

## 비정렬 격자계에서 연속체 및 천이 영역 유동 해석을 위한 2차원 Gas-Kinetic BGK 해석자 개발

양 태 호, 권 오 준\*

한국과학기술원 항공우주공학전공

### DEVELOPMENT OF A 2-D GAS-KINETIC BGK SOLVER FOR CONTINUUM AND TRANSITIONAL FLOWS ON UNSTRUCTURED MESHES

T.H. Yang and O.J. Kwon\*

Dept. of Aerospace Engineering, KAIST

*In the present study, 2-D gas-kinetic flow solver on unstructured meshes was developed for flows from continuum to transitional regimes. The gas-kinetic BGK scheme is based on numerical solutions of the BGK simplification of the Boltzmann transport equation. In the initial reconstruction, the unstructured version of the linear interpolation is applied to compute left and right states along a cell interface. In the gas evolution step, the numerical fluxes are computed from the evaluation of the time-dependent gas distribution function around a cell interface. Two-dimensional compressible flow calculations were performed to verify the accuracy and robustness of the current gas-kinetic approach. Gas-kinetic BGK scheme was successfully applied to two-dimensional steady and unsteady flow simulations with strong contact discontinuities. Exemplary hypersonic viscous simulations have been conducted to analyze the performances of the gas-kinetic scheme. The computed results show fair agreement with other standard particle-based approaches for both continuum part and transitional part.*

**Key Words** : 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics), 볼츠만 방정식(Boltzmann Equation), Gas-Kinetic BGK 기법(Gas-Kinetic BGK Scheme), 천이 영역(Transitional Regimes), 비정렬 격자(Unstructured Meshes)

## 1. 서 론

항공우주 응용분야의 적용 범위가 크고 넓어짐에 따라 희박기체 영역과 연속체 영역을 동시에 고려할 수 있는 효율적인 통합 유동 해석 기술의 필요성이 대두되고 있다. 지난 20년간 미국과 유럽 각지에서는 희박기체 영역에 대한 유동 해석 알고리즘으로 직접모사법(DSMC: Direct Simulation Monte Carlo)을 선택하여 전통적인 연속체 해석 알고리즘과 결합하는 통합 해석 기법에 대한 연구가 주로 진행되었다. 하지만 직접모사법(DSMC)을 이용한 희박기체 유동 해석자는 해석 기법이 가지는 고유의 특성 때문에 Knudsen 수가 낮은 연속

체 영역과 천이 영역(transitional regime)에 대한 유동을 해석하는데 효율적이지 못하다는 단점을 가지고 있다.

2000년대에 들어서는 볼츠만 방정식의 직접 수치 해법을 이용한 희박 유동 해석 알고리즘과 연속체 유동 알고리즘을 결합하는 통합 해석 기법이 연구되기 시작하였다. 볼츠만 방정식의 직접 수치 해를 이용한 희박 유동 해석 알고리즘은 직접모사법(DSMC)이 가지는 수치적 한계를 극복하기에 충분하지만 계산에 많은 시간을 필요로 한다는 단점을 여전히 가지고 있다. 이와 같은 이유 때문에 통합 유동 해석 알고리즘의 수치적인 부담을 최대한 줄이기 위해서는 새로운 연속체 영역 해석 알고리즘을 이용하여 낮은 Knudsen 수의 천이 영역을 포함하는 넓은 범위의 유동을 해석해야만 한다.

최근에는 gas-kinetic 이론에 근거한 유동 해석 기법을 연속체 영역의 해석 기법으로 선택하여 통합 유동 해석 알고리즘의 수치적인 비용을 줄이는 연구가 활발하게 진행되고 있다. Gas-kinetic 이론을 기반으로 하는 해석 기법은 유동의 통계적

Received: May 27, 2014, Revised: June 20, 2014,  
Accepted: June 20, 2014.

\* Corresponding author, E-mail: ojkwon@kaist.ac.kr  
DOI <http://dx.doi.org/10.6112/ksce.2014.19.2.049>

© KSCFE 2014

인 특성과 거시적(macroscopic) 유동량과의 관계를 이용하여 유동을 모사하기 때문에 모사하고자 하는 기체 유동의 비평형 상태를 능동적으로 고려할 수 있다. Gas-kinetic 해석 기법은 기존의 연속체 해석 기법에 비해 플럭스 계산에 대한 수치적 부담이 크다는 단점을 가지고 있어 실제 항공우주 문제의 해석에는 자주 이용되지 않는다. 하지만 gas-kinetic 해석 기법을 기반으로 하는 해석자는 천이 영역을 포함하는 넓은 범위의 유동 영역을 비교적 정확하게 해석할 수 있기 때문에 통합 유동 해석 알고리즘의 구성에 있어서 희박 유동 해석 알고리즘에 대한 의존도를 줄일 수 있다.

Gas-kinetic 이론에 근거한 유동 해석 기법의 최초 예제는 Pullin[1]에 의해 고안된 평형 플럭스 기법(equilibrium flux method)이다. Deshpande[2]는 오일러 방정식의 해석을 위한 무충돌 볼츠만 방정식(collisionless Boltzmann equation) 기반의 gas-kinetic 플럭스 벡터 분할 기법을 개발하였다. Chou and Baganoff[3]는 Navier-Stokes 방정식을 해석하기 위한 무충돌 볼츠만 방정식 기반의 해석 기법을 최초로 제안하였다. 볼츠만 방정식의 BGK 단순화 모델[4]을 기반으로 하는 gas-kinetic 유동 해석 기법은 Prendergast and Xu[5]에 의해 본격적으로 연구되기 시작하였다. 최근에는 Ohwada[6]에 의해 gas-kinetic 이론에 근거한 유동 해석 기법의 수치적인 안정성과 정확성에 대한 정량적인 분석이 이루어졌다.

본 연구에서는 연속체 영역과 천이 영역을 해석하기 위한 비정렬 격자 기반의 gas-kinetic BGK 해석자를 개발하고 검증하고자 한다. 개발된 유동 해석 코드의 해석 정확도를 조사하기 위해 연속체 영역과 천이 영역 조건에서 실린더 주위의 초음속 유동장을 해석할 예정이다. 개발된 해석 코드를 이용하여 얻은 결과를 기 발표된 유사 연구의 해석 결과와 비교하여 gas-kinetic 해석 기법의 적용 가능 범위와 확장성에 대해 분석하고자 한다. 본 논문에서는 기체 유동의 비평형 상태를 능동적으로 모사하기 위해 사용한 수치적인 방법과 비정렬 격자계에서 격자 경계면에서의 분포 함수를 외재적으로 결정하기 위해 필요한 보편적인 공식들을 제공하였다.

## 2. 수치 해석 방법

### 2.1 볼츠만 방정식의 BGK 모델

볼츠만 방정식의 입자 충돌항(particle collision term)은 적분 형태의 복잡한 수식으로 구성되어 있기 때문에 직접적인 이산화를 통한 수치 해석이 매우 어렵다. 이에 반해 볼츠만 방정식의 BGK 모델은 평형 상태(equilibrium state)의 분포 함수(distribution function)  $g$ 를 이용하여 선형적으로 근사시킨 충돌항을 포함하고 있기 때문에 기체 발생(gas evolution) 과정을

수치적으로 모사하기에 용이하다. 2차원 속도 위상 공간(velocity phase space)에서의 기체 분포 함수  $f$ 를 결정하기 위한 볼츠만 방정식의 BGK 모델은 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{g-f}{\tau} \quad (1)$$

위 식에서  $\tau$ 는 특성 충돌 시간(characteristic collision time)으로 단일 입자가 충돌 이후에 이어지는 충돌을 하기까지 걸리는 평균적인 시간을 의미한다. 볼츠만 방정식의 근사 모델에서  $\tau$ 가 미시적(microscopic) 유동 속도에 의존하지 않는 국부 상수(local constant)라고 가정하면 위 식을 다음과 같은 적분 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t, \vec{u}, \xi) &= \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t g(\vec{x} - \vec{u}(t-t'), t', \vec{u}, \xi) e^{-(t-t')/\tau} dt' \\ &+ e^{-(t-t_0)/\tau} f_0(\vec{x} - \vec{u}(t-t_0), t_0, \vec{u}, \xi) \end{aligned} \quad (2)$$

볼츠만 방정식의 입자 충돌항은 기체 입자 사이의 이체 충돌(binary collision)에 의해 발생하는 위상 변화와 이에 따른 입자 수의 변화에 대한 정보를 포함하고 있다. 기체 입자 간의 충돌 이후에도 충돌 전의 물리량이 보존되는 물리적인 제한 조건 때문에 기체 분포 함수  $f$ 와 평형 상태의 분포 함수  $g$  사이에는 다음과 같은 호환 조건(compatibility condition)[7]이 존재한다.

$$\begin{aligned} \int \psi_\alpha (g-f) d\Xi &= \int \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2+v^2+\xi^2) \end{pmatrix} (g-f) d\Xi = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.2 Gas-Kinetic BGK 유한 체적법

본 연구에서 개발한 비정렬 격자 기반의 gas-kinetic BGK 해석자는 격자점을 중심으로 한 유한 체적법을 기반으로 한다. 격자점 중심의 유한 체적법은 생성된 격자계에 대해 가상의 dual 격자를 생성하고 각각의 dual 격자를 제어 체적(control volume)으로 간주한다. 본 연구에서는 격자점 주위에 인접한 다른 격자 요소들의 모사리 중심들과 도심들을 연결하여 구성되는 median dual 제어 체적을 기반으로 기체 발생 과정을 모사하였다. Median dual 격자 중심에서의 거시적 유동 변수들은 내재적(implicit)인 시간 적분법을 통해 매 시간

단계마다 갱신된다.

### 2.2.1 Initial Reconstruction

격자 경계를 지나는 플럭스를 계산하는데 있어서 공간에 대해 2차의 정확도를 얻기 위해서 격자 경계면에서의 유동 변수들을 주위에 존재하는 격자들의 유동 변수들을 이용하여 재구성(reconstruction)하였다. Median dual 격자 경계면에서의 거시적 유동 변수들은 격자 중심에서의 1차 미분된 유동 변수들을 이용하여 다음과 같이 계산하였다.

$$q(x, y) = q(x_{cc}, y_{cc}) + \nabla q_{cc} \cdot \Delta r + O(\Delta r^2) \quad (4)$$

위 식에서  $x_{cc}$ 와  $y_{cc}$ 는 각각 median dual 격자 중심에서의  $x$  좌표와  $y$  좌표를 의미하고  $\nabla q_{cc}$ 는 격자 중심에서의 1차 미분된 유동 변수를 의미한다. Median dual 격자 중심에서의 1차 미분된 유동 변수들을 계산하기 위해 Green-Gauss 정리를 이용하는 방법과 선형 최소제곱방법(least square method)을 사용하였다.

### 2.2.2 Gas Evolution

Gas-kinetic 이론에 의하면 모사하고자 하는 실제 기체의 거시적 유동 변수들은 분포 함수  $f$ 에 대한 미시적 유동 변수들의 모멘트(moment)를 계산하여 얻을 수 있다[7]. 격자 경계면에서의 기체 분포 함수를 외재적인 형태로 근사할 수 있다면 격자 경계를 지나는 플럭스를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{ci}(\vec{q}) &= \begin{pmatrix} F_{\rho} \\ F_{\rho U} \\ F_{\rho V} \\ F_{\rho e} \end{pmatrix}_{ci} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int u_n \psi_{\alpha} f_{ci} d u d v d \xi d t \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int u_n \begin{pmatrix} 1 \\ n_x u_n + t_x u_t \\ n_y u_n + t_y u_t \\ \frac{1}{2}(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2) \end{pmatrix} f_{ci}(\vec{x}_{ci}, t, u_n, u_t, \xi) d u d v d \xi d t \end{aligned} \quad (5)$$

Median dual 격자 경계면에 대한 속도 성분 ( $u_n, u_t$ )와 직교 격자계에 대한 속도 성분 ( $u, v$ ) 사이의 관계는 격자 경계면에 대해 수직인 방향과 접하는 방향의 단위 벡터의 성분들을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & n_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & t_x \\ n_y & t_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_t \end{pmatrix} \quad (7)$$

격자 경계면에 대한 국부 좌표 성분을  $x_{n_{ci}}$ 라고 하면 격자 경계를 기준으로 하는 2차 Taylor 전개식을 통해 평형 상태의 분포 함수  $g$ 와 초기 상태의 비평형 분포 함수  $f_0$ 를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$g = \begin{cases} g_0 \left[ 1 + \overline{a_L}(x_n - x_{n_{ci}}) + \overline{A}t \right], & \text{if } x_n \leq x_{n_{ci}} \\ g_0 \left[ 1 + \overline{a_R}(x_n - x_{n_{ci}}) + \overline{A}t \right], & \text{if } x_n > x_{n_{ci}} \end{cases} \quad (8)$$

$$f_0 = \begin{cases} g_L \left[ 1 + a_L(x_n - x_{n_{ci}}) \right], & \text{if } x_n \leq x_{n_{ci}} \\ g_R \left[ 1 + a_R(x_n - x_{n_{ci}}) \right], & \text{if } x_n > x_{n_{ci}} \end{cases} \quad (9)$$

위 식에서  $g_L$ 과  $g_R$ 은 각각 격자 경계를 기준으로 왼쪽과 오른쪽 상태에서의 평형 기체 분포 함수를 의미하고  $g_0$ 는 격자 경계에서 형성된 새로운 평형 상태를 의미한다. 평형 상태의 분포 함수  $g_0$ 를 결정하는 거시적 유동 변수들은 격자 경계를 기준으로 왼쪽과 오른쪽 평형 상태의 분포 함수를 이용하여 계산할 수 있다[8]. 평형 상태와 초기 비평형 상태를 구성하는 slope  $\overline{a_L}, \overline{a_R}, a_L, a_R$ 는 격자 경계면을 기준으로 재구성된 거시적 유동 변수들과 그 1차 미분 값들을 이용하여 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} \int g_L \overline{a_L} \psi_{\alpha} d \Xi &= \int g_L \overline{a_L} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ u_t \\ \frac{1}{2}(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2) \end{pmatrix} d \Xi \\ &= \frac{1}{\Delta s} \begin{pmatrix} \rho_0 - \rho_{L_{cc}} \\ (\rho U_n)_0 - (\rho U_n)_{L_{cc}} \\ (\rho U_t)_0 - (\rho U_t)_{L_{cc}} \\ (\rho e)_0 - (\rho e)_{L_{cc}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int g_R \overline{a_R} \psi_{\alpha} d \Xi &= \int g_R \overline{a_R} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ u_t \\ \frac{1}{2}(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2) \end{pmatrix} d \Xi \\ &= \frac{1}{\Delta s} \begin{pmatrix} \rho_{R_{cc}} - \rho_0 \\ (\rho U_n)_{R_{cc}} - (\rho U_n)_0 \\ (\rho U_t)_{R_{cc}} - (\rho U_t)_0 \\ (\rho e)_{R_{cc}} - (\rho e)_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int g_L \alpha_L \psi_\alpha d\Xi = \int g_L \alpha_L \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ u_t \\ \frac{1}{2}(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2) \end{pmatrix} d\Xi \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla \rho_L \\ \nabla (\rho U_n)_L \\ \nabla (\rho U_t)_L \\ \nabla (\rho \varepsilon)_L \end{pmatrix}_{ci}$$

$$\int g_R \alpha_R \psi_\alpha d\Xi = \int g_R \alpha_R \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ u_t \\ \frac{1}{2}(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2) \end{pmatrix} d\Xi \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla \rho_R \\ \nabla (\rho U_n)_R \\ \nabla (\rho U_t)_R \\ \nabla (\rho \varepsilon)_R \end{pmatrix}_{ci}$$

위 식에서  $ce$ 는 median dual 격자의 중심을 의미하고  $\Delta s$ 는 median dual 격자 중심으로부터 격자 경계면까지의 최소 거리를 의미한다. 평형 상태의 기체 분포 함수를 구성하는 slope  $\bar{A}$ 는 다음과 같은 관계식을 이용하여 계산할 수 있다[9].

$$\int_0^{\Delta t} \int (g-f) \psi_\alpha d\Xi dt = 0 \quad (14)$$

Heaviside 단계 함수를 이용하여 격자 경계에서의 기체 분포 함수를 다음 식과 같이 외재적인 형태로 결정할 수 있다.

$$f(x_{n_{ci}}) = g_0(1 - e^{-\tau/t}) + u_{g0}[te^{-\tau/t} + \tau(e^{-\tau/t} - 1)]$$

$$\begin{aligned} & [\bar{a}_L H(u_n) + \bar{a}_R(1 - H(u_n))] \\ & + \tau A g_0(t/\tau + e^{-\tau/t} - 1) \\ & + e^{-\tau/t}[g_L(1 - ut a_L)H(u_n) \\ & + g_R(1 - ut a_R)(1 - H(u_n))] \end{aligned} \quad (15)$$

위 식에서처럼 CFL 시간 간격  $\Delta t$ 와 특성 충돌 시간  $\tau$ 의 비가 격자 경계면에서의 플럭스 계산에 직접적인 영향을 미친다. 점성 효과를 고려한 유동 해석에서의 특성 충돌 시간은 운동 점성 계수(kinematic viscosity coefficient)  $\nu$ 와 압력  $p$ 를 이용하여 다음 식과 같이 계산한다.

$$\tau = \frac{\nu \rho}{p} \quad (16)$$

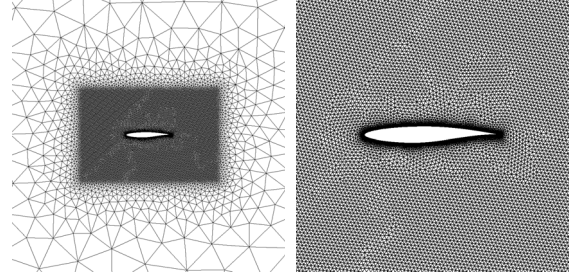


Fig. 1 Computational mesh for RAE2822 airfoil

한정된 수치적 자원을 이용하여 충격파와 같이 유동의 구배가 큰 불연속면을 정확하게 모사하기 위해서는 격자 크기에 비례한 수치 점성항을 인위적으로 추가하여 시간 전진을 수행해야 한다. 본 연구에서는 불연속 영역을 동반하는 기체 유동의 발생 과정을 능동적으로 모사하기 위해 압력 구배에 의존하는 항을 이용하여 다음 식과 같이 특성 충돌 시간을 결정하였다.

$$\tau = \frac{\nu \rho}{p} + \Delta t \min \left( 1, 5 \frac{|p_L - p_R|}{p_L + p_R} \right) \quad (17)$$

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 익형 주위의 정상 유동 해석

비경렬 격자를 기반으로 하는 gas-kinetic 유동 해석자의 정확성을 검증하기 위해 RAE2822 날개 단면 주위를 흐르는 2차원 정상 유동을 해석하였다. 익형 표면에서의 점성 효과를 고려하지 않기 때문에 벽면 근처를 포함한 모든 계산 영역을 삼각형 격자요소들로 분할하였다. 천음속 유동에 의해 발생하는 충격파의 위치와 그 크기를 보다 정확하게 예측하기 위해 익형 주위의 계산 영역을 작은 크기의 격자들로 분할하였다(Fig. 1).

RAE2822 익형에 대해 마하수 0.75, 받음각 3.00°의 자유류 조건에서 정상해(steady solution)를 계산하여 정렬 격자 기반의 기 발표된 해석 결과[7]와 비교하였다. Gas-kinetic 해석 기법을 이용하여 계산한 양력 계수와 항력 계수를 Roe의 플럭스 차분 분할 기법을 이용하여 얻은 해석 결과와 비교하여 Table 1에 나타내었다. Fig. 2는 정상 유동 해석 결과로부터

Table 1 Results of steady state flow calculations

	Roe's FDS	Gas-Kinetic BKG	Ref. Solution[7]
$C_L$	1.0759	1.0782	1.1325
$C_D$	0.0439	0.0441	0.0471

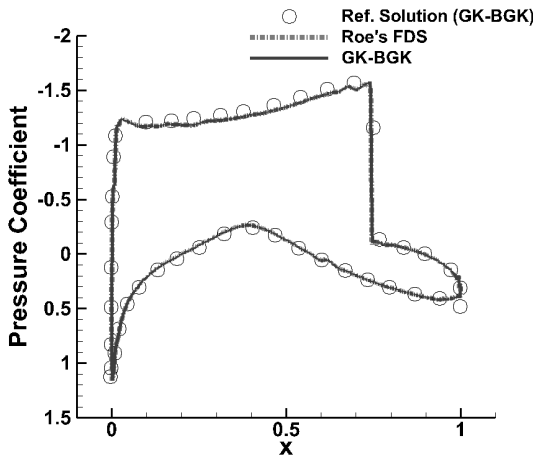


Fig. 2  $C_p$  distribution of RAE2822 airfoil

얻은 날개 단면 위의 압력 계수 분포를 참조해와 비교하여 나타낸 그림이다. Fig. 2의 압력 분포로부터 개발된 gas-kinetic 해석 코드가 흡입면(suction side)에서 발생하는 충격파의 위치와 그 크기를 정확하게 예측했음을 확인할 수 있다.

### 3.2 초음속 전방 계단 문제 해석

개발된 gas-kinetic 해석 코드의 강건성을 조사하기 위해 초음속 유동을 포함하는 2차원 비정상 충격파 문제를 해석하였다. 공간에 대한 2차의 정확도를 확보하기 위해 격자 경계면에서의 유동 변수들을 선형적으로 재구성하였고 충격파 주위에서 발생하는 비물리적인 진동을 줄이기 위해 제한자(limiter)를 사용하였다. 차분화된 지배방정식을 시간에 대해 내재적으로 적분하는 과정에서 가상 시간(pseudo time)을 이용하여 매 시간 단계에 대한 해를 수립시켜 선형화(linearization)에 의한 오차를 줄였다.

초음속 전방 계단 테스트[10]는 균일한 초음속 유동(Mach 3)이 일정한 높이의 계단이 존재하는 풍동으로 유입되면서 발생하는 강한 충격파를 모사하기 위한 사례이다. 초음속 유동이 유입되는 풍동 입구의 너비는 1 단위 길이(length unit)이고 전방 계단을 포함하는 계산 영역의 전체 길이는 3 단위 길이이다. 계산 영역의 왼쪽 경계로부터 전체 길이의 20%만큼 떨어진 곳에 0.2 단위 길이의 높이를 가지는 전방 계단이 위치하고 있다. 계산 영역의 왼쪽 경계에는 일정한 자유류 조건이 고정되는 유입 경계 조건(inflow boundary condition)이 주어지고 오른쪽 경계에는 모든 유동 변수들의 1차 미분값들이 소멸되는 유출 경계 조건(outflow boundary condition)이 주어진다. 초기 상태의 풍동 내부에는 비열비(specific heat ratio)가 1.4인 gamma-law 기체가 다음과 같은 초기 조건을 가지고 균일하게 채워져 있다.

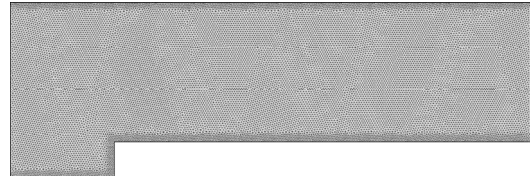
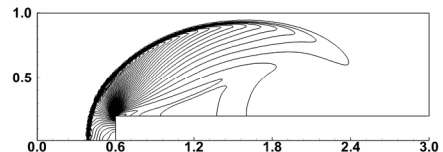
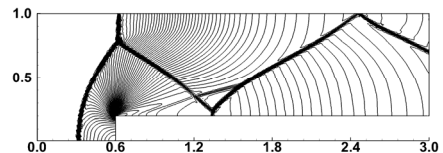


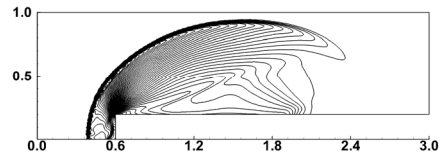
Fig. 3 Computational mesh for forward facing step



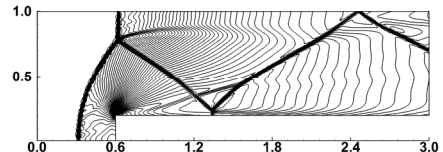
(a) Pressure contour at  $t = 0.5$



(b) Pressure contour at  $t = 4.0$



(c) Density contour at  $t = 0.5$



(d) Density contour at  $t = 4.0$

Fig. 4 Pressure and density contours of forward facing step with Mach 3

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ U_0 \\ V_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 3.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

초음속 유동의 유입에 의해 발생하는 충격파를 모사하기 위해 계산 영역을 35,521개의 균일한 삼각형 격자요소들로 분할하였다(Fig. 3). 초기 상태에서 최종 시간( $t = 4.0$ )까지의 비정상해(unsteady solution)를 계산하기 위해 0.002의 실제 시간 간격을 사용하여 2000번의 시간 전진을 수행하였다. Gas-kinetic 해석 기법을 이용하여 계산한 비정상해의 압력과 밀도 분포를 각각 Fig. 4에 나타내었다.

초기에는 계단 전방에서 강력한 충격파가 위쪽 벽면 경계에 반사되고 시간이 지남에 따라 세 충격파가 만나는 마하 반사(Mach reflection)로 발달하는 것을 관찰할 수 있다. Fig. 4(d)로부터 확인할 수 있듯이 세 충격파가 만나는 삼중점에서는 밀도가 다른 두 영역을 구분하는 접촉면(contact wave)에 의해 미끄럼선(slip line)이 발생하였다. 개발된 gas-kinetic BGK 해석자는 계단 모서리에서의 비물리적인 엔트로피 증가로 인해 발생하는 경사충격파와 위쪽 벽면 경계를 따라 발달하는 반사 충격파를 성공적으로 예측하였다.

### 3.3 Hypersonic Viscous Flows about a Cylinder

천이 영역을 포함하는 넓은 범위의 유동에 대한 gas-kinetic 해석 기법의 정확성을 검증하기 위해 실린더 주위의 초음속 점성 유동장을 모사하였다. 개발된 gas-kinetic 해석자를 이용하여 얻은 정상 해석 결과를 실린더 벽면 경계에서의 온도 점프(temperature jump) 효과를 고려하여 얻은 기 발표된 정상 해석 결과[11]와 비교하여 나타내었다.

실린더 전면부 주위의 모든 계산 영역은 일정한 자유류 조건을 가지는 아르곤(Argon) 기체가 고르게 채워져 있다고 가정한다. 아르곤과 같은 단원자 기체(monoatomic gas)의 열적 비평형은 기체 입자의 병진 운동(translational motion)에 의해서만 발생하기 때문에 기체 유동의 모사에 있어서 회전(rotation)이나 진동(vibration)에 의해 발생하는 열적 비평형 상태를 고려할 필요가 없다. 아르곤 기체 입자가 가지는 내부 자유도(internal degree of freedom)가 0이라는 사실을 이용하면 2차원 아르곤 기체 유동에 대한 평형 분포 함수  $g$ 를 다음 식과 같이 맥스웰-볼츠만 분포(Maxwell-Boltzmann distribution)를 따르는 형태의 함수로 표현할 수 있다.

$$g = \rho \left( \frac{\theta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\theta[(u-U)^2 + (v-V)^2 + \xi^2]} \quad (19)$$

위 식에서  $U$ 와  $V$ 는 아르곤 기체 유동의 거시적 속도 성분을 나타내고  $\theta$ 는 유동의 거시적인 밀도와 압력을 통해 다음과 같이 정의되는 변수이다.

$$\theta \equiv \frac{\rho}{2p} \quad (20)$$

Table 2 Flow conditions of hypersonic viscous simulations

Species	$M_\infty$	$Kn_\infty$	$Re_\infty$	Regime
Argon	5.48	0.001	9031.61	Continuum
Argon	5.48	0.025	361.26	Transitional
Argon	5.48	0.3	30.105	Transitional

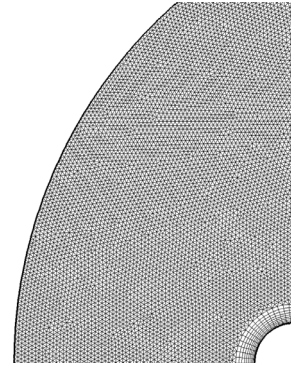


Fig. 5 Computational mesh for hypersonic viscous simulation ( $Kn=0.3$ )

아르곤 기체 입자의 평균 자유 행로(mean free path)와 점성 계수(viscosity coefficient) 사이의 관계식을 이용하여 자유류 조건에 해당하는 Reynolds 수, 마하수, Knudsen 수의 관계를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$Re_\infty = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{M_\infty}{Kn_\infty} \quad (21)$$

실린더 주위를 흐르는 초음속 아르곤 유동을 모사하기 위해 연속체 영역과 천이 영역 유동에 해당하는 세 가지 자유류 조건을 사용하였고 세 가지 해석 조건에 해당하는 자유류 Knudsen 수는 0.001, 0.025, 0.3이다. 정상해의 계산을 위한 서로 다른 세 가지 유동 조건을 계산하여 Table 2에 나타내었다. 세 가지 해석 조건에 해당하는 Reynolds 수가 매우 작기 때문에 실린더 주위의 모든 유동을 층류(laminar flow)라고 가정하였다. 실린더 벽면 경계에는 실린더 벽면으로부터 반사되는 모든 입자들이 에너지 밀도의 손실없이 확산적으로 반사되는 경계 조건이 주어진다. 실린더 벽 경계에는 10개의 사각형 격자층을 쌓아서 벽면을 중심으로 형성된 층류 경계층(laminar boundary layer)을 모사하였고 실린더 주위를 포함한 원방의 모든 계산 영역을 균일한 크기의 삼각형 격자요소들로 분할하였다(Fig. 5). 원방의 격자계를 구성하고 있는 삼각형 요소들은  $Kn=0.001$ ,  $Kn=0.025$ ,  $Kn=0.3$ 인 경우에 대해 각각 자유류 조건의 평균 자유 행로(mean free path)의 100%, 80%, 16.7%에 해당하는 크기를 가진다.

Fig. 6(a)는  $Kn=0.001$ 의 유동 조건에서의 정상 해석 결과로부터 얻은 실린더 전면부 주위의 마하수 분포와 온도 분포를 나타낸 그림이다. Fig. 6(a)의 마하수 등고선으로부터 확인할 수 있듯이 실린더 앞면으로부터 실린더 지름의 40%만큼 떨어진 위치에 강한 세기의 궁형충격파(bow shock)가 발생하

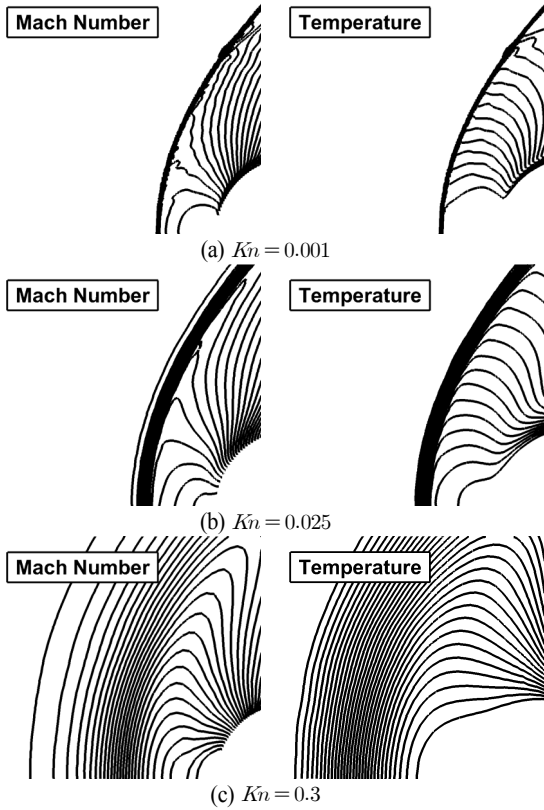


Fig. 6 Mach number and temperature contours for the cylinder at Mach 5.48

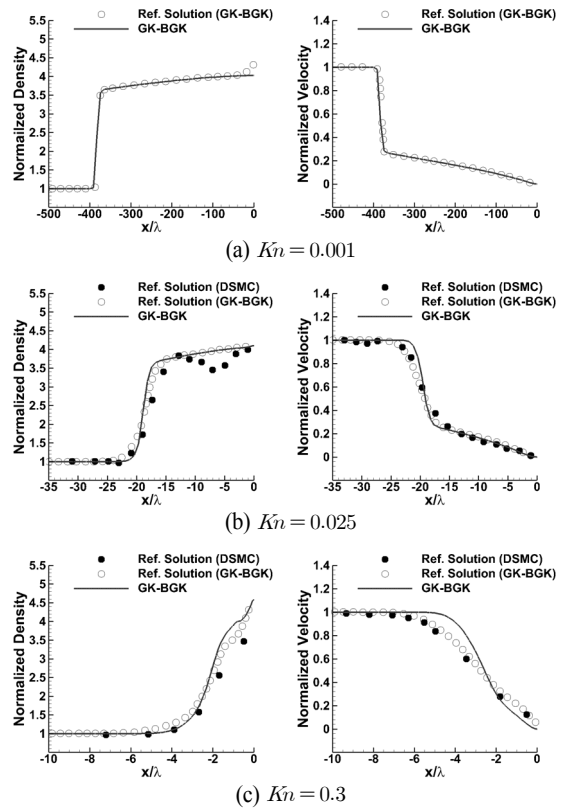


Fig. 7 Stagnation line profiles for the cylinder at Mach 5.48

었다.  $Kn = 0.001$ 의 해석 조건에서는 아르곤 기체가 연속체 유동에 가까운 특징을 가지기 때문에 실린더 앞전 주위의 정상 충격파가 매우 얇게 형성되는 모습을 관찰할 수 있었다. Fig. 7(a)는 정상해로부터 얻을 수 있는 stagnation line에서의 밀도와 속도 프로파일을 나타낸 그림이고 이를 통해 gas-kinetic 해석 기법을 이용하여 얻은 해석 결과가 참조해 [11]와 거의 일치하는 모습을 확인할 수 있다.

Fig. 6(b)는  $Kn = 0.025$ 의 유동 조건에서의 정상해로부터 얻은 마하수 등고선과 온도 등고선을 나타낸 그림이다.  $Kn = 0.025$ 의 기체 유동에서는 실린더 앞전으로부터 실린더 지름의 50%만큼 떨어진 위치에  $Kn = 0.001$ 의 유동 조건에서 형성되었던 충격파보다 두꺼운 궁형충격파가 형성되었다. Fig. 7(b)는 gas-kinetic 해석자를 이용하여 얻은 유동 해석 결과를 직접모사법(DSMC)을 이용하여 얻은 해석 결과[10]와 비교하여 나타낸 그림이다. Gas-kinetic BGK 해석자는 입자 기반의 해석자에 비해 불연속 영역의 두께를 얇게 모사하였지만 충격과 전후의 유동 변수들을 거의 비슷하게 예측하였다. Fig. 6(c)는  $Kn = 0.3$ 의 유동 조건에서의 해석 결과로부터 얻

은 실린더 앞전 근처의 마하수 분포와 온도 분포를 나타낸 그림이다. Fig. 6(c)로부터 실린더 앞전에서부터 앞전으로부터 실린더 지름의 150%만큼 떨어진 위치까지 유동 변수들이 완만하게 변화하는 충격층(shock layer)이 형성되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 7(c)는  $Kn = 0.3$ 의 해석 조건에서 계산하여 얻은 stagnation line에서의 밀도와 속도 프로파일을 입자 기반 기법의 참조해[12]와 비교하여 나타낸 그림이다. Gas-kinetic 해석자는 실린더 전면의 충격층 영역을 연속체 유동에서의 불연속 영역처럼 가파르게 모사하였지만 충격층 내부를 포함한 원방 영역에 대해서 참조해[11]와 비슷한 결과를 예측하였다.

연속체 영역에 해당하는 해석 조건에서는 실린더 전면의 충격파를 기준으로 유동 변수들의 구배가 큰 불연속 영역을 관찰할 수 있었다. 높은 Knudsen 수의 해석 조건에서는 실린더 앞전 근처에서 정상 충격파가 따로 형성되지 않고 벽면에서의 유동 변수들이 원방으로 멀어질수록 완만한 기울기를 가지고 자유류 조건에 가까워지는 모습이 관찰되었다. 개발된 gas-kinetic 해석자를 이용하여 얻은 초음속 점성 유동에 대한

정상해는 직접모사법을 이용하여 얻은 참조해[12]와 비교적 일치하는 경향을 보여주었다. 하지만 gas-kinetic BGK 해석자는 자유류 조건의 Knudsen 수가 증가할수록 직접모사법(DSMC)을 기반으로 하는 해석자에 비해 불연속 영역의 두께를 보다 가파르게 모사하는 경향이 관찰되었다. 이에 반해 실린더 벽면에서의 온도 점프 효과를 고려한 gas-kinetic 유동 해석자[11]는 높은 Knudsen 수의 해석 조건에서도 입자 기반 기법의 해석자와 유사한 경향의 해석 결과를 보여주었다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 연속체 영역과 천이 영역 유동을 해석하기 위한 비정렬 격자 기반의 gas-kinetic BGK 해석자를 개발하고 검증하였다. 볼츠만 방정식의 입자 충돌항을 직접 계산하여 유동을 수치적으로 해석하는 것은 매우 어려운 일이기 때문에 gas-kinetic 이론에 근거하여 평형 상태의 분포 함수를 이용한 새로운 근사 모델을 도입하였다. 비정렬 격자를 기반으로 하는 gas-kinetic 해석 기법의 정확성을 검증하기 위해 2차원 익형 주위의 정상 유동을 해석하고 참조해와 비교하였다. 개발된 해석 기법을 이용하여 얻은 해석 결과는 참조해와 비교적 잘 일치할 뿐만 아니라 천이속 조건에서 생기는 충격파의 위치와 그 크기를 정확하게 모사하였다. Gas-kinetic BGK 해석자의 강건성을 조사하기 위해 초음속 유동을 동반하는 2차원 충격파 문제를 해석하였다. 개발된 해석자는 전방 계단을 포함하는 초음속 풍동 내부의 충격파의 반사와 상호 간섭 작용을 성공적으로 모사하였다.

천이 영역을 포함하는 넓은 범위의 유동에 대한 해석 정확도를 조사하기 위해 실린더 주위의 초음속 아르곤 기체 유동장을 모사하였다. 개발된 gas-kinetic 해석자는 연속체 영역과 천이 영역 조건의 초음속 실린더 유동에 대해 직접모사법(DSMC)을 기반으로 하는 해석자의 결과와 비교적 일치하는 해석 결과를 예측하였다. 하지만 gas-kinetic BGK 해석자는 입자 기반의 해석 자에 비해 자유류 조건의 Knudsen 수가 증가할수록 유동의 불연속 영역을 보다 가파르게 모사하는 경향을 보여주었다. 추후에는 개발된 유동 해석자에 벽면 경계에서의 온도 점프 효과를 능동적으로 고려하는 모델을 적용시켜 비교적 높은 Knudsen 수의 유동 조건에 대한 계산 정확도를 증가시키는 연구가 필요할 것으로 보인다.

Gas-kinetic 이론에 근거한 유동 해석 기법은 별도의 연산 과정을 거치지 않고 비평형 상태와 평형 상태를 동시에 고려하기 때문에 기체 입자의 충돌 효과를 능동적으로 고려할 수 있다는 장점을 가지고 있다. Gas-kinetic BGK 기법을 기반으로 하는 유동 해석자가 천이 영역을 포함하는 넓은 범위의 기체 유동에 대한 높은 해석 정확도를 확보하게 되면 직접

볼츠만 해석 기법과의 연계를 통한 효율적인 통합 유동 해석 기법의 개발이 가능할 것으로 전망한다.

#### 후 기

본 연구는 2014년도 방위사업청과 국방과학연구소의 지원에 의한 기초연구과제(UD130050CD)와 관련된 연구의 일부로서 수행되었음을 밝히며, 이에 감사드립니다.

#### Note

This paper is a revised version of a paper presented at the KSCFE 2014 Spring Annual meeting, Jeju, Jeju, May 22-23, 2014.

#### References

- [1] 1980, Pullin, D.I., "Direct Simulation Methods for Compressible Inviscid Gas Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol.34, pp.231-244.
- [2] 1986, Deshpande, S.M., "A Second Order Accurate, Kinetic-Theory Based, Method for Inviscid Compressible Flows," *NASA Langley Technical Paper*, Vol.2613, pp.270-289.
- [3] 1996, Chou, S.Y. and Baganoff, D., "Kinetic Flux-Vector Splitting for the Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.130, pp.217-230.
- [4] 1954, Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. and Krook, M., "A Model for Collision Processes in Gases I: Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," *Physical Review*, Vol.94, pp.511-525.
- [5] 1993, Prendergast, K. and Xu, K., "Numerical Hydrodynamics from Gas-Kinetic Theory," *Journal of Computational Physics*, Vol.109, pp.53-66.
- [6] 2002, Ohwada, T., "On the Construction of Kinetic Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.177, pp.156-175.
- [7] 1998, Xu, K., "Gas-Kinetic Schemes for Unsteady Compressible Flow Simulations," *VKI for Fluid Dynamics Lecture Series 1998-03*.
- [8] 2001, Xu, K., "A Gas-Kinetic BGK Scheme for the Navier-Stokes Equations and Its Connection with Artificial Dissipation and Godunov Method," *Journal of Computational Physics*, Vol.171, pp.289-335.
- [9] 2007, May, G., Srinivasan, B. and Jameson, A., "An



- Improved Gas-Kinetic BGK Finite-Volume Method for Three-Dimensional Transonic Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol.220, pp.856-878.
- [10] 1984, Woodward, P. and Colella, P., "Numerical Simulations of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *Journal of Computational Physics*, Vol.54, pp.115-173.
- [11] 2013, Fossati, M., Guardone, A., Vigevano, L. and Xu, K., "Kinetic Node-Pair Formulation for Two-Dimensional Flows from Continuum to Transitional Regime," *AIAA Journal*, Vol.51, pp.784-796.
- [12] 1968, Vogenitz, F.W., Bird, G.A., Broadwell, J.E. and Rungaldier, H., "Theoretical and Experimental Study of Rarefied Supersonic Flows about Several Simple Shapes," *AIAA Journal*, Vol.6, pp.2388-2394.