

RM 등기하 판요소를 이용한 적층판의 자유진동 및 선형좌굴 해석

Vibration and Buckling Analysis of Laminated Composite Plates using RM Isogeometric General Plate Element

김 하 룡*
Kim, Ha-Ryong

이 상 진**
Lee, Sang-Jin

Abstract

A study on the vibration and buckling analyses of laminated composite plates is described in this paper. In order to carry out the analyses of laminated composite plates, a NURBS-based isogeometric general plate element based on Reissner-Mindlin (RM) theory is developed. The non-uniform rational B-spline (NURBS) is used to represent the geometry of plate and the unknown displacement field and therefore, all terms required in this element formulation are consistently derived by using NURBS basis function. Numerical examples are conducted to investigate the accuracy and reliability of the present plate element. From numerical results, the present plate element can produce the isogeometric solutions with sufficient accuracy. Finally, the present isogeometric solutions are provided as future reference solutions.

Keywords : Isogeometric Analysis, Laminated composite plate, Free vibration, Linear buckling, NURBS, Refinement

1. 서 론

복합재료는 높은 강성과 강도 그리고 탁월한 내구성능을 가지고 있어 건축, 토목, 항공, 조선 등의 여러 공학 분야에서 폭 넓게 이용되고 있다. 건설분야에서는 복합재료를 이용한 적층판의 이용이 점점 증가하고 있으며 이와 관련하여 적층판에 대한 이론적 그리고 수치적 연구가 활발하게 이루어지고 있다¹⁾. 특히 적층판의 동적특성 및 좌굴특성을 정확히 파악하기 위한 해석기법들이 지속적으로 연구되어지고 있다. 적층판은 판폭두께비에 따라 얇은 판과 두꺼운 판으로 분류된다. Kirchhoff이론에 기저한 고전판이론이 적층판의 해석을 위해 처음 도입되었고 점차 횡전단변형을 고려할 수 있는 두꺼운 판이론이 도입되었다. 이때 Reissner-Mindlin(RM)

이론과 같은 일차전단변형이론과 함께 고차전단변형이론이 도입되기도 하였다. 또한 적층판의 해석에는 유한요소법, 경계요소법, 무요소법과 같은 수치해석기법이 이용되고 있다. 전술한 수치해석기법은 일반적으로 해석을 수행하기 위해 먼저 기하학적 모델을 설정하고 설정된 모델에 유한요소망을 형성한다. 기하학적 모델을 설정하는 데는 CAD도구나 유한요소해석 전처리기를 이용하며 기하학적 모델을 바탕으로 최종 형성된 유한요소망은 대상구조물이 근사하게 표현된 것이다. 잘 알려진 바와 같이 기하학적 모델을 근사하게 표현한 유한요소망은 유한요소해석 결과에 오차를 발생시키게 된다. 이러한 수치해석적 단점을 보완하기 위하여 최근 Hughes^{2,3)}등이 등기하해석(Isogeometric analysis)의 개념을 제시하였다. 이 등기하해석 기법은 구조물의 기하학적 모델을 형성하는데 이용한 기저함수를 구조물의 해석모델에 동일하게 적용한다. 현재 다양한 분야에서 등기하해석기법을 점진적으로 도입되고 있으나 구조역학분야에서는 아직 그 적용이 미진하다^{4,7)}. 따라서 본 연구에서는 등기하해석의

* 경상대학교 계산역학연구소, 특임연구원, 공학박사

** 교신저자, 경상대학교 건축공학과 교수, PhD

Architectural Eng. Dept. & Eng. Research Institute

Gyeongsang National University

Tel: 055-757-2230, Fax: 055-757-7022

E-mail : lee@gnu.ac.kr

개념을 도입하여 RM 적층판요소를 개발하고 이를 이용하여 적층판의 자유진동 및 선형좌굴 해석을 수행한 뒤 그 결과를 기술하였다.

2. 기하학적 모델의 정의

2.1 노트벡터(Knot vector)

노트벡터는 B-스플라인⁸⁾의 기저함수(Basis function)를 정의하는 바탕이 되며 아래와 같다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

여기서 n 은 B-스플라인의 기저함수의 수이며, p 는 기저함수의 차수를 나타낸다.

2.2 기저함수

B-스플라인의 기저함수는 재귀적 방법⁹⁾으로 아래와 같이 정의된다.

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (p=0) \quad (2)$$

$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) \quad (p=1,2,3,\dots) \quad (3) \\ + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi).$$

다시 말하면 차수가 $p=0$ 인 기저함수에서 시작하여 $p=1,2,3,\dots$ 를 가지는 기저함수로 전개된다.

2.3 NURBS곡면

NURBS곡면은 B-스플라인 곡면에 가중치를 도입한 것으로 B-스플라인으로 표현하기 힘든 원, 타원 같은 형태를 정확히 표현하기 위해서 개발되었다. NURBS로 생성되는 곡면은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) C_{i,j} \quad (4)$$

여기서 $C_{i,j}$ 는 조절점을 나타내고 기저함수 $R_{i,j}^{p,q}$ 는 아

래와 같다.

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \quad (5)$$

여기서 $w_{i,j}$ 는 가중치를 나타낸다.

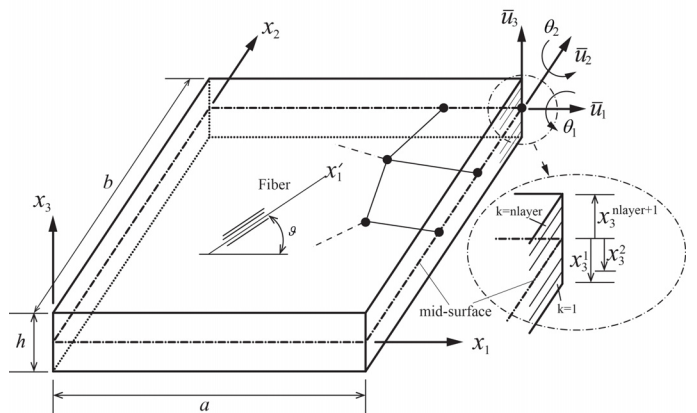
3. RM 적층판이론

3.1 변위장

적층판의 변위장은 횡전단 변형을 고려하기 위하여 RM이론을 바탕으로 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \bar{u}_1(x_1, x_2) + x_3\theta_2 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \bar{u}_2(x_1, x_2) - x_3\theta_1 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \bar{u}_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 \bar{u}_1, \bar{u}_2 는 각각 x_1, x_2 방향의 면내변위이며 \bar{u}_3 는 판의 중앙면에서의 처짐을 θ_1, θ_2 는 회전변위를 나타낸다.



<Fig.1> Sign convention of laminated plate

3.2 변형률의 정의

판의 변형률은 아래식과 같이 면내변형률 ϵ_p 와 면외변형률 ϵ_s 로 표현된다.

$$\epsilon_p = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{(0)} \\ \epsilon_2^{(0)} \\ \gamma_{12}^{(0)} \end{Bmatrix} + x_3 \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \\ \gamma_{12}^{(1)} \end{Bmatrix} = \{e^{(0)}\} + x_3 \{e^{(1)}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \{\gamma^{(0)}\} \quad (7)$$

여기서 변형률 항은 각각 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(0)}\} &= \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1,1} \\ \bar{u}_{2,2} \\ \bar{u}_{1,2} + \bar{u}_{2,1} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{2,1} \\ -\theta_{1,2} \\ \theta_{2,2} - \theta_{1,1} \end{Bmatrix}, \\ \{\gamma^{(0)}\} &= \begin{Bmatrix} \theta_2 + \bar{u}_{3,1} \\ \theta_1 - \bar{u}_{3,2} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

3.3 응력-변형률의 정의

적층판의 각 층은 직교 이방성 물질로 두께 방향의 수직응력을 $\sigma_3 = 0$ 으로 가정하였다. 따라서 적층판 k 번째 층의 재료좌표계에 대한 응력-변형률의 관계는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \{\sigma'\}^k &= [C]^k \{\varepsilon'\}^k \\ \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_{12} \\ \tau'_{13} \\ \tau'_{23} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma'_{12} \\ \gamma'_{13} \\ \gamma'_{23} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)의 행렬 $[C]$ 의 성분은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E'_1}{1 - \nu'_{12}\nu'_{21}}, \quad C_{22} = \frac{E'_2}{1 - \nu'_{12}\nu'_{21}}, \\ C_{12} &= \frac{\nu'_{21}E'_1}{1 - \nu'_{12}\nu'_{21}} = C_{21}, \\ C_{33} &= G'_{12}, \quad C_{44} = G'_{13}, \quad C_{55} = G'_{23} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 E'_1, E'_2 는 재료축 x'_1 방향과 x'_2 방향에 대한 탄성계수를 나타내고 $G'_{12}, G'_{13}, G'_{23}$ 은 전단탄성계수를 나타내며 ν'_{12}, ν'_{21} 은 프와송비를 나타낸다.

그리고 전체좌표계의 응력-변형률 관계식은 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^k &= [T] \{\sigma'\}^k = [T] [C]^k \{\varepsilon'\}^k \\ &= [T] [C]^k [T]^T \{\varepsilon\}^k \\ &= [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}^k \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $[T]$ 는 재료좌표계와 전체좌표계의 변환행렬을 나타내며 아래식과 같다.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 2sc & 0 & 0 \\ sc - sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c - s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $c = \cos\theta$ 이고 $s = \sin\theta$ 이다.

3.4 힘의 정의

힘의 성분은 제 3.3절에 정의된 응력을 두께 방향으로 적분하면 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\gamma^{(0)}\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서 N, M, Q 은 축력, 모멘트 그리고 전단력을 나타낸다.

4. 등기하 판요소의 정식화

본 연구에서는 등기하 판요소를 정식화하기 위해 서 노트좌표계를 사용하였으며 노트의 간격이 양방향으로 겹칠 때 형성되는 영역을 하나의 요소로 정의한다. 참고로 유한요소법에서는 유한요소망의 절점과 요소를 기준으로 판의 거동을 계산하지만 등기하해석법은 기하학적 모델의 조절점과 요소로 정의되는 영역을 기준으로 계산하게 된다.

4.1 등기하요소에 대한 변위장

전술한 바와 같이 등기하해석법은 구조물의 기하학적인 모델과 변위장을 정의할 때 동일한 기저함수를 사용한다. 따라서 조절점만 다섯 개의 자유도를 가지는 등기하요소의 위치벡터와 변위장은 식(5)에서 정의한 기저함수를 이용하여 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^{n \times m} R_a(\xi, \eta) \mathbf{x}^a & [K - \omega_k^2 M] \phi_k &= 0 & (18) \\
 \mathbf{u}(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^{n \times m} R_a(\xi, \eta) \mathbf{u}^a & & &
 \end{aligned}$$

여기서 $n \times m$ 은 전체 조절점의 수이며 R_a 는 기저 함수다. \mathbf{u}^a 는 조절점 a 에서의 변위를 나타내고 변위벡터 \mathbf{u}^a 의 각 성분은 아래와 같다.

$$\mathbf{u}^a = \{ \overline{u_1^a}, \overline{u_2^a}, \overline{u_3^a}, \theta_1^a, \theta_2^a \}. \quad (15)$$

4.2 변형률-변위 관계 행렬

제 3.2절에서 정의된 변형률은 판의 변형률-변위 행렬 B 를 이용하여 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \sum_{a=1}^{n \times m} B_p^a \mathbf{u}^a = \sum_{a=1}^{n \times m} (B_0^a + B_1^a) \mathbf{u}^a, & (16) \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_s &= \sum_{a=1}^{n \times m} B_s^a \mathbf{u}^a = \sum_{a=1}^{n \times m} B_2^a \mathbf{u}^a
 \end{aligned}$$

여기서 변형률-변위 행렬 B_p^a, B_s^a 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 B_0^a &= \begin{bmatrix} \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_2} & \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_1^a &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_1} & \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \\
 B_2^a &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_1} & 0 & R_a^{p,q} \\ 0 & \frac{\partial R_a^{p,q}}{\partial x_2} & -R_a^{p,q} & 0 \end{bmatrix}. & &
 \end{aligned} \quad (17)$$

4.3 자유진동해석의 정식화

본 연구에서는 자유진동해석을 수행하기 위하여 감쇠와 외력의 영향을 고려하지 않고 가상일의 원리를 이용하여 고유치 문제를 형성하였다. 고유치 문제를 형성하면 아래와 같다.¹⁰⁾

여기서 ϕ_k 는 조절점에서의 모드벡터를 나타내며 w_k 는 k 번째 고유진동모드에 관련된 고유진동수이다. 그리고 K, M 은 전체 강성행렬과 질량행렬을 나타내며 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 K &= K^{ab} = K_b^{ab} + K_s^{ab} & (19) \\
 &= \int_{\Omega} B_p^a D_p B_p^b d\Omega + \int_{\Omega} B_s^a D_s B_s^b d\Omega \\
 &= K_N + K_M + K_Q
 \end{aligned}$$

$$M = M^{ab} = \int_{\Omega} R_a^T \rho R_b d\Omega \quad (20)$$

여기서 K_N, K_M, K_Q 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 K_N &= \int_{\Omega} (B_0^a A B_0^b + B_1^a B B_1^b) d\Omega, & (21) \\
 K_M &= \int_{\Omega} (B_0^a B B_1^b + B_1^a D B_1^b) d\Omega, \\
 K_Q &= \int_{\Omega} (B_2^a G B_2^b) d\Omega.
 \end{aligned}$$

식 (19)와 식(20)은 노트좌표계를 이용하면 아래와 같이 다시 표현된다.

$$\prod_{e=1}^{n_{el}} [K^{ab}]^{(e)} = \prod_{e=1}^{n_{el}} \iint_{k_e}^{k_{e+1}} [B_p^a D_p B_p^b] \det(J) d\xi d\eta \quad (22)$$

$$+ \prod_{e=1}^{n_{el}} \iint_{k_e}^{k_{e+1}} [B_s^a D_s B_s^b] \det(J) d\xi d\eta$$

$$\prod_{e=1}^{n_{el}} [M^{ab}]^{(e)} = \prod_{e=1}^{n_{el}} \iint_{k_e}^{k_{e+1}} [R_a^T \rho R_b] \det(J) d\xi d\eta \quad (23)$$

여기서 $n_{el} (= n_{span} \times n_{span})$ 은 전체 요소수를 나타내며, $[k_e, k_{e+1}]$ 은 노트좌표계 ξ, η 에서의 노트간격으로 등기화요소 e 의 적분범위를 나타낸다. J 는 자코비안 행렬이며 질량행렬 m 은 아래와 같다.

$$m = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_1 & 0 & -I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 & I_3 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서 질량행렬 m 의 성분은 아래와 같다.

$$(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3) = \sum_{k=1}^{nlayer} \int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}} (1, x_3, (x_3)^2) \rho_k dx_3. \quad (25)$$

4.4 선형좌굴해석의 정식화

본 연구에서는 선형좌굴해석을 수행하기 위하여 아래의 고유치 해석을 수행하였다.

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G] \phi_k = 0 \quad (26)$$

여기서 \mathbf{K} 는 식 (19)의 강성행렬이며, λ 는 선형좌굴 하중 상수이며, \mathbf{K}_G 는 기하학적 강성행렬로 아래와 같다.

$$\mathbf{K}_G = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^L \boldsymbol{\sigma}^0 d\Omega \quad (27)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 는 면내 초기응력을 $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ 은 그린(Green)변형률을 나타내며 아래와 같다.

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^0 & \tau_{12}^0 \\ \tau_{12}^0 & \sigma_2^0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^L \\ \varepsilon_2^L \\ \gamma_{12}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2) \\ u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2} \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

5. 수치예제

본 연구를 통해 개발된 등기하 적층판요소의 성능을 조사하기 위하여 대칭 및 비대칭 적층판에 대한 자유진동해석과 선형좌굴해석을 수행하였다. 수치예제에 사용된 공통의 경계조건(SS1)은 아래와 같다.

$$SS1: \begin{aligned} \overline{u_1} = 0, \overline{u_3} = 0, \theta_2 = 0, \quad at \quad x_2 = 0, x_2 = a, \\ \overline{u_2} = 0, \overline{u_3} = 0, \theta_1 = 0, \quad at \quad x_1 = 0, x_1 = a, \end{aligned} \quad (30)$$

그리고 판의 물성치($M1$)는 아래와 같다.

$$M_1 = E_1/E_2 = 40.0, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad (31) \\ G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25.$$

본 연구의 수치예제의 결과들은 자유진동해석과 선형좌굴해석에 대해 아래의 식을 이용하여 무차원화 하였다.

$$\overline{\omega} = (\omega a^2/h) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (32)$$

$$\overline{N} = N_1 \lambda b^2 / (E_2 h) \quad (33)$$

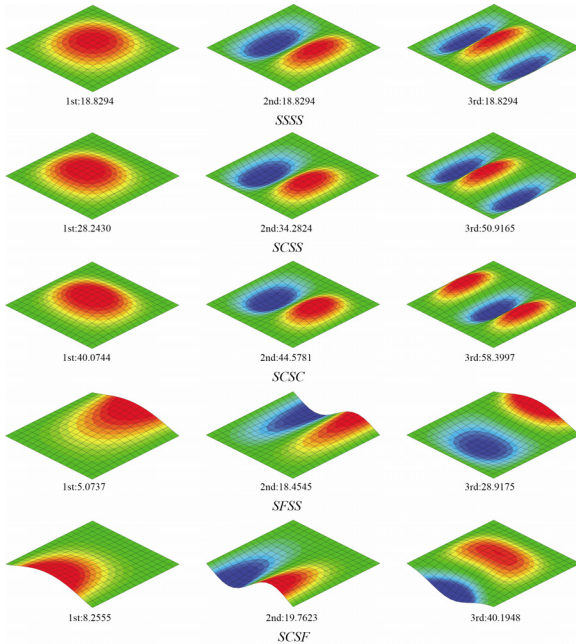
5.1 대칭 3층 직교 적층판 자유진동해석

이 예제는 다양한 경계조건을 가지는 적층판의 동적특성을 파악하기 위하여 세 개층 ($0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$)을 가지는 직교 적층판의 자유진동 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 물성치는 M_1 이며 적층판의 두께 변화를 고려하기 위하여 세가지 판폭두께비 $a/h = 5, 10, 100$ 를 이용하였다. 적층판에 적용된 경계조건은 *SSSS, SCSS, SCSC, SFSS, SFSC* 다섯 가지이며 여기서 *S*는 단순지지(SS1), *C*는 고정지지, *F*는 자유단을 말한다. 경계조건은 첫 번째 문자는 $x_2 = 0$ 에서의 경계조건이며 두 번째 문자는 $x_1 = 0$ 에서의 경계조건을 나타내고 있으며 세 번째와 네 번째 경계조건은 각각 $x_2 = a$ 와 $x_1 = a$ 에 주어진 경계조건이다. <Table 1>은 다양한 경계조건에 대한 무차원화된 기본고유진동수를 나타내고 있으며 수치해석결과들은 정해^{1,12)} 및 수치해^{10,11)}와 비교하였다.

<Table 1>에 기술된 수치해석결과로부터 본 연구에서 개발된 등기하 판요소는 해석에 이용한 모든 기저함수에서 경계조건 및 판폭두께비에 상관없이 참고해와 약 1%미만의 차이를 보이는 해석결과를 도출하였다. 특히 본 연구를 통해서 도출된 등기하해는 정해와 거의 일치하는 것으로 나타났다. 경계조건에 따른 기본 고유진동수의 값은 고정지정된 변이 많이 포함된 경우, 즉 경계조건이 단단할 때, 더 높게 나타났다. <Fig. 2>에는 기저함수의 차수가 $p = 5$ 이고 판폭두께비가 $a/h = 100$ 일 때 계산된 적층판의 1,2,3차 고유모드형상을 도시하였다.

<Table 1> The non-dimensionalized fundamental frequency($\bar{\omega}$) of cross-ply laminated plate $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ with various boundary conditions.

a/h	Theory	<i>SSSS</i>	<i>SCSS</i>	<i>SCSC</i>	<i>SFSS</i>	<i>SFSC</i>
5	$p=2$	10.2896	10.6462	11.2657	4.5438	5.9370
	$p=3$	10.2895	10.6462	11.2657	4.5437	5.9369
	$p=4$	10.2895	10.6462	11.2657	4.5437	5.9369
	$p=5$	10.2895	10.6462	11.2657	4.5437	5.9369
	Tran-Co ⁽¹¹⁾	10.2780	10.6280	11.2387	4.5613	5.9370
10	Liew ⁽¹²⁾	10.290	10.647	11.266	4.545	5.938
	Exact ^(1,13)	10.290	10.646	11.266	4.544	5.937
	$p=2$	14.7663	17.1747	19.6689	4.9145	7.3315
	$p=3$	14.7662	17.1746	19.6688	4.9143	7.3313
	$p=4$	14.7662	17.1746	19.6688	4.9143	7.3313
100	$p=5$	14.7662	17.1746	19.6688	4.9143	7.3313
	Tran-Co ⁽¹¹⁾	14.7823	17.1806	19.6614	4.9401	7.3372
	Liew ⁽¹²⁾	14.767	17.176	19.669	4.917	7.333
	Exact ^(1,13)	14.766	17.175	19.669	4.914	7.331
	$p=2$	18.8343	28.2560	40.1057	5.0831	8.2624
100	$p=3$	18.8294	28.2430	40.0745	5.0742	8.2562
	$p=4$	18.8294	28.2430	40.0744	5.0739	8.2558
	$p=5$	18.8294	28.2430	40.0744	5.0737	8.2555
	Tran-Co ⁽¹¹⁾	18.9005	28.4750	40.5937	5.1007	8.2665
	Liew ⁽¹²⁾	18.769	28.164	40.004	5.301	8.451
Exact ^(1,13)	18.891	28.501	40.743	5.076	8.269	



<Fig.2> A cross-ply laminated plate $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ with various boundary conditions: mode 1 - mode 3.

5.2 비대칭 2층 직교 적층판의 자유진동해석

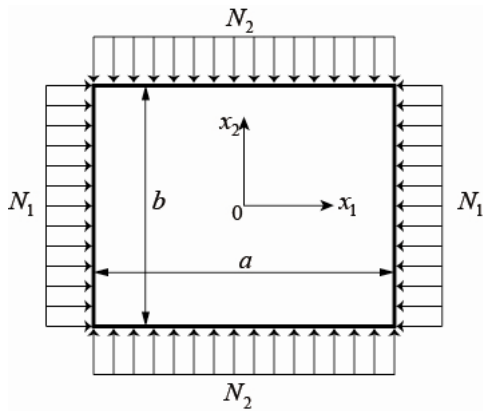
이 예제는 비대칭 적층판에 대한 동적 성능을 조사하기 위하여 두 개층($0^\circ/90^\circ$)을 가지는 비대칭 직교 적층판의 자유진동해석을 수행하였다. 예제에 사용된 물성치는 M_1 이며 적층판의 두께 변화를 고려하기 위하여 네가지 판폭두께비 $a/h=4,10,20,100$ 를 이용하여 해석을 수행하였다. <Table 2>의 수치 해석결과들은 무차원화한 것으로 이론해^(14,16) 및 수치해^(11,17)와 비교하였다. 본 연구에서 도출한 수치해석 결과는 판폭두께비에 상관없이 모든 기저함수에서 참고해와 1%미만으로 매우 유사한 결과를 도출하였다.

<Table 2> The non-dimensionalized fundamental frequency($\bar{\omega}$) of a simply supported unsymmetric cross-ply laminated plate $[0^\circ/90^\circ]$.

Theory	a/h			
	4	10	20	100
$p=2$	8.0350	10.4732	11.0782	11.3072
$p=3$	8.0349	10.4731	11.0779	11.2990
$p=4$	8.0349	10.4731	11.0779	11.2990
$p=5$	8.0349	10.4731	11.0779	11.2990
Whitney ⁽¹⁴⁾	8.0889	10.4610	11.0639	11.2842
Reddy ⁽¹⁵⁾	7.9081	10.4319	11.0663	11.2988
Kant ⁽¹⁶⁾	8.3546	10.5680	11.0520	11.3002
Tran-Cong ⁽¹¹⁾	9.0870	10.5680	11.1050	11.3000
Akmas ⁽¹⁷⁾	-	10.265	11.002	11.302

5.3 대칭 4층 직교 적층판의 선형좌굴해석

이 예제에서는 초기하중을 받는 적층판의 좌굴해석을 수행하였다. 적층판에는 <Fig. 3>에 도시된 바와 같이 축하중이 작용하고 있다. 네 개의 층($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)을 가지는 직교 적층판으로 적층판의 두께 변화에 따른 적층판의 선형좌굴 특성을 파악하기 위하여 판폭두께비 $a/h=5,10,20,100$ 를 사용하였다. 적층판의 물성치 및 경계조건은 $M_1, SS1$ 를 사용하였다. 해석에는 네가지 기저함수($p=2,3,4,5$)를 사용하였으며 256개의 등기하요소를 사용하였다.



(Fig.3) The geometry of rectangular plate under initial stresses.

(Table 3) The non-dimensionalized fundamental buckling load of a simply supported cross-ply laminated plate [0°/90°/90°/0°].

Theory	a/h			
	5	10	20	100
p = 2	11.4370	23.2328	31.5989	35.9681
p = 3	11.4560	23.2327	31.5982	35.9492
p = 4	11.4656	23.2327	31.5982	35.9492
p = 5	11.4646	23.2327	31.5982	35.9492
Reddy ¹⁾	11.575	23.453	31.707	35.955
Aydogdu ¹⁸⁾	12.010	23.357	31.668	35.953
Singh ¹⁹⁾	11.858	23.134	31.517	35.923
Fiedler ²⁰⁾	11.601	23.043	31.529	35.946
Thai ⁷⁾	-	23.1322	31.5498	35.9499

적층판에 초기하중은 x_1 방향으로 단축하중 ($N_1 = 1, N_2 = 0$)이 가해지는 것으로 가정하였다. <Table 3>은 적층판의 두께 변화에 대한 것으로 식 (33)을 이용하여 무차원화된 기본 좌굴하중을 나타내고 있다. 수치해석결과들은 이론해¹⁾, 수치해¹⁸⁻²⁰⁾ 및 등기하해석해⁷⁾와 비교하였다. 수치해석결과들은 $p \geq 2$ 인 모든 기저함수에서 판폭두께비에 상관없이 참고해들과 1%미만으로 매우 유사한 결과를 도출하였다.

<Table 4>는 물성치 변화에 대한 좌굴거동에 대한 수치예제로 물성치는 $E_1/E_2 = 10, 20, 30, 40$ 와 같이 네 가지가 고려 되었으며 적층판의 두께는 $a/h = 10$ 이 적용되었다. 수치해석결과들은 이론해¹⁾, 탄성해²²⁾ 및 수치해^{7,11,18,19,21)}와 비교하였다. 재료 물

성치 변화에 대한 수치해석결과들은 $p \geq 2$ 인 모든 기저함수에서 참고해들과 1%미만으로 매우 유사한 결과를 도출하였다.

(Table 4) The non-dimensionalized fundamental buckling load of a simply supported cross-ply laminated plate [0°/90°/90°/0°].

Theory	E_1/E_2			
	10	20	30	40
p = 2	9.8364	15.1761	19.8039	23.2328
p = 3	9.8362	15.1759	19.5536	23.2327
p = 4	9.8362	15.1759	19.5535	23.2327
p = 5	9.8362	15.1759	19.5535	23.2327
Reddy ¹⁾	9.965	15.351	19.756	23.453
Thai ⁷⁾	9.8200	15.1342	19.4826	23.1322
Tran-Cong ¹¹⁾	9.809	15.064	19.339	22.912
Aydogdu ¹⁸⁾	9.942	15.304	19.685	23.357
Singh ¹⁹⁾	9.762	15.090	19.461	23.134
Chua ²¹⁾	9.985	15.374	19.537	23.154
Noor ²²⁾	9.762	15.019	19.304	22.880

5.4 비대칭 2층 직교 적층판 선형좌굴해석

이 예제에서는 두 개층(0°/90°)을 가지는 비대칭 직교 적층판의 선형좌굴해석을 수행하였다. 판의 두께 변화에 따른 적층판의 선형좌굴 특성을 파악하기 위하여 판폭두께비 $a/h = 10, 20, 50, 100$ 를 사용하였으며 적층판의 물성치 및 경계조건은 $M_1, SS1$ 이 사용되었다. 예제에 사용된 기저함수의 차수는 ($p = 2, 3, 4, 5$)를 사용하였으며 차수에 상관없이 256개의 요소를 사용하였다. 적층판에 초기하중은 x_2 방향으로 단축하중($N_1 = 0, N_2 = 1$)이 가해지는 것으로 가정하였다. <Table 5>는 비대칭 적층판의 두께 변화에 대한 것으로 식 (33)을 이용하여 무차원화된 기본 좌굴하중을 나타내고 있다. 수치해석결과들은 이론해¹⁵⁾ 및 수치해^{7,11,19,23)}와 비교하였다. 수치해석결과들은 $p \geq 2$ 인 모든 기저함수에서 판폭두께비에 상관없이 참고해들과 1%미만으로 매우 유사한 결과를 도출하였다. <Table 6>은 다양한 경계조건에 대한 적층판의 선형좌굴 해석을 수행한 것으로 $SSSS, SCSS, SCSC, SFSS, SFSC$ 다섯 가지가 고려되었으며 판폭두께비는 $a/h = 10$ 이 적용되

었다.

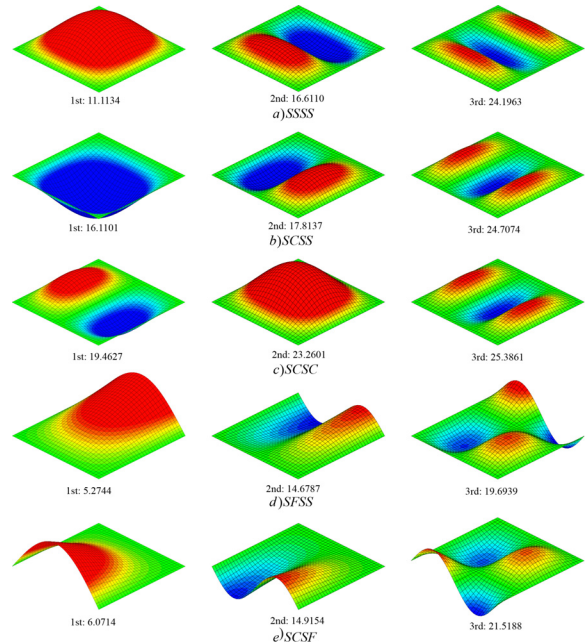
수치해석결과들은 이론해¹²⁾ 및 수치해^{7,11,23,24)}와 비교하였다. 등기하 판요소는 경계조건에 상관없이 참고해들과 유사한 결과를 도출하였으며 기본 좌굴 하중은 판의 경계조건이 단단해짐에 따라 커짐을 알 수 있다. <Fig. 4>는 $p = 5$ 의 다섯가지 경계조건에 대한 1차~3차 좌굴모드를 도시하고 있다.

<Table 5> The non-dimensionalized fundamental buckling load of a simply supported unsymmetric cross-ply laminated plate $[0^\circ / 90^\circ]$.

Theory	a/h			
	10	20	50	100
$p = 2$	11.1136	12.4349	12.8750	12.9541
$p = 3$	11.1134	12.4341	12.8703	12.9354
$p = 4$	11.1134	12.4341	12.8703	12.9354
$p = 5$	11.1134	12.4341	12.8703	12.9354
Reddy ¹⁵⁾	11.563	12.577	12.895	12.942
Thai ⁷⁾	11.0966	12.4294	12.8631	12.9389
Tran-Cong ¹¹⁾	11.360	12.551	12.906	13.039
Singh ¹⁹⁾	11.310	12.427	12.800	12.873
Chakrabarti ²³⁾	11.349	12.510	12.879	12.934

<Table 6> The non-dimensionalized fundamental buckling load of a simply supported unsymmetric cross-ply laminated plate $[0^\circ / 90^\circ]$ with various boundary conditions.

Theory	<i>SSSS</i>	<i>SCSS</i>	<i>SCSC</i>	<i>SFSS</i>	<i>SFSC</i>
$p = 2$	11.1136	16.1107	19.4644	5.2746	6.0719
$p = 3$	11.1134	16.1101	19.4627	5.2744	6.0715
$p = 4$	11.1134	16.1101	19.4627	5.2744	6.0714
$p = 5$	11.1134	16.1101	19.4627	5.2744	6.0714
Liew ¹²⁾	11.562	17.133	21.464	5.442	6.247
Thai ⁷⁾	11.4913	16.4420	19.4883	5.4828	6.3043
Tran-Cong ¹¹⁾	11.353	16.437	20.067	5.351	6.166
Chakrabarti ²³⁾	11.291	16.470	20.082	5.342	6.140
Ferreira ²⁴⁾	11.481	16.630	20.314	5.417	6.240



<Fig.4> A unsymmetric cross-ply laminated plate $[0^\circ / 90^\circ]$ with various boundary condition: mode 1 - mode 3.

6. 결 론

본 연구를 통하여 등기하해석법에 기초한 적층 판요소를 개발하고 이를 대칭 및 비대칭 적층판에 적용하여 그 성능을 검증하였다. 수치해석결과로부터 개발된 적층 판요소는 대칭 적층판의 경우 판폭 두께비 및 재료 물성치 변화에 상관없이 이론해 및 참고해들과 잘 일치하는 결과를 도출하였다. 특히 판폭두께비 및 경계조건의 변화에 상관없이 차수가 $p \geq 2$ 일 경우에는 우수한 수렴성을 보였다. 또한 기저함수의 차수가 $p \geq 3$ 인 경우에는 정상적분을 사용하여도 일차전단변형이론을 사용한 이론해 및 참고해들과 잘 일치하는 결과를 도출하였다. 향후 등기하해석법에 기초한 적층 판요소를 응용한 다양한 해석이 건축분야에서 이루어질 것으로 판단되며 이러한 맥락에서 본 연구결과를 등기하해석 기법을 이용한 적층판해석과 관련한 연구에 대한 기초자료로 제시하고자 한다.

References

1. Reddy, J.N, Mechanics of laminated

- composite plate. CRC Press, 1997
2. Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazileves Y. I., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods. Appl.Mech. Engrg.*, 194, pp. 4135-4195, 2005
 3. Hughes, T.J.R, and Evans J.A., Isogeometric analysis. ICES Report 10-18, The Institute of Com-putational Engineering and Science, University of Texas Austin. 2010
 4. 이상진, 김하룡, RM이론에 기저한 등기하해석법을 이용한 판의 해석, *대한건축학회 논문집*, 28 권 9호, pp.75-82, 2012
 5. 이상진, 김하룡, 두꺼운 평판의 등기하 해석에 대한 연구, *한국공간구조학회 춘계학술발표논문집*, pp. 29-32, 2011
 6. Shojaee, S, Valizadeh, N, Izadpanah, E, Bui, T and Vu, T.V, Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates usign the NURBS-based isogeometirc finite element method. *Compos Struct*, 94, pp. 1677-1693, 2012
 7. Thai, C.H, Xuan, H.X, Thanh, N.N, Le, T.H, Thoi, T.N and Rabczuk, T, Static, free vibration and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plate using NURBS-based isogeometric approach, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 34, pp. 171-177, 2012
 8. Rogers, D.F., An introduction to NURBS: With Historical Perceptive, Academic Press, London, 2001
 9. de Boor, C., A Practical Guides to Splines, Springer-Verlag, New York, 1978
 10. Lee, S.J. and Han, S.E., Free vibration analysis of shells with a nine-node assumed natural strain finite element, *J. Sound and Vibration*, 241, 4, pp. 605-633, 2001
 11. Nguyen-van. N, Mai-Duy. N, Karunasena. W and Tran-Cong. T, Buckling and vibration analysis of laminated composite plate/shell structures via a smoothed quadrilateral flat shell element with in-plane rotations, *Compos Struct*, 89, pp. 612-625, 2011
 12. Liew. KM, Huang. YQ and Reddy. JN, ,Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Comput Method Appl. Mech. Engrg.*, 192, pp. 2203-2222, 2003
 13. Khdeir. AA and Librescu. L, Analysis of symmetric cross-ply laminated plates using a higher-order theory, Part II: buckling and free vibration, *Compos. Struct.*, 9, pp. 259-277, 1988
 14. Whitney, J.M, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *ASME J Appl Mech*, 47(4) pp. 1031-1306, 1970
 15. Reddy, J.N, A simple higher order theory for laminated composite plates. *ASME J Appl Mech* 51, pp. 745-752, 1984
 16. Kant. T and Swaminathan. K, Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Compos Struct*, 56, pp. 329-344, 2002
 17. Akhras G and Li, W, Static and free vibration analysis of composite plates using spline finite strips sith higher order shear deformation, *Compos part B:Eng* 36, pp. 496-503, 2005
 18. Aydogdu. M, Comparison of various shear deformation theories for bendin, buckling, and vibration of rectangular symmetric cross-ply plate with simply supported edges, *J Compos Mater*, 40(23), pp. 2143-2155, 2006
 19. Singh. SK and Chakrabarti. A, Buckling analysis of laminated composite plates

- using an efficient C0 FE model, Latin American Journal of Solids and Structures, 9, pp. 353-365, 2012
20. Fiedler. L, Lacarbonara. W and Vestroni. F. A generalized higher-order theory for buckling of thick multi-layered composite plates with normal and transverse shear strains. Compos Struct, 92, pp. 3011-3019, 2010.
21. Liu. L and Chua. LP, Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates, Compos Struct, 78, pp. 58-69, 2007
22. Noor. AK, Stability of Multilayered composite plates, Fibre Sci. Technol, 8(2), pp. 81-89, 1975
23. Chakrabarti. A and Sheikh. AH, Buckling of laminated composite plates by a new element based on higher order shear deformation theory. Mech. Composite Mater. Struct, 10(4), pp. 303-317, 2003
24. Ferriera. AJM, Roque. CMC, Neves. AMA, Jorge. RMN, Soares. CMM and Liew. KM, Buckling and vibration analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions, Compos Part B, 42, pp.592-606, 2011

(접 수 일 자 : 2014년 04월 21일)

(심사완료일자 : 2014년 05월 15일)

(게재확정일자 : 2014년 05월 21일)