각형의 밑변 약속하기

그렇다면 ‘밑변’의 사전적 의미는 어떠한가? 이를 살펴보면, 밑변은 두 가지 뜻으로 정의되고 있다.[5] 그 첫 번째는 ‘이등변 삼각형에서 등변이 아닌 변’의 뜻으로, 두 번째는 ‘사다리꼴에서 평행한 두 변’을 의미한다. 그러나 이 두 가지 뜻 모두는 수학에서 사용되는 명사의 용례인데, 영어에서 기하에서의 용례로 제시하고 있는 ‘the bottom side of a polygon’(다각형의 아래, 바닥)의 그것과는 차이를 보인다. 또한 교과서와 달리 이등변 삼각형으로 한정해서 등변이 아닌 나머지 한 변을 밑변으로 정의하고, 사다리꼴로 한정하여 평행한 두 변으로 정의된다는 점에서 초등수학에서의 약속과는 차이를 보인다.

세 번째 등장하는 ‘밑변’의 정의는 사다리꼴의 넓이를 구하는 과정에서인데, 이는 사전적 의미의 밑변을 그대로 반영하여 사다리꼴에서 평행한 두 변을 밑변이라고 한다. 그리고 평행사변형에서부터 삼각형을 다루는 동안, 밑변은 변의 위치에 따라 밑에 놓여 있는 변이 아니라는 점을 여러 차례 강조해왔었는데, 사다리꼴에서는 밑변 가운데 위치에 따라 밑변을 분류하는 두 용어가 등장한다. 곧, 밑변에 속하는 하위개념으로 윗변과 아랫변을 약속한다. 그러나 사다리꼴에서 윗변과 아랫변은 공식에서 익숙하게 사용되는데 비해 사다리꼴에서의 밑변은 잘 언급되지 않는다. 그 이유로, 교사가 강조하는 것은 평행사변형에서 밑면을 평행한 두 변으로 강조하는데 비해 학생은 밑변을 두 쌍의 변으로 이해하는 경향을 보이며, 그래서 보통은 사다리꼴의 경우 밑변보다는 윗변과 아랫변이라는 용어에 더욱 집중하게 된다(최수임·김성준, 2012).[6]



<그림 II-3> 사다리꼴의 밑변 약속하기

본 연구는 직육면체에서 밑넓이를 구하는 문제에서부터 출발했으나, 밑넓이가 밑면에서부터 그리고 밑면을 밑변과 관련지어 보기 위해 먼저 평면도형의 넓이에서 정의되는 밑변을 살펴보았다. 초등수학 교과서에서 밑변은 평행사변형과 사다리꼴에서는 위치에 따른 구분이 아니라 평행에 의존하는 개념으로, 그리고 삼각형에서는 임의의 한 변으로 정의되고 있다.

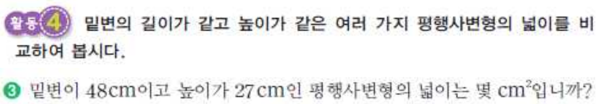
5) 국립국어원 표준국어대사전 http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp. 이후 본 연구에서 인용한 표준국어대사전의 사전적 정의는 모두 같은 사이트에서 가져온 것이다.

6) 위치에 따른다고 할 때 그림과 같지 않고 이를테면, 그림을 90도 회전한 사다리꼴에서 위, 아래의 구분이 어떻게 되어야 할지는 또 다른 생각해볼 문제이다.

물론 삼각형의 경우 밑변에 수직인 높이를 정의하기 위해서라도 아래쪽에 놓인 변을 밑변으로 다루고 있지만, 그러나 교사용 지도서 등에서는 삼각형에서의 밑변은 어떤 변이라도 될 수 있음을 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011a, 2001b, 2011c). 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴에서 정의한 밑변은 크게 3가지 측면에서 볼 수 있다. 여기서 ①은 평행사변형과 사다리꼴에서, ③은 삼각형에서 그리고 ②는 삼각형에서 암묵적으로 밑변을 다루고 있는 방식이다.

① 평행인 밑변: 두 변의 위치 관계
② 아래인 밑변: 한 변의 위치
③ 임의의 밑변: 위치와 상관없음

한편 밑변의 경우 도형과 측정이라는 이중적 의미의 용어 사용에 대해서도 고려해야 한다. 권석일·박교식(2011)은 초등수학 교과서에서 한 용어를 두 가지 의미로 사용하는 경우로 '둘레', '가로', '세로', '높이'를 그 예로 들고 있는데, '밑변' 역시 도형과 측정(양)이라는 이중의 의미로 사용되고 있기 때문이다. 이는 5학년 1학기 평면도형의 넓이에서 평행사변형의 넓이를 묻는 다음의 두 물음을 비교해보면 알 수 있다. <그림 II-4>의 활동4에서 밑변은 도형으로, 그 아래 3번 문제는 밑변이 측정(양)으로 사용되고 있다. 물론 이에 대해서는 권석일·박교식(2011)이 지적했듯이 용어의 정확한 이해를 위해 한 가지 방식으로 정리할 필요가 있다.


활동 4 밑변의 길이가 같고 높이가 같은 여러 가지 평행사변형의 넓이를 비교하여 봅시다.

❸ 밑변이 48cm이고 높이가 27cm인 평행사변형의 넓이는 몇 cm^2입니까?

<그림 II-4> 밑변 사용의 2가지 예

학습용어 개념사전[7]은 밑변을 평면도형에서 높이를 잴 때 기준이 되는 변으로, 평면도형이 놓이는 위치에 따라 달라지는데, 삼각형의 경우 한 꼭지각에 대한 대변을 말하고, 사다리꼴이나 평행사변형에서는 평행인 두 변을 말하는 것으로 되어 있다. 초등수학에서 밑변은 평면도형의 넓이를 구하기 위해 전제되는 개념으로, 높이와 함께 넓이를 결정하는 변수가 되고 있다. 밑변의 이러한 역할은 이후 밑면과 밑넓이를 학습한 이후에 입체도형의 부피를 구하는 과정에서 밑넓이가 높이와 함께 부피를 구하는 과정에서 등장하는 것과 같은 맥락에서 생각해볼 수 있다.

Ⅲ. 입체도형에서 밑면에 대한 고찰

박교식·권석일(2012)이 규정한 용어집합에 따르면, 밑면은 밑변과 같은 용어집합에 속한다. 즉, '밑'의 용어집합에 속하는 원소는 '밑면'과 '밑변', 2개임을 알 수 있다.[8] 이처럼 밑면

7) http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=958360&cid=3071&categoryId=3071
8) 특정한 글자나 단어를 공유하는 용어 전체를 그 글자 또는 단어의 용어집합이라고 하고, 이 때 그 특정한 글자나 단어를 핵이라고 한다(박교식, 2012).

은 ‘밑’이 들어간 교육과정 등재용어로 ‘밑변’과 함께 있는데, 앞서 평면도형에서 밑변의 역할이 넓이를 구하기 위한 것이라면, 입체도형에서 밑면은 부피를 구하는데 필요한 전-개념으로 도입된다. 그리고 이때 높이는 그 차원을 달리 할 뿐 같은 역할을 하고 있다.

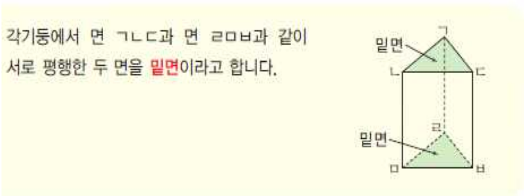
밑면이 밑변과 차이를 보이는 것은 밑변이 수학 분야에서 만들어진 용어라면, 밑면은 일상어로 수학적 의미가 확립된 용어라는 점이다(박교식, 2011). 표준국어대사전에서도 밑면은 밑변과 달리 수학적 용례로 그 뜻을 풀어내지 않고 ‘물건의 아래쪽을 이루는 겉면’과 같이 일상적인 용례에서 정의하고 있다. 이에 비해 학습용어 개념사전에서는 밑면을 ‘각기둥, 원기둥 등과 같은 입체도형에서 평행이 되는 두 면 또는 각뿔, 원뿔 등과 같은 입체도형에서 뿔의 꼭짓점과 이웃하지 않는 면’으로 정의하고 있다.[9] 이는 다음 그림에서 보듯이 초등수학에서 약속하는 밑면의 두 가지 측면을 모두 포함하고 있는데, 밑변에서와 유사하게 평행을 전제로 한 두 개의 밑면과 그리고 뿔의 반대쪽에 있는 한 개의 밑면이 그것이다.

초등수학에서 밑면은 모두 5차례 정의되는데, 5학년 1학기 ‘직육면체와 정육면체’에서 그리고 6학년 1학기 ‘각기둥과 각뿔’에서와 6학년 2학기 ‘원기둥과 원뿔’에서 각각 약속한다(교육과학기술부a, 2011).

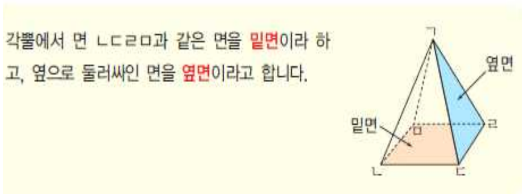
먼저 각기둥에서 밑면은 직육면체와 정육면체의 밑면과 같이 평행에 초점을 맞추어서 평행한 두 개의 면을 밑면으로 정의하는 반면 원기둥에서는 위아래 위치에 있는 두 개의 면으로 밑면을 정의한다. 그리고 각뿔과 원뿔에서 ‘밑면’은 그림으로 또는 뿔의 반대쪽에 있는 면(뿔의 꼭짓점과 이웃하지 않는 면)으로 정의된다. 앞서 평면도형에 따라 밑변의 정의가 차이를 보였듯이, 밑면 역시 주어지는 입체도형에 따라 정의하는 방식에서 차이를 보인다.

특히 입체도형에서 밑면을 정의하는 과정에서 생각해볼 문제점은 용어 정의 방식이 일관성을 띠지 않는다는 점이다(권석일·박교식, 2011). 이러한 비일관성은 밑넓이를 구하는 문제에서 밑면을 두 면 또는 한 면으로 구하는 하나의 이유가 되곤 한다.

<그림 III-1>과 <그림 III-3>를 비교해보면, 각기둥은 서로 평행한 두 면을, 그리고 원기둥은 위아래에 있는 면을 각각 ‘밑면’으로 정의한다. 5학년에서 직육면체에서 평행을 정의했기에 각기둥과 원기둥을 기둥이라는 동일한 관점에서 평행을 통해 밑면을 약속할 수도 있으나, 원기둥의 경우 평행을 생략한 채 위아래의 위치적 관점만을 제시한 것에 대해서는 용어 정의 방식의 일관성이 결여되었다고 볼 수 있다. 만약 원기둥과 같이 밑면을 정의한다면 각기둥에서도 동일한 방식으로 평행을 생략한 채 위아래에 있는 면으로 밑면을 정의할 수도 있을 것이다.[10]

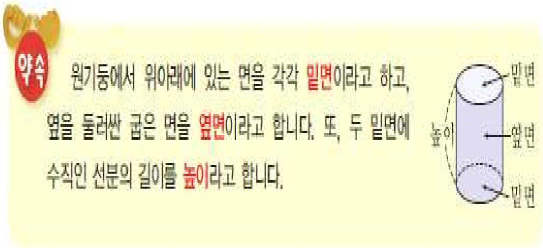


<그림 III-1> 각기둥의 밑면

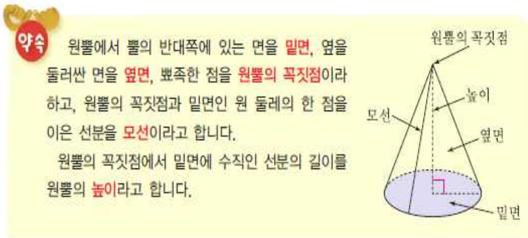


<그림 III-2> 각뿔의 밑면

9) http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=958359&cid=3071&categoryId=3071
10) 이 부분은 평면도형 가운데 사다리꼴에서 밑변을 위치에 따라 윗변과 아랫변으로 정의한 것과 관련해서 생각해볼 수 있다



<그림 III-3> 원기둥의 밑면



<그림 III-4> 원뿔의 밑면

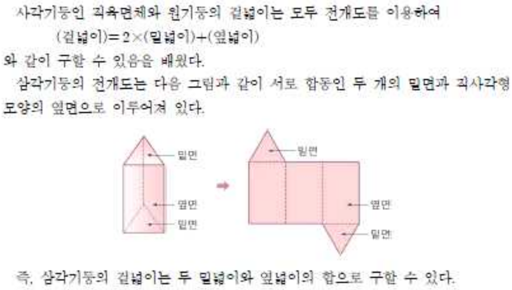
다음으로 <그림 III-2>과 <그림 I-10>을 살펴보면, 각뿔에서 밑면은 예시적 정의를 통해 시각적으로 면 ㄴㄷㄹㅁ과 같은 면으로 정의하는 반면 원뿔에서는 뿔의 반대쪽에 있는 면(좀 더 정확하게는 원뿔의 꼭짓점 반대쪽에 있는 면)으로 밑면이 정의되고 있다. 이 역시 용어 정의 방식에서 일관성 있게 제시될 필요가 있는 부분이다(강홍규·조영미, 2000).

부가해서 이러한 용어 정의 방식의 비일관성에 대해 살펴보면, 옆면의 경우에도 각기둥의 경우 밑면에 수직인 면으로 정의되면서 옆면이 옆에 있는 면이 아니라 밑면에 종속되는 개념으로 기술되는 반면, 각뿔과 원기둥, 원뿔 모두에서 옆면은 옆으로 둘러싸인 면으로 정의되고 있다. 또한 <그림 III-3>와 <그림 III-4>에서 옆을 둘러싼 굽은 면과 옆을 둘러싼 면 사이에서도 용어 정의 방식에서 일관성이 결여되어 있음을 알 수 있다.

Ⅳ. 입체도형에서 밑넓이에 대한 고찰

초등수학에서 밑넓이는 지금까지 보아온 밑변, 밑면과 다른 관점에서 접근해야 한다. 왜냐하면 초등수학에서 '밑'의 용어집합은 '밑변'과 '밑면' 2개뿐이며, 밑넓이는 초등수학과 교육과정에 등재된 용어가 아니기 때문이다. 따라서 초등수학 교과서와 익힘책(2007 개정 교육과정 기준) 어디에도 밑넓이라는 용어를 사용하고 있지 않다. 초등수학에서 밑넓이라는 표현을 대신하여 사용하는 것은 '한 밑면의 넓이'이며, 그래서 직육면체 또는 정육면체에서나 각기둥, 원기둥 등에서 평행한 두 개의 밑면에서부터 생겨날 수 있는 오류를 막고 있다. 그러나 어디에도 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이)라는 설명은 찾아볼 수 없다.

그렇다면 교사 A와 같이 초등수학에서 사용하는 밑넓이라는 용어는 어디에서부터 비롯된 것인지는 생각해보아야 한다. 보통 중학교 수학에서 밑넓이는 '한 밑면의 넓이'로 사용되고 있다. 이는 다음의 상황에서 미루어 짐작할 수 있다. 중학교 1학년 수학 교과서 가운데, 우정호(2013)에서 기술하고 있는 입체도형의 측정을 살펴보면 다음과 같다.



사각기둥인 직육면체와 원기둥의 겉넓이는 모두 전개도를 이용하여

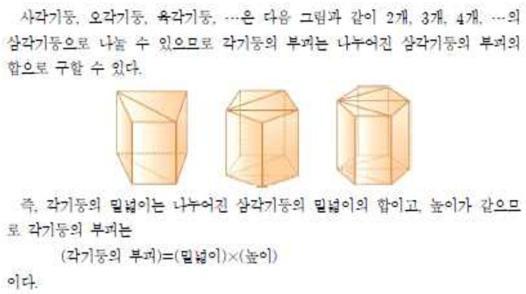
(겉넓이)=2×(밑넓이)+(옆넓이)

와 같이 구할 수 있음을 배웠다.

삼각기둥의 전개도는 다음 그림과 같이 서로 합동인 두 개의 밑면과 직사각형 모양의 옆면으로 이루어져 있다.

즉, 삼각기둥의 겉넓이는 두 밑넓이와 옆넓이의 합으로 구할 수 있다.

<그림 IV-1> 삼각기둥의 겉넓이



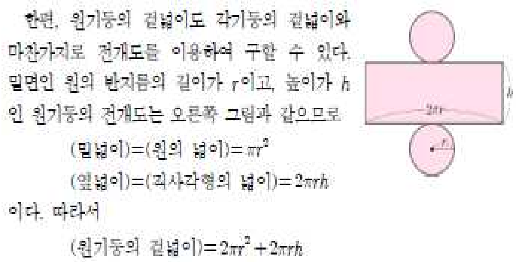
사각기둥, 오각기둥, 육각기둥, …은 다음 그림과 같이 2개, 3개, 4개, …의 삼각기둥으로 나눌 수 있으므로 각기둥의 부피는 나누어진 삼각기둥의 부피의 합으로 구할 수 있다.

즉, 각기둥의 밑넓이는 나누어진 삼각기둥의 밑넓이의 합이고, 높이가 같으므로 각기둥의 부피는

(각기둥의 부피)=(밑넓이)×(높이)

이다.

<그림 IV-2> 기둥의 부피



한편, 원기둥의 겉넓이도 각기둥의 겉넓이와 마찬가지로 전개도를 이용하여 구할 수 있다. 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고, 높이가 h인 원기둥의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로

(밑넓이)=(원의 넓이)=πr^2

(옆넓이)=(직사각형의 넓이)=$2\pi rh$

이다. 따라서

(원기둥의 겉넓이)=$2\pi r^2+2\pi rh$

<그림 IV-3> 원기둥의 겉넓이

<그림 IV-1>과 같이, 삼각기둥의 겉넓이를 구하는 과정을 설명하면서 사각기둥의 '한 밑면의 넓이'와 '옆면 전체의 넓이'를 구한 다음, 기둥에서 (겉넓이)=2×(밑넓이)+(옆넓이)로 정리하고 있다. 여기서 알 수 있는 것은 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이), (옆넓이)=(옆면 전체의 넓이)라는 사실이다. 이는 <그림 IV-22>에서 기둥의 부피를 구하는 과정에서도 동일한데, 기둥에서 (부피)=(밑넓이)×(높이)와 같이 공식화함으로써 결국 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이)로 규정하고 있다. 이와 마찬가지로 강옥기 외 8인(2013)의 중학교 수학1 교과서에서도 <그림 IV-3>과 같이 원기둥에서 (밑넓이)=(원의 넓이) 그러니까 곧, 원기둥에서 '한 밑면의 넓이'로 보고 있으며, 이를 통해 (기둥의 겉넓이)=2×(밑넓이)+(옆넓이)로 형식화한다.

이처럼 중학교 수학에서 밑넓이는 '한 밑면의 넓이'로 통용되고 있으며, 그래서 기둥의 겉넓이와 부피를 공식화하는 과정에서 초등수학처럼 '한 밑면의 넓이'가 아닌 '밑넓이'라는 용어를 대신하여 사용하고 있다. 이는 분명 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행에서 그리고 그 용어 사용에 있어서 '인지적 간극'(cognitive gap)이 존재하는 부분이다(Amerom, 2000; Herscovics, 1989).[11] 교사 A의 경우 중학교와 고등학교 수학을 거치면서 자연스럽게 이와 같은 간극을 무시한 채 초등수학에 이 용어를 사용했으며, 이는 교사 A가 '밑넓이'라는 용어를 초등수학에서도 '한 밑면의 넓이'로 이해하고 사용한 것으로 볼 수 있다.

다시 초등수학으로 돌아가서 밑넓이에 대한 논의를 사전적 정의와 함께 생각해보자.

11) 본 연구에서 사용한 '인지적 간극'은 학생이 용어나 개념을 받아들이는 과정에서 수준에 따른 차이 또는 이에 대한 설명을 생략함으로써 발생할 수 있는 차이를 말한다. 물론 van Hiele가 언급한 교사와 학생의 기하 수준의 차이에 따른 언어 사용에서 '밑넓이'에 대한 이해의 차이를 생각해볼 수 있으나, 본 연구에서는 밑면, 옆면, 겉면과 함께 옆넓이, 겉넓이의 사용과는 다른 맥락에서 밑넓이가 초등수학과 중학교 수학에서 사용되었다는 점에 주목하여 '인지적 간극'이라는 용어를 사용하고 있다.

표준국어대사전에서 밑넓이는 수학에서의 용례에 국한되어 '원기둥, 각기둥, 원뿔, 각뿔 따위의 밑면의 넓이'로 정의되고 있다. 또한 학습용어 개념사전에서도 밑넓이는 '각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔 등과 같은 입체도형의 밑면의 넓이'로 정의하고 있는데,[12] 다만 이에 대한 부연 설명으로 각기둥과 원기둥을 예를 들어 밑넓이를 구하는 과정에서 '한 밑면의 넓이'로 국한하여 겉넓이나 부피를 구할 때 쓰인다는 것을 보이고 있다. 그렇다면 이러한 사전적 정의에 따를 경우, 교사 A가 제기한 초등수학에서의 밑넓이 구하는 문제를 어떻게 이해하고 설명해야 하는가? 다시 말해, 사전적 정의에서처럼 밑넓이를 '밑면의 넓이'로만 기술하는 경우에, 기둥에서 밑면은 그 면이 2개이고, 뿔에서 밑면은 그 면이 1개라는 교과서의 설명은 기둥과 뿔에서 밑넓이를 구하는데 어떻게 적용되어야 하는가? 그렇다면 교사 A처럼 초등수학에서 각기둥의 밑넓이를 구하라고 할 때, 학생들이 구한 것처럼 한 밑면의 넓이가 아닌 평행한 두 밑면의 넓이를 구한 것이 옳은 것인가?

이 질문은 초등수학의 경우 직육면체의 겉넓이에 대한 약속하기와 원기둥에서 사용되는 옆넓이의 용례를 보면 더욱 혼란스러워진다. 먼저 직육면체에서 겉넓이는 여섯 면의 넓이의 합, 곧 겉면에 해당하는 모든 면의 넓이의 합으로 정의된다. 이는 표준국어대사전에서 겉넓이를 '물체 겉면의 넓이'로 정의하는 것과 같다.

약속 직육면체에서 여섯 면의 넓이의 합을 직육면체의 겉넓이라고 합니다.

<그림 Ⅳ-4> 직육면체의 겉넓이

다음으로 초등수학에서 옆넓이 역시 교육과정 등재용어는 아니지만 원기둥의 겉넓이를 구하는 과정에서 등장한다. 여기서 옆넓이는 원기둥의 전개도에서 옆면 전체인 직사각형의 넓이를 의미한다. 그러다보니 직육면체와 각기둥에서도 옆넓이는 자연스럽게 옆면 전체의 넓이의 합으로 생각할 수 있으며, 실제 직육면체에서 옆넓이를 구하는 문제에서 밑면과 수직인 네 면의 넓이의 합을 구하는 것을 가르치고 배우게 된다.

● 원기둥의 옆넓이를 구하시오.
(옆넓이)=(밑면의 원주)×(원기둥의 높이)

<그림 Ⅳ-5> 원기둥의 옆넓이

결국 직육면체의 겉넓이는 겉면에 해당하는 '여섯 면의 넓이의 합'으로, 직육면체에서 옆넓이는 밑면에 수직인 '네 옆면의 넓이의 합'으로 이해하고 있으며, 그렇다면 직육면체에서 밑넓이는 밑면 두 개의 넓이의 합으로 받아들이는 것이 오히려 자연스러울 수도 있는 것이다.

(원기둥의 겉넓이)=(한 밑면의 넓이)×2+(옆넓이)

(원기둥의 부피)=(한 밑면의 넓이)×(높이)

<그림 Ⅳ-6> '한 밑면의 넓이'가 사용된 예

12) http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=958358&cid=3071&categoryId=3071

그러나 앞서 설명했듯이 초등수학에서 밑넓이는 교육과정에서 등재용어도 아니며 교과서 및 익힘책에서 사용되지 않고 있다(이영지, 2013). 무엇보다 중학교 수학과 달리 초등수학에서는 밑넓이를 대신하여 ‘한 밑면의 넓이’를 사용하고 있기에 교사 A가 출제한 문제는 문제 자체에 오류가 있다고 볼 수 있다. 초등수학에서는 중학교 수학에서처럼 밑넓이를 사용해야 하는 모든 상황에서 이를 대신하여 ‘한 밑면의 넓이’가 사용되고 있으며, 중학교 수학에서 결국 이것이 ‘밑넓이’로 대체하고 있는 것이다. 그 예로, 초등수학(6학년 2학기 익힘책 4단원)에서 원기둥의 겉넓이와 부피는 중학교 수학에서 밑넓이를 사용하는 것과는 달리 <그림 IV-6>과 같이 공식화되어 기술되어 있다(교육과학기술부, 2011b). 그러나 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행 과정에서 밑넓이에 대한 이와 같은 부가적인 설명은 찾아볼 수 없으며, 특히 직육면체와 각기둥에서 밑면을 정의하는 방식을 볼 때 그리고 겉넓이, 옆넓이를 구하는 문제 등을 함께 고려해볼 때 초등수학에서도 이 문제에 대해 명확하게 짚고 넘어갈 필요가 있다.

Ⅴ. 예비교사 및 현장교사 설문 결과

지금까지 초등수학에서 ‘밑’의 용어집합에서 그 원소인 ‘밑변’과 ‘밑면’에 대해 교육과정을 비롯하여 교과서와 익힘책을 검토하고 사전적 의미를 살펴보았다. 밑변의 경우 평면도형에서 그 의미가 평행 또는 위치에 따라 어떻게 기술되는지, 그리고 밑면의 경우에도 입체도형에서 평행 또는 위치에 따라 정의되는 면의 개수와 함께 정리했다. 그리고 이 과정에서 제기된 문제점으로 밑변에서의 이중적 의미의 용어 사용과 밑면에서의 용어 정의 방식의 비일관성에 대해서도 살펴보았다. 밑넓이의 경우 초등수학에서는 사용하지 않고 있는 반면 중학교 수학에서는 밑넓이를 ‘한 밑면의 넓이’로 규정하고 있다. 결국 본 연구의 출발점이 되었던 초등수학에서 밑넓이를 어떻게 받아들여야 할지에 대해서는 원칙적으로 이러한 용어 사용의 문제와 관련지어 볼 수 있으며, 특히 밑넓이의 경우 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행 과정에서 ‘인지적 간극’이 있을 수 있으며, 그 결과 초등학교 교사에 의한 교수학적 변환 과정에서 교사 A와 같은 문제가 대두될 수 있다.

본 연구는 이러한 논의를 바탕으로 예비교사 및 현장교사의 입체도형에서의 밑면, 밑넓이에 대한 이해를 살펴보기 위해 설문을 실시하였다. 설문의 목적은 교사 A의 문제의식이 개인적인 문제가 아닐 수 있다는 것을 확인하고, 더불어 학생들이 교사 A에게 이의를 제기했던 문제에 대해 예비교사 및 현장교사는 어떻게 받아들이는지 확인하기 위한 것이다. 그리고 이 과정에서 이들 역시 초등수학과 중학교 수학 사이의 용어 사용과 관련해서 ‘인지적 간극’에 따른 이해가 어떻게 변하는지 확인하는데 있다.

예비교사 설문은 교육대학교 학부 4학년 학생 32명을 대상으로 진행되었다. 이들은 수학교육을 심화과정으로 하고 있으며, 1학년부터 3학년까지 초등수학의 이론 및 실제를 이수해왔으며 아울러 수학교육학 전공 강의로 ‘초등수학교육심리’, ‘수학교육사’, ‘컴퓨터와 수학교육’ 등을 이수했다. 현장교사 설문은 교육대학원에 재학 중인 대학원생 15명을 대상으로 했다.[13] 이들 가운데 6명은 3학기, 9명은 5학기를 이수하고 있으며, 모두 초등학교 교사로 재

13) 일반적으로 두 집단을 비교할 때 한 집단이 20명 이상으로 해서 신뢰성을 확보한다는 점에서, 현장교사가 15명인 것은 본 연구의 제한점이다.

직 중이다. 이들의 교사 경력은 5년 이하가 6명, 5년에서 10년 이하가 7명, 10년에서 20년 이하가 1명, 그리고 20년 이상이 2명으로 다양하게 분포되어 있다.[14)]

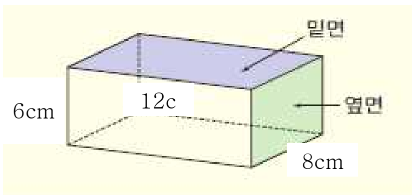
두 집단의 설문에서 설문지(<부록 1>) 문항은 동일했으며, 설문지는 모두 6페이지로 구성되었다. 1페이지는 1개 문항을 두었으며, 1페이지 첫 번째 문항은 직육면체에서 밑넓이를 구하는 문항이다. 2페이지부터 5페이지까지는 입체도형에서 밑면, 옆면, 뿔의 꼭짓점, 모서리, 높이, 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이에 대해 기술하는 문항으로 구성되었고, 마지막 6페이지 여섯 번째 문항은 첫 번째 문항과 같은 직육면체를 주고 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 순차적으로 구하도록 했다. 이러한 문항 제시 방식을 취한 것은 입체도형 개념을 정리하는 과정에서 직육면체의 밑넓이 값이 어떤 변화를 보이는지를 알아보기 위한 것으로, 초등수학과 중학교 수학 사이의 '인지적 간극'을 설문지 처음과 마지막에서 살펴보기 위한 장치이다.

다음은 이 가운데 첫 번째 문항(직육면체의 밑넓이를 구하는 문제)과 두 번째 문항(입체도형의 밑면을 기술하는 문제), 다섯 번째 문항(입체도형의 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 기술하는 문제), 그리고 여섯 번째 문항(직육면체의 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 구하는 문제)에 대한 설문 결과를 분석한 것이다.

1. 직육면체의 밑넓이를 구하는 문제

1페이지에 제시된 문항은 다음과 같다.

오른쪽 그림의 직육면체에서 밑넓이를 구하시오.



<그림 V-1>

이 문항의 의도는 직육면체라는 입체도형을 제시하고 밑면을 옆면과 함께 제시했을 때 밑넓이를 어떻게 구하는지를 알아보는데 있다. 설문에 앞서 설문 대상자에게 모든 문항은 초등수학 수준에서 설명하고 답을 해줄 것을 요청했다. 그 결과는 <표 V-1>과 같다.

예비교사의 응답 비율과 현장교사의 응답비율을 비교해보면 그 차이를 비교적 분명하게 알 수 있다. 이는 앞서 밑넓이라는 용어가 초등수학에서 다루지 않는 것과 중학교 수학에서 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이)로 규정하는 것을 동시에 반영하고 있다. 예비교사의 경우 중학교 수학과 고등학교 수학에서 배웠듯이 밑넓이를 '한 밑면의 넓이'로 구하려는 경향이 강하게 나타났으며, 이는 78%(25명)의 학생들의 답안(96(㎠))에서 확인할 수 있다.[15)] 1B에 속하는

14) 본 연구의 설문은 현장교사의 경력에 따른 비교가 목적이 아니라 예비교사와 현장교사의 용어 이해 상태와 함께 입체도형에서 밑넓이를 어떻게 구하는지를 알아보기 위한 것이다. 따라서 설문 대상에 대한 보다 자세한 기술은 생략하고, 설문 결과에서 드러난 주제를 중심으로 다룬다.

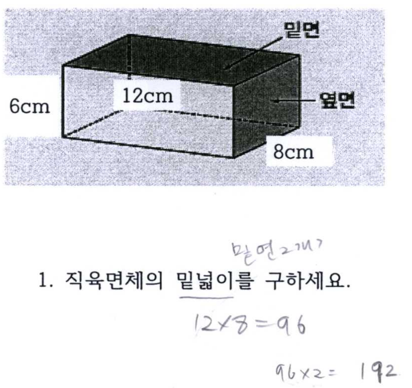
15) 이러한 결과에 대해서는 설문 문항의 직육면체에서 밑면과 옆면을 동시에 제시하면서 한 개의 밑면만을 표현한 것과도 관련해서 생각해볼 수 있을 것이다. 그러나 입체도형의 밑면을 이해하고 있는 비율과 현장교사의

학생은 16%(5명)로 나타났으며, 이들은 밑면을 위, 아래 2개로 보고 두 면의 넓이를 구한 것으로 보인다.[16)]

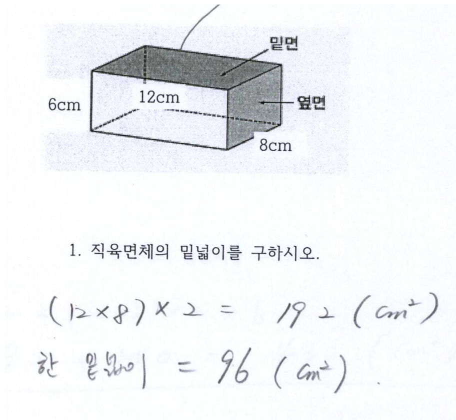
<표 V-1> 입체도형의 밑넓이 계산(1)

코드	키워드	코드의 의미	예비교사	현장교사
1A	한 면의 넓이	12×8=96(㎠)	25	8
1B	두 면의 넓이	12×8×2=192(㎠)	5	6
1C	1A+1B	96(㎠)와 192(㎠)를 함께 제시	1	1
1D	오답	계산 오류	1	0
			32	15

이에 비해 예비교사의 응답 비율은 현장교사와 상이한 경향을 보이는데, 현장교사 가운데 1A의 비율은 53%(8명)에 그친 반면 1B의 비율은 40%(6명)로 상대적으로 높게 나타남을 알 수 있다. 이는 초등수학에서 직육면체를 대상으로 밑면을 지도할 때 밑면이 위치에 따른 약속이 아니라 평행한 두 면임을 계속해서 강조한 것과도 관련되어 있다. 또한 직육면체에서 겉넓이가 6개 면의 넓이의 합이라는 점, 직육면체에서 밑면이 주어질 때 옆면은 밑면과 수직인 4개 면의 넓이의 합이라는 점 또한 밑넓이를 구할 때 영향을 미친 것으로 보인다.



<그림 V-2> 예비교사 1C



<그림 V-3> 현장교사 1C

한편 1A와 1B를 동시에 제시한 답안을 1C로 분류했는데, 현장교사의 경우 <그림 V-3>과 같이 밑넓이를 192(㎠)로 계산하면서 이에 덧붙여서 한 밑넓이라는 표현을 통해 96(㎠)을 함께 제시하고 있다. 이와 비슷하게 밑넓이를 1개만 구해야 할지, 2개를 모두 구해야 할지에 대한 고민은 예비교사의 경우 2명에게서 찾아볼 수 있었다.

본 설문은 첫 번째 문항에서 예비교사의 반응과 현장교사의 반응 사이에는 초등수학에서

결과를 보면 굳이 그림의 영향만은 아닌 것으로 보인다. 참고로 이 그림은 초등수학 교과서(5학년 1학기, 87쪽)에서 가져온 것이다.

16) 1B에 속하는 학생들의 경우 이후 입체도형의 밑면에 대한 설명에서는 2A(바닥에 닿은 면)가 2명, 2B(바닥에 닿은 면과 마주보는 면)가 각각 2명으로 조사되었는데, 이러한 결과에서 미루어 볼 때 본 연구에서는 밑넓이를 계산해서 구하는 것과 밑면에 대한 설명을 통한 밑넓이에 대한 이해 사이에서 그 관련성을 찾을 수 없었다.

중학교 수학으로의 이행에서 가정할 수 있는 '인지적 간격'을 확인할 수 있었다. 특히 현장교사의 경우는 이러한 간격 사이에서의 갈등이 보다 크게 나타나고 있는데, 이는 1A와 1B의 비율에서, 그리고 1C의 응답에서 알 수 있다.

2. 입체도형에서 밑면을 기술하는 문제

두 번째 페이지에 제시한 문항은 2개인데, 첫 번째는 '입체도형에서 밑면에 대해 설명하시오.'이고 두 번째는 '입체도형에서 옆면에 대해 설명하시오.'이다. 이 가운데 다음은 입체도형의 밑면을 어떻게 설명하고 있는지를 살펴본 것이다. 예비교사 및 현장교사를 대상으로 한 결과는 다음의 6가지 유형으로 구분할 수 있다. 유형별 코드는 2A부터 2F까지이며 각각에 대한 설명은 <표 V-2>와 같다.

<표 V-2> 입체도형의 밑면

코드	키워드	코드의 의미	예비교사	현장교사
2A	바닥	바닥과 닿고 있는 면	11	1
2B	바닥+ 다른 면 (아랫면+ 윗면)	바닥에 닿은 면과 이와 마주보는 면 또는 아랫면과 윗면	8	2
2C	아래(밑)	아래(밑)에 있는 면	3	1
2D	이름	입체도형의 이름을 결정하는 면	2	1
2E	평행	평행한 두 면	5	5
2F	임의의 면	모든 면이 가능하다	1	2
2G		기타(모서리로 둘러싸인 면, 옆면과 만나는 면, 높이를 표현할 수 있는 면 등)	2	3
			32	15

<표 V-2>에서 특징은 예비교사의 경우 72%(2A+2B+2C, 23명)가 바닥, 아래, 밑과 관련해서 밑면을 설명한다는데 있다. 이는 현장교사의 경우 2A, 2B, 2C의 응답이 모두 4명인 것과 대비된다. 코드 구분에서는 2A, 2B, 2C고 구분하고 있으나, 여기서 공통된 부분은 (세웠을 때) 바닥과 닿고 있는 면, 바닥에 닿은 면과 윗면, 평평한 아래쪽 면과 같이 설명하는 것이다. 이와 같은 설명은 밑면을 놓인 위치에 따라 인식하고 있음을 보여준다.

한편 이름을 키워드로 한 코드 2D의 경우 각기둥과 각뿔의 경우 밑면의 모양에 따라 입체도형의 이름이 결정된다는 점에 주목한 것이다. 그러나 초등수학 교과서에서 입체도형의 밑면에 대한 정의 가운데 하나인 평행으로 설명한 2E의 경우는 예비교사가 16%(5명), 현장교사가 33%(5명)로, 이 비율은 예비교사와 현장교사들이 용어를 이해하는데 차이가 있음을 보여준다. 또 하나의 특징은 밑면을 임의의 면(2F) 곧, 모든 면이 밑면이 될 수 있다는 응답인데 예비교사 1명은 밑면을 결정할 수 없다고 하였으며, 현장교사 2명은 기준이 되는 면이라면 모든 면이 밑면이 된다고 보았다. 각기둥과 각뿔을 구분해서 밑면을 구분하여 설명한 경우는 전체 응답자 가운데 현장교사 1명에 그치고 있다.

두 번째 문항 결과를 종합하면, 예비교사의 경우 밑면에 대한 일차적인 이해는 바닥(아래, 밑)에서 찾을 수 있다는 점이다. 반면 초등수학 교과서에서 밑면은 평행이 강조되는데, 이는 현장교사의 응답 비율에서 나타난다. 현장교사는 밑면을 바닥(아래, 밑)으로 보는 것과 평행으로 보는 것이 4:5로 나타났으며, 특히 각기둥과 각뿔을 구분하여 설명한 경우도 있었다.

3. 입체도형의 겉넓이, 밑넓이를 기술하는 문제

설문 5페이지에 제시된 문항은 3개인데, 이들 각각은 입체도형에서 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 설명하는 것이다. 이 가운데 살펴볼 문항은 겉넓이와 밑넓이에 관한 것으로, 겉넓이의 경우 밑넓이가 포함되어 있기에 그 유형을 구분해보려고 한다.

먼저 입체도형에서 겉넓이에 대한 설명은 <표 V-3>과 같은데, 예비교사의 경우 '밑면과 옆면의 넓이의 합'과 '모든 면의 합'이 각각 34%(11명)로 같은 비율을 보인 반면 현장교사의 경우 51C에 해당하는 (입체도형을 구성하는, 둘러싸는) 모든 면의 넓이의 합이 80%(12명)로 압도적으로 높게 나타났다. 이러한 차이는 초등수학 교과서에서 겉넓이에 대한 정의만 다루어질 뿐, 옆넓이와 밑넓이에 대한 설명이 없기 때문이다. 곧, 직육면체에서 겉넓이는 밑면과 옆면으로 구분해서 약속되는 것이 아니라 여섯 면의 넓이의 합으로 약속되고 있는데, 이 과정에서 여섯 면은 결국 직육면체를 구성하는(또는 둘러싸는) 모든 면이기 때문이다. 이에 비해 예비교사는 초등수학 교과서를 우선 고려하기 보다는 문항에서 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이가 차례대로 주어진 상황에 맞추어 답하거나 또는 중학교 수학에서 기둥의 겉넓이를 구하는 공식으로 (기둥의 겉넓이)=(밑넓이)×2+(옆넓이)을 학습한 상태이기에 밑면과 옆면의 넓이의 합을 겉넓이로 설명하는 경향을 보였다.

<표 V-3> 입체도형의 겉넓이

코드	키워드	코드의 의미	예비교사	현장교사
51A	밑+옆	밑면과 옆면의 넓이의 합 또는 밑넓이와 옆넓이의 합	11	2
51B	밑+위+옆	밑면, 윗면, 옆면의 넓이의 합	2	0
51C	모든 면	(입체도형을 구성하는, 둘러싸는) 모든 면의 넓이의 합	11	12
51D	겉	겉면의 합 또는 겉을 둘러싸고 있는 면의 합	7	1
51E	전개도	전개도에서의 넓이	1	0
			32	15

다음으로 입체도형에서 밑넓이에 대한 설명은 예비교사와 현장교사의 코드별 응답 비율에서 큰 차이를 보이지 않았다. 예비교사의 84%(27명), 현장교사의 60%(9명)는 밑넓이를 '밑면의 넓이'라고 했는데, 결국 이것은 <표 V-2>와 관련되어 있다. 곧, 겉넓이가 밑면과 옆면의 넓이의 합 또는 모든 면의 넓이의 합이라고 할 때, 밑넓이는 <표 V-2>의 각 코드에서 의미하는 그 '밑면'의 넓이라고 할 수 있다. 따라서 예비교사와 현장교사는 설문 이전에 가졌던 밑면에 대한 개념을 2번 문항을 거치면서 수정했거나 또는 5번 (1)의 겉넓이를 설명하는 동안 밑면의 넓이를 구하는 것을 다르게 볼 수 있었을 것이다. 그 결과는 <표 V-5>에서 밑넓이를 구하는 문제에서 드러난다. 한편 <표 V-4>에서 특징은 53E인데, 이는 기준이 되는 면의 넓이를 밑넓이로 설명한 것이다. 현장교사 가운데 2명이 이렇게 답을 한 것은 각기둥과 각뿔의 경우 그 이름을 결정하는 것이 밑면의 모양이고, 이 밑면이 기준이 된다고 생각해서 밑면이라는 표현을 대신하여 기준이 되는 면을 사용한 것으로 보인다.

<표 V-4> 입체도형의 밑넓이

코드	키워드	코드의 의미	예비교사	현장교사
53A	밑	밑면의 넓이	27	9
53B	두 밑면	마주보는 두 밑면의 넓이	1	2
53C	(겉넓이)-(옆넓이)	겉넓이와 옆넓이의 차	1	0
53D	두 밑면	평행한 두 면의 넓이	2	1
53E	기준	기준이 되는 면의 넓이	0	2
53X	무응답		1	1
			32	15

4. 직육면체의 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 구하는 문제

마지막 6페이지에 제시된 문항은 5페이지에서 입체도형의 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 설명했다면 이제 직육면체에서 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 각각 구하는 것이다. 이 때 문항에서 주어진 직육면체는 첫 번째 문항과 동일한 그림의 직육면체이다.

다음에서 <표 V-5>는 <표 V-1>과 같은 코드 분류로 응답자수를 조사하고 1번 문항과 비교한 것이다. 그런 다음 <표 V-6>은 설문 문항을 거치면서 <표 V-1>과 비교했을 때 밑넓이의 결과가 어떻게 변했는지 다시 분류하여 예비교사와 현장교사의 응답자수를 나타낸 것이다.

<표 V-5> 입체도형의 밑넓이 계산(2)

코드	키워드	코드의 의미	6번 문항		1번문항	
			예비교사	현장교사	예비교사	현장교사
4A	한 면의 넓이	12×8=96(㎠)	10	6	25	8
4B	두 면의 넓이	12×8×2=192(㎠)	19	8	5	6
4C	1A+1B	96(㎠)와 192(㎠)를 함께 제시	1	1	1	1
4D	오답	계산 오류	2	0	1	0
			32	15	32	15

<표 V-5>를 살펴보면 예비교사의 경우 밑넓이를 ‘한 밑면의 넓이’로 구한 1A에서 15명의 학생이 밑넓이를 ‘두 밑면의 넓이’(4B) 등으로 바뀌었음을 알 수 있다. 처음 문항과 마지막 문항에서 밑넓이를 ‘한 밑면의 넓이’로 그대로 구한 학생(1A⇒4A)은 10명에 그친 반면, 1A4B가 14명, 1C4B가 1명으로 나타났다. 4B에 속하는 19명 가운데 16명의 학생이 첫 번째 문항과 그 답을 달리 바꾸었으며, 특히 1A에서 4B로의 변화(96(㎠)⇒192(㎠))가 14명인데 비해, 1B에서 4A로의 변화(192(㎠)⇒96(㎠))는 한 명도 없었다. 현장교사의 경우 2명이 1A에서 4B로 그 답을 바꾼 것을 제외하면 예비교사만큼 변화의 폭은 크지 않지만, 예비교사와 같이 1B에서 4A로의 변화는 없었다. 그리고 1C4C의 경우는 현장교사 1명에게서 계속 유지가 되었으나, 1B4C에 해당하는 예비교사 1명은 밑면과 밑넓이를 설명하는 과정에서 밑넓이를 두 면의 넓이의 합으로 보았다가 한 면 또는 두 면 사이에서 혼란스러워하고 있음을 알 수 있다.

<표 V-6> 입체도형의 밑넓이 값의 변화

코드	키워드	코드의 의미	예비교사	현장교사
1A4A	1A ⇒ 4A	96(㎠) ⇒ 96(㎠)	10	6
1A4B	1A ⇒ 4B	96(㎠) ⇒ 192(㎠)	15	2
1B4B	1B ⇒ 4B	192(㎠) ⇒ 192(㎠)	3	6
1C4B	1C ⇒ 4B	96(㎠) 또는 192(㎠) ⇒ 192(㎠)	1	0
1B4C	1B ⇒ 4C	192(㎠) ⇒ 96(㎠) 또는 192(㎠)	1	0
1C4C	1C ⇒ 4C	96(㎠) 또는 192(㎠) ⇒ 96(㎠) 또는 192(㎠)	0	1
1B4D	1B ⇒ 4D	192(㎠) ⇒ 계산오류	1	0
1D4D	1D ⇒ 4D	계산오류 ⇒ 계산오류	1	0
			32	15

5. 설문 결과 분석 및 종합

다음은 지금까지의 논의를 종합하고 설문 결과에서 나타난 변화를 중심으로 분석한다.

2장에서부터 4장까지 곧, 밑변에서부터 밑면, 밑넓이를 교육과정과 교과서, 그리고 사전적 의미에서 살펴보았듯이, 밑변의 경우는 대상이 되는 평면도형에 따라 그리고 밑면의 경우는 입체도형에 따라 그 약속이 달라진다. 특히 밑변의 경우 용어의 이중적 의미 사용이라는 문제점도 함께 갖고 있으며, 밑면은 용어가 일관성 있게 약속되지 않았다는 문제점을 안고 있었다. 본 연구에서 출발점이 되었던 밑넓이의 경우, 밑면에서부터 형성된 용어의 이중성 또는 약속 과정의 비일관성이 밑넓이를 구하는 과정에서 중요한 요인으로 작용한다. 그리고 무엇보다 초등수학에서 밑넓이를 정의하지 않은 상태에서 중학교 수학에서 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이)로 사용되고 있는데, 이는 '인지적 간극'이라는 표현에서처럼 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행에서 간과되고 있다. 그리고 설문에서 알 수 있듯이, 이와 같은 인지적 간극으로 인해 초등수학 수준에서 밑넓이에 대한 인식과 그 값을 구하는 문제에 결정적인 영향을 미치고 있다.

설문 결과 대부분의 예비교사(84%, 27명)는 밑넓이를 밑면의 넓이로 설명하고 있다. 그리고 첫 번째 문항에서 78%(25명)의 예비교사가 밑넓이를 구하는 문제에서 '한 밑면의 넓이'에 해당하는 96(㎠)으로, 5명의 예비교사만이 '두 밑면의 넓이'인 192(㎠)를 구했는데, 이는 중학교 수학에서 기둥의 겉넓이와 부피를 구하는 과정을 학습하면서 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이)로 배웠기 때문으로 보인다. 그렇다면 마지막 문항에서 또 다시 밑넓이를 구하라고 했을 때 나타난 변화, 곧 밑넓이를 '한 밑면의 넓이'에서 '두 밑면의 넓이'로 구한 15명(전체의 47%, 1A에서의 60%)의 예비교사들의 변화는 어떻게 설명할 수 있을까?

이들은 첫 번째 문항에서 밑넓이를 구한 다음, 초등수학의 내용 범주에서 입체도형의 밑면(옆면 포함), 높이, 모서리, 꼭짓점, 밑넓이(겉넓이, 옆넓이 포함) 등에 대해 설명했다. 이 과정에서 주목할 부분은 밑면에 대한 설명인데, 먼저 1A4A의 10명 가운데 밑면을 '바닥과 닿은 면'(2A) 또는 '아래(밑)에 있는 면'(2C)으로 설명해서 결국 밑넓이를 밑면의 넓이, 그러니까 '한 밑면의 넓이'로 구한 경우이다.[17] 이 가운데 5명(S3, S4, S5, S8, S9)은 마지막 문

17) 이와 관련해서 밑면은 초등수학과 중학교 수학 모두에서 기둥의 경우는 '평행한 두 면'으로, 뿔의 경우는 '뿔의 반대쪽 면'으로 정의된다. 어떤 의미에서 밑면을 이와 같이 설명한 것은 위치에 따른 것으로 오개념에 해

항에서도 밑넓이를 처음과 같이 '한 밑면의 넓이'로 구했다(1A4A). 그러나 나머지 5명은 밑면을 설명한 것과는 상관없이 1A4A로 나타났다. 이들 나머지 5명의 예비교사들은 밑면, 밑넓이를 설명하는 것과 밑넓이를 구하는 것 사이에서 일관된 이해를 보이지 않는 것으로 나타났다.

특히 1A4B에서 밑면에 대한 설명과 밑넓이를 구하는 것 사이에는 어떤 일관성을 보이지 않고 있으며, 그 결과 밑넓이를 구하는 과정에서 '한 밑면의 넓이'에서 '두 밑면의 넓이'로 바뀐 배경이 된다. 밑면을 설명하는 문항에서 18명의 학생들은 밑면을 '밑면과 마주보는 면'(2B), '윗면과 아랫면'(2B), '평행한 두 면'(2E), '임의의 면'(2F) 등으로 기술했다. 무엇보다 1A4B 곧, 첫 번째 문항에서 밑넓이를 '한 밑면의 넓이'로 구한 학생들 가운데 마지막 문항에서 '밑넓이'를 '두 밑면의 넓이'로 그 값을 달리 구한 15명의 학생들 가운데 '밑면'에 대한 설명에서 2A, 2C(한 밑면)에 6명, 2B, 2E, 2F(두 밑면) 등에 9명 속하는데, 이것은 밑넓이가 밑면의 넓이라고 생각하지만 밑면에 대한 설명이 밑넓이를 구하는 것과는 연결되지 않고 있음을 보여준다.[18] 결국 1A4A, 1A4B에서 알 수 있는 사실은 밑넓이를 구하는데 중요한 변인이 밑면에 대한 이해와 그 설명보다는 중학교 수학에서 학습했던 '한 밑면의 넓이'로서의 밑넓이 개념임을 알 수 있다.

현장교사의 설문 결과를 살펴보면 이러한 분석에 보다 힘을 실어줄 수 있다.

현장교사는 첫 번째 밑넓이를 구하는 문항에서 1A:1B:1C=8:6:1이었으며, 마지막 문항에서는 4A:4B:4C=6:8:1이었다. 현장교사의 경우 초등수학에서 중학교 수학으로 이행하면서 비록 중학교 수학에서 밑넓이를 '한 밑면의 넓이'로 배웠다고 하더라도 다시 초등수학을 가르치면서 '밑면'의 정의를 강조해왔다. 실제로 '밑면'에 대한 설명에서 '바닥과 닿고 있는 면', '아래(밑)에 있는 면'이라고 답한 교사는 2명에 불과했다. 이는 예비교사가 설문 문항을 거치면서 초등수학을 되돌아보는 과정을 경험한 것과 비교해서 볼 수 있다. 그러다보니 첫 번째 문항에서 예비교사가 보인 1A:1B:1C=25:5:1, 마지막 문항에서의 4A:4B:4C=10:19:1과는 다른 결과가 나타났으며, 그래서 현장교사는 마지막 문항에서도 많은 변화를 보이지 않은 것이다.

여기서 현장교사는 2가지 경향으로 분류되는데, 그 가운데 하나는 중학교 수학에서 학습한 내용 지식을 그대로 적용하는 경우와 두 번째는 이와는 별도로 중등수학의 내용 지식을 가진 상태에서 초등수학에서 요구하는 내용 수준에서 답을 구하는 경우이다. 전자는 1A4A인 6명의 교사에게서, 후자의 경우는 1B4B인 6명과 그 사이에 변한 1A4B 2명에 해당한다. 특히 1A4A로 분류된 전자의 경우 1명만이 밑면에 대한 설명을 '바닥' 또는 '아래'로 했으나 나머지 5명은 '평행' 또는 '마주보는 면'이라고 했음에도 불구하고 밑넓이를 구하는 문제에서는 이들 5명 모두 '한 밑면의 넓이'를 구했는데, 이러한 점을 미루어볼 때 초등교사의 경우 중학교 수학 내용 지식을 초등수학에서 가르쳐질 내용 지식으로 변환시킬 때 그 간극을 고려하지 않음을 알 수 있다.[19]

이와 함께 현장교사는 예비교사와 달리 '밑면'을 비롯하여 입체도형에서의 여러 용어들에 대해 2가지 이상으로 설명하는데, 설문 문항에서 '밑넓이'의 경우에는 '밑면의 넓이'라고 답

당한다고 할 수 있다.

18) 특히 겉넓이를 설명하는 과정에서 모든 예비교사들은 겉넓이를 '밑면과 옆면의 넓이의 합', '모든 면의 넓이의 합', '겉면의 합'과 같이 설명하고 있는데, 이는 입체도형에서 밑넓이를 구하는 과정에 영향을 미쳤을 것으로 보인다.

19) 여기에 속하는 5명의 교사 가운데 4명은 5년 이하의 경력, 1명은 10년 이하의 경력에 속한다. 이는 교사 경력에 따른 변인 또한 후속과제가 될 수 있음을 보여준다.

한 경우를 포함해서 이 용어 자체에 대해 의문을 제기하는 경우도 있었다. 몇몇 현장교사의 경우는 설문이 끝나고 각 문항에 대한 정답과 해설에서 초등수학에서는 밑넓이가 나오지 않고 ‘한 밑면의 넓이’만이 나오기에 초등수학 시험에서 밑넓이를 구하라고 한다면 이것은 문제 자체의 오류임을 지적하기도 했다. 하지만 예비교사의 경우 밑넓이라는 표현에 대해 이러한 질문 또는 의문을 제기하지 않았는데, 이는 예비교사를 대상으로 초등수학에 대한 지도가 수학 용어에 대한 PCK와 함께 교과 내용 지식을 다루는 과정에서 초등수학에 국한할 것이 아니라 중학교 수학과의 비교를 통해 동시에 이루어져야 함을 보여 준다.

Ⅵ. 결론

본 연구는 초등학교 교사 A의 질문에서부터 시작되었다. 연구자 역시 너무나 자연스럽게 밑넓이를 ‘한 밑면의 넓이’로 이해하고 있었던 바, 교사 A처럼 6학년 2학기 중간 성취도 평가에서 출제된 문제에 대해 의문을 갖지 않았다. 그러나 몇몇 학생들이 교사 A에게 제기한 질문 곧, “선생님께서 (직육면체에서) 밑면은 어디까지나 평행한 두 면이라고 하지 않으셨나요? 그렇다면 한 밑면의 넓이를 구해서 곱하기 2를 한 게 맞지 않나요?”라는 질문에서 시작하여 초등수학에서 도형과 관련된 용어들을 검토하게 되었다.

그래서 평면도형에서의 밑변, 입체도형에서의 밑면, 그리고 밑넓이와 이를 구하는 문제를 위한 검토 작업을 시작했다. 연구의 초점이 맞추어지는 내용이 초등학교 5, 6학년 수학과 내용임을 감안하여 2007 개정 교육과정 및 교과서, 익힘책, 교사용 지도서를 일차적으로 검토하였으며, 이와 함께 사전적 정의를 비롯하여 수학 용어 및 입체도형에서 이루어진 선행연구를 살펴보았다.

그 결과 평면도형에서 밑변의 경우 대상이 되는 도형에 따라 2가지 약속하기로 설명되고 있으며 본 연구에서는 이를 확장해서 3가지 용례로 밑면을 정리했다. 입체도형에서 밑면의 경우는 직육면체, 각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔 각각에서 정의하고 있으나, 기둥과 뿔로 구분하여 2가지로 정의할 수 있다. 이 과정에서 밑변의 경우 도형과 측정(양)으로 이중적 의미로 사용되는 것에 대해 문제를 함께 살펴보았으며, 밑면에서는 각각의 정의에서 일관성이 결여되어 있음을 문제점으로 확인했다.

결국 밑넓이를 구하는 문제에서 학생들이 이의를 제기한 것은 초등수학에서 이 용어를 사용하지 않는다는 데서 직접적인 원인을 찾을 수 있다. 이는 교사 A가 문제를 출제할 때 간과했던 부분으로, 문제 자체에 밑넓이라는 용어를 사용한 것이 초등수학에서는 오류가 될 수 있다. 즉, 초등수학에서는 교과서와 익힘책 모두에서 ‘한 밑면의 넓이’라는 표현만을 사용하고 있기 때문이다. 그러나 겉넓이는 약속하기와 함께 그 값을 구하고 있으며, 옆넓이 역시 원기둥에서 그 값을 구하고 있기에 자연스럽게 밑넓이를 구하는 문제를 생각해볼 수 있다는 점에서 교사 A가 출제한 문제에서의 오류는 모든 초등교사에게 동일하게 나타날 수 있다.

본 연구는 초등수학에서 밑넓이라는 용어를 씀으로써 문제 자체에 오류가 있었음을 확인한 상태에서, 한편으론 초등수학에서 밑넓이를 구하는 것에 대해 보다 예비교사와 현장교사의 응답을 살펴보기 위해 설문을 실시했다. 교사 A가 이러한 질문을 했던 것과 관련해서 그리고 중학교 수학에서 아무런 정의 없이 (밑넓이)=(한 밑면의 넓이)로 하여 기둥의 겉넓이와 부피를 구하는 공식에서 사용하는 것과 관련해서 연구자는 초등수학에서 중학교 수학으로의 이행에서의 ‘인지적 간극’을 가정하고 이를 확인하기 위한 절차로 예비교사와 현장교사를 대상으로 설문을 한 것이다.

설문의 결과는 예비교사와 현장교사간의 차이를 분명하게 보여주고 있는데, 중학교에서 학습한 수학 내용 지식에 머물러 있는 상태의 예비교사와 그 상태에서 다시 초등수학을 지도하고 있는 현장교사의 경우는 그 자체만으로도 연구에서 가정한 '인지적 간극'을 보여주기에 충분하다. 또한 초등학교 수준에서 입체도형의 밑면, 높이, 꼭짓점, 모서리, 겉넓이, 옆넓이, 밑넓이를 차례대로 설명하는 과정을 통해 예비교사에게 초등학교 현장의 경험을 간접적으로 대체할 수 있는 기회를 제공했으며, 그 결과 첫 번째 문항과 마지막 문항에서 드러난 차이 역시 이러한 간극을 보여주고 있다.

따라서 본 연구에서는 다음과 같이 몇 가지 점에 대해 검토해볼 것을 제안하고 이를 통해 후속과제를 생각해본다.

먼저 초등수학에서 사용하고 있는 용어에 대한 분명한 정의와 함께 여기서 초점을 맞추고 강조해야 할 부분을 명확하게 해야 한다. 이를테면, 밑변의 경우 도형이든 측정(양)이든 한 가지 의미로 사용되어야 하며, 밑변 자체보다 밑변을 정의하는 대상 즉, 평면도형에 따라 그 정의를 달리 지도할 수 있어야 한다. 이와 함께 '밑변의 길이'를 구하는 문제에서도 '한 밑변의 길이'와 '두 밑변의 길이' 사이에서 그 반응을 살펴보는 것 또한 후속과제로 생각해볼 수 있을 것이다.

두 번째 밑면의 경우 정의에서 사용하는 용어들에 일관성을 부여해야 한다. 일례로 초등수학에서는 원기둥의 경우 평행이라는 성질이 빠져 있는데, 이에 비해 중학교 수학에서는 원기둥과 각기둥을 기둥으로 통일해서 다루면서 아무런 설명 없이 평행을 기술하고 있다. 이와 관련해서 초등수학은 6학년 1학기에 각기둥과 각뿔을, 6학년 2학기에 원기둥과 원뿔을 지도하는데 이는 다면체와 곡면체라는 측면에서 구분한 것으로, 중학교 수학에서처럼 기둥과 뿔이라는 관점에서 제시하는 것에 대해서도 후속과제를 통해 논의가 필요해 보인다.

세 번째는 밑변과 밑면을 정의하고 다루면서 과연 평행을 얼마만큼 강조해야 하는가이다. 이것 역시 본 연구의 후속과제로 생각해볼 수 있는데, 외국의 초등수학 교재에서는 밑변과 밑면에서 평행을 강조하지 않고 오히려 밑변과 밑면 모두를 base로만 다루고 있다. 그 예로 MiC 교재의 경우 기하와 측정 영역에 속하는 Made to Measure, Packages and Polygons, Reallotment(Holt, Rinehart, Winston, 2006a, 2006b, 2006c) 등에서 넓이와 부피를 구하는 과정에서 평행을 중요하게 다루지 않고 있다. 이와 마찬가지로 미국의 교과서 가운데 하나인 MACMILLAN/McGRAW-HILL(Ⅵ)(Clements, Malloy, Moseley, Orihuela & Silbey, 2005)을 살펴보면, 21장 평면도형의 넓이 가운데 넓이를 공식화하는 과정에서 밑변은 base로 나오는데 여기서도 평행에 대한 언급은 없으며, 22장 기둥에서 밑면인 bases를 정의할 때에만 평행이고 합동인 두 개의 면이라고 할 뿐 입체도형의 부피에서는 밑넓이를 'the area of the base'라고 하면서 평행을 다루지 않고 있다. 이와 관련해서 보다 많은 교과서 샘플을 통해서 비교 검토해볼 필요가 있을 것이다. 더불어 우리나라 교육과정을 종적으로 비교하면서 밑변, 밑면, 밑넓이에 대한 정의가 어떻게 진행되어왔는지를 살펴보는 것 또한 후속과제가 될 수 있을 것이다.

네 번째는 본 연구를 통해서 확인한 것처럼 초등수학과 중학교 수학 사이의 간극이다. 본 연구에 국한해서 보면 겉넓이, 옆넓이 모두가 초등수학에서 다루어지지만 밑넓이는 등장하지 않는다. 그러다가 중학교 수학에서는 마치 밑넓이를 배운 것처럼 '한 밑면의 넓이'로 사용하고 있다. 초등수학에서 직육면체에서 정의되는 겉넓이가 겉면에 속하는 여섯 면의 넓이의 합, 원기둥에서 옆넓이가 옆면에 속하는 (전개도 상에서) 직사각형의 넓이라면, 자연스럽게 밑넓이는 밑면에 속하는 두 면의 넓이로 생각할 수도 있는 것이다. 그러나 이 과정에서 밑넓이에 대한 정의는 초등수학에서도, 중학교 수학에서도 찾아볼 수 없다(이에 비해 영어

에서 단수와 복수를 이용해서 그 차이를 분명하게 하는데, 밑면은 'bases', 밑넓이는 'the area of the base'로 표현하고 있다). 초등수학과 중학교 수학 사이의 이행에서 특히 용어와 관련해서 정확한 용어의 사용이 수학적 개념을 낳고 문제를 해결하는데 결정적인 역할을 할 수 있다.

따라서 본 연구와 같이 초등수학과 중학교 수학을 비교하고 검토함으로써 이와 같은 문제점을 개선할 수 있는 후속연구가 계속될 수 있기를 기대한다.

참고 문헌

강옥기·권언근·이형주·우희정·윤상혁·김태희·김수철·유승연·윤혜미 (2013). 중학교 수학 1 교과서. 서울: 두산동아(주).

강홍규·조영미 (2000). 학교 수학에서의 다양한 정의 방법과 교수학적 의의. 대한수학교육학회 2000년도 춘계 수학교육학연구발표대회논문집, 161-186.

교육과학기술부(2011a). 초등학교 수학 5-1, 6-1, 6-2 교과서. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부(2011b). 초등학교 수학 5-1, 6-1, 6-2 익힘책. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부(2011c). 초등학교 수학 5-1, 6-1, 6-2 교사용지도서. 서울: 두산동아(주).

권석일·박교식 (2011). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 입체도형 관련 지도 내용에 대한 분석과 비판. 수학교육학연구, 21권 3호, 221-237.

권석일·박교식 (2011). 초등학교 수학 교과서에서의 용어 사용과 정의 방식에 관한 비판적 분석: 몇 가지 예를 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 15권 2호, 301-316.

김상화·방정숙·정유경 (2013). 평면도형의 넓이 수업에서 학생들의 다양한 해결 방법에 근거한 교사의 형식화 도출 과정. 학교수학, 15권 4호, 847-866.

박교식 (2011). 우리나라 초등학교 수학과 교육과정에서의 용어 등재와 수학 교과서에서의 용어 사용의 적합성에 관한 논의. 수학교육학연구, 21권 4호, 361-378.

박교식 (2007). 수학용어 다시보기. 서울: 수학사랑.

박교식·권석일 (2012). 우리나라 2011 초등수학 교육과정 등재용어의 조성에 관한 연구. 수학교육학연구, 22권 3호, 429-444.

우정호 (2013). 중학교 수학 1 교과서. 서울: 두산동아(주).

이영지 (2013). 초등학교 수학 교과서 다면체 지도 분석. 부산교육대학교 대학원 석사학위논문.

임승현·박영희 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 도형의 높이 개념에 대한 연구. 한국초등수학교육학회지, 15권 10호, 141-159.

정경순·임재훈 (2011). 직사각형, 평행사변형, 삼각형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 초등학생들의 이해 조사. 수학교육학연구, 21권 2호, 181-199.

최수임·김성준 (2012). 정의하기와 이름짓기를 통한 도형의 이해 고찰-초등학교 4학년 도형 영역을 중심으로-. 한국학교수학회논문집, 15권 4호, 719-745.

Amerom (2000). Arithmetic and algebra: Can history help to close the cognitive gap?. Freudenthal Institute.

Clements, D., Malloy, C., Moseley, L., Orihuela, Y. & Silbey, R. (2005). Math 1-6. New York: Macmillan/ McGraw-Hill.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of

Algebra(pp.60-86). NCTM.
Holt, Rinehart, Winston (2006a). Made to Measure. Mathematics in Context. Chicago: Britannica.
Holt, Rinehart, Winston (2006b). Packages and Polygons. Mathematics in Context. Chicago: Britannica.
Holt, Rinehart, Winston (2006c). Reallotment. Mathematics in Context. Chicago: Britannica.

A Study on the Understanding of the Base Area of Solid Figures in the Elementary Mathematics

Kim, Sung Joon[20]

Abstract

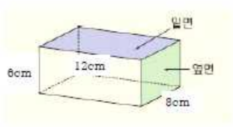
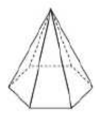
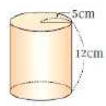
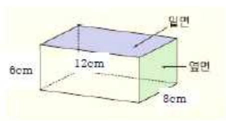
In this study, we investigate the term-sets of 'base' or 'bottom': 'the bottom side of a polygon' and 'the base side (of a geometrical figure)'. And we study the concept of 'the base area' in the solid figures and the formula of 'the bottom dimensions'. We start from the 6th grade math problem: 'Find the bottom dimension of the rectangular.' The primary answer is that it does not use the term('the bottom dimensions') in the elementary mathematics. However, in the middle school mathematics, 'the base area' is used as means of 'the area of one bottom side', which is not explained anywhere from the elementary mathematics to middle school mathematics. In addition, the base is defined and 'the surface area' and 'the side area' is taught in the elementary mathematics, so we naturally think of 'the base area'. Therefore we first investigate the term-sets of 'base' or 'bottom' which has two elements: 'the bottom side of a polygon' and 'the base side (of a geometrical figure)'. Next we discuss 'the base area' through curriculum and textbooks, dictionary definitions and so on. In addition, we survey pre-service teachers and teachers about the solid figures and analyse the understanding of 'the base side' and 'the base area' comparatively. In particular, we compare the changes and the tendency of correct answers from the first question to the last question. As a result, we verify 'the cognitive gap' between the elementary mathematics and the middle school mathematics, we suggest the teaching of 'the base area' and succession subjects to teach figure domain in the elementary mathematics.

Key Words : term-sets of 'base', bottom side of a polygon, base side, solid figures, base area, cognitive gap

Received April 21, 2014
Revised June 13, 2014
Accepted June 25, 2014

20) Busan National University of Education (joonysk@bnue.ac.kr)

<부록 1> 설문 전체 문항

Ⅰ  1. 직육면체의 밑넓이를 구하시오.	Ⅱ 1. 입체도형에서 밑면에 대해 설명하시오. 2. 입체도형에서 옆면에 대해 설명하시오.
Ⅲ  1. 각뿔에서 각뿔의 꼭짓점을 표시하시오. 2. 각뿔에서 높이를 설명하고 표시하시오.	Ⅳ  1. 원기둥의 옆넓이를 구하시오. 2. 면과 면이 만나는 선은 모서리입니다. 모서리를 표시하시오.
Ⅴ 1. 입체도형에서 겉넓이를 설명하시오. 2. 입체도형에서 옆넓이를 설명하시오. 3. 입체도형에서 밑넓이를 설명하시오.	Ⅵ  1. 직육면체의 겉넓이를 구하시오. 2. 직육면체의 옆넓이를 구하시오. 3. 직육면체의 밑넓이를 구하시오.

<부록 2> 예비교사와 현장교사 문항별 코딩 자료

학생	1번 문항	2번 문항	5번 문항(1)	5번 문항(3)	6번 문항	1번⇒6번
S1	1A	2B	51A	53A	4A	1A4A
S2	1A	2E	51A	53A	4A	1A4A
S3	1A	2C	51A	53A	4A	1A4A
S4	1A	2A	51D	53A	4A	1A4A
S5	1A	2A	51C	53A	4A	1A4A
S6	1A	2D	51C	53A	4A	1A4A
S7	1A	2B	51C	53A	4A	1A4A
S8	1A	2A	51B	53A	4A	1A4A
S9	1A	2A	51A	53A	4A	1A4A
S10	1A	2G	51C	53X	4A	1A4A
S11	1A	2E	51C	53A	4B	1A4B
S12	1A	2B	51A	53A	4B	1A4B
S13	1A	2B	51A	53A	4B	1A4B
S14	1A	2E	51A	53A	4B	1A4B
S15	1A	2D	51A	53A	4B	1A4B
S16	1A	2C	51A	53A	4B	1A4B
S17	1A	2C	51D	53A	4B	1A4B
S18	1A	2G	51C	53A	4B	1A4B
S19	1A	2E	51C	53A	4B	1A4B
S20	1A	2E	51C	53A	4B	1A4B
S21	1A	2A	51C	53A	4B	1A4B
S22	1A	2A	51C	53A	4B	1A4B
S23	1A	2A	51B	53A	4B	1A4B
S24	1A	2B	51D	53C	4B	1A4B
S25	1A	2A	51D	53B	4B	1A4B
S26	1B	2B	51A	53A	4B	1B4B
S27	1B	2A	51D	53A	4B	1B4B
S28	1B	2A	51E	53D	4B	1B4B
S29	1C	2F	51A	53D	4B	1C4B
S30	1B	2A	51C	53A	4C	1B4C
S31	1B	2B	51D	53A	4D	1B4D
S32	1D	2B	51D	53A	4D	1D4D

교사	1번 문항	2번 문항	5번 문항(1)	5번 문항(3)	6번 문항	1번⇒6번
T1	1A	2E	51C	53D	4A	1A4A
T2	1A	2G	51C	53A	4A	1A4A
T3	1A	2G	51C	53A	4A	1A4A
T4	1A	2E	51C	53A	4A	1A4A
T5	1A	2A	51C	53A	4A	1A4A
T6	1A	2F	51C	53B	4A	1A4A
T7	1A	2D	51D	53B	4B	1A4B
T8	1A	2E	51A	53X	4B	1A4B
T9	1B	2G	51C	53A	4B	1B4B
T10	1B	2F	51C	53A	4B	1B4B
T11	1B	2B	51C	53A	4B	1B4B
T12	1B	2B	51C	53A	4B	1B4B
T13	1B	2E	51C	53E	4B	1B4B
T14	1B	2C	51C	53E	4B	1B4B
T15	1C	2E	51A	53A	4C	1C4C