

소비자 네트워크의 변화 관리 문제 : 최소지배집합 역 문제의 계산 복잡성 증명*

정예림 · 박선주[†] · 정승화
연세대학교 경영대학

The Challenge of Managing Customer Networks under Change :
Proving the Complexity of the Inverse Dominating Set Problem

Yerim Chung · Sunju Park · Seungwha Chung
School of Business, Yonsei University

■ Abstract ■

Customer networks go through constant changes. They may expand or shrink once they are formed. In dynamic environments, it is a critical corporate challenge to identify and manage influential customer groups in a cost effective way. In this context, we apply inverse optimization theory to suggest an efficient method to manage customer networks. In this paper, we assume that there exists a subset of nodes that might have a large effect on the network and that the network can be modified via some strategic actions. Rather than making efforts to find influential nodes whenever the network changes, we focus on a subset of selective nodes and perturb as little as possible the interaction between nodes in order to make the selected nodes influential in the given network. We define the following problem based on the inverse optimization. Given a graph and a prescribed node subset, the objective is to modify the structure of the given graph so that the fixed subset of nodes becomes a minimum dominating set in the modified graph and the cost for modification is minimum under a fixed norm. We call this problem the inverse dominating set problem and investigate its computational complexity.

Keywords : Customer Network, Inverse Optimization, Dominating Set, Computational Complexity

논문접수일 : 2014년 05월 07일 논문게재확정일 : 2014년 06월 10일

* 이 논문은 2011년도 정부재원(교육과학기술부 사회과학연구지원 사업비)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF-2011-330-B00076).

† 교신저자, boxenju@yonsei.ac.kr

1. 서 론

소셜 미디어의 등장 이후, 소비자는 더 이상 개별적이고 수동적인 존재가 아니라 서로 교류, 소통하는 적극적인 존재로 거듭나고 있다. 활발한 상호작용을 통해 소비자들은 자생적인 네트워크를 생성하고, 적극적 참여를 통해 그 관계망을 확장시킨다. 소비자 네트워크의 생성은 소비자 개개인의 영향력을 증대시켰으며, 기업이 소비자를 바라보는 관점과 소비자 대응 전략의 양상을 급격히 변화시켰다. 소비자는 더 이상 개별적으로 행동하는 불특정 다수가 아니라, 서로 의견을 교환하고, 함께 구매하며, 때로는 불매 운동을 벌이는 일종의 연결망이다. 따라서 기업은 소비자를 소셜 미디어를 매개로 긴밀하게 연결되어 있는 광대한 네트워크로 소비자를 이해해야 한다[14].

기업에 대해 긍정적이거나 부정적인 의견이 소비자 네트워크에 공유되고 확산되는 것은 당연히 기업의 흥폐에 영향을 미친다. 기업의 소비자 대응 전략 측면에서, 기업이 소비자 네트워크를 효과적으로 관리하고 통제할 수 있는지의 여부—신제품의 성능에 대한 긍정적 의견을 네트워크 전체에 빨리 확산시킬 수 있는지의 여부 또는 부정적 의견이 확산되기 전에 차단할 수 있는지의 여부 등—는 매우 중요한 문제로 대두되고 있다[17]. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 기업이 소비자 네트워크를 주도하는 핵심 소비자 집합이 누구인지를 식별할 수 있어야 한다.

이런 이유로, 소셜 네트워크의 정보 확산 프로세스를 이해하고 분석하기 위한 많은 연구들이 진행되어 왔다[8, 10, 13]. 기존의 연구들은 특히 소비자 네트워크의 형성 과정과 네트워크 상에서의 정보 확산 과정, 그리고 네트워크에서 영향력이 큰 노드를 찾아내는 문제들에 집중해왔다[17]. Kempe et al.[12]은 주어진 네트워크에서 정보전달력이 큰 소비자 집단을 찾아내는 문제가 NP-hard임을 증명하고, 해당 문제에 대한 근사 알고리즘을 제안한 바 있다.

정적인 네트워크를 가정한 기존의 연구들은 기업

이 직면한 문제에 대한 해답을 제공한다는 점에서 의미가 있다. 하지만 새로운 소비자의 네트워크 참여와 기존 참여자의 퇴출로 인해, 새로운 노드들이 추가적으로 생성되고, 또 소멸되면서 소비자 네트워크는 계속해서 변화한다. 소비자 네트워크의 역동성을 고려해보면 기존 연구들의 한계를 발견하게 된다. 먼저, 네트워크의 변화는 네트워크를 구성하는 소비자 집단과 그들 간의 연결 양상의 변화를 의미한다. 따라서, 네트워크가 바뀌면 그 네트워크를 주도하는 핵심 소비자 집단도 바뀌게 된다. 효과적인 마케팅을 위해 기업은 소비자 네트워크가 바뀔 때마다 핵심 소비자 집단을 새로 파악해야 한다는 난관에 봉착하게 된다. 뿐만 아니라, 새로이 찾아낸 소비자 집단이 기업에 친화적이고, 구전효과 극대화에 긍정적 기여를 할 것이라고 확신하기 어렵다.

분명, 특정 기업에 친화적인 소비자들은 해당 기업에 대한 정보가 확산되고 차단되는 데 있어 기업의 입장을 대변한다[2]. 하지만, 고객 충성도는 장기간에 걸쳐 형성된 기업과 소비자 간의 교감과 정서적 연대에 기반하고 있기 때문에, 이를 유지하고 제고하기 위한 기업의 지속적인 관리와 노력이 매우 중요하다[1]. 따라서, 네트워크가 바뀔 때마다 핵심 소비자 집단을 새롭게 탐색하고 그들을 기업 친화적으로 만들기 위해서는 많은 비용이 발생하게 된다.

만약, 기업이 특정 소비자 집단을 선정해, 그 집단이 소비자 네트워크에서의 긍정적 또는 부정적 정보 확산과 차단에 효과적으로 행동할 수 있도록 주어진 네트워크를 관리하고 변형하는 것이 가능하다면 어떨까? 이를테면, 기업은 전체 소비자 네트워크의 핵심 소비자 집단을 찾는 대신, 그 기업에 대한 충성도가 높은 소비자들을 이용해, 그 소비자 집합을 기반으로 얻을 수 있는 구전 효과를 극대화하는 전략을 취할 수 있다. 즉, 주어진 네트워크의 연결 형태를 조정해, 현재는 핵심 노드가 아닌 소비자 집단이 정보 확산과 차단에 있어 핵심적인 역할을 할 수 있도록 유도할 수 있다면, 비용 절감 측면뿐 아니라 기업의 이익 창출에도 충분히 기여하는 바가 있을 것이다. 요컨대, 역동적인 네트워크 환경에서는 핵심 소비자

집단을 매년 새로 찾는 것보다 이미 기업에 우호적인 소비자 집단을 이용해 네트워크에서의 정보 확산 및 차단을 효율적으로 관리하는 문제가 중요해진다.

본 연구는 소비자 네트워크의 역동성에 주목해, 기존 연구에서 다루졌던 네트워크의 형성, 전염성, 영향력 그룹이라는 세 가지 주제가 아닌, 동태적 네트워크 환경에서의 효과적인 네트워크 관리 및 활용이라는 새로운 주제를 제시한다. 또한, 그래프 이론과 역 최적화 이론 등 조합 최적화의 최신 이론에 기반해 네트워크에서의 효과적인 정보 확산 및 차단 관리 문제를 최소지배집합 역 문제(inverse Dominating set problem)로 새롭게 정의한다. 주어진 소비자 네트워크에서 최소지배집합(minimum Dominating set)으로 표현되는 핵심 소비자 집단을 찾는 대신, 기업이 기존에 관리하던 VIP 등으로 이뤄진 특정 노드집합이 최소지배집합이 되도록 네트워크의 연결 구조를 최소 비용으로 변형시키는 문제가 그것이다.

다음 절에서는 역 최적화 이론을 간결히 소개하고, 제 3장에서는 최소지배집합 역 문제와 그 변형 문제를 수리적으로 정의한다. 제 4장에서는 최소지배집합 역 문제의 계산 복잡성(computational complexity)을 규명한다. 결론에서는 후속 연구 방향에 대해 논의한다.

2. 역 최적화

주어진 네트워크의 허브를 찾는 문제를 포함하여 현실에서 우리가 직면하는 문제들은 NP-hard인 경우가 많다. 어려운 문제들의 최적해를 구하는 것은 많은 시간과 비용을 발생시킨다. 한편, 비록 최적은 아니더라도 주어진 문제에 대한 임의의 해를 알고 있다면, 그 해가 우리가 찾는 답이 되도록 기존 문제의 목적함수 계수나 제약조건 등을 최소 비용으로 수정하는 문제를 정의할 수 있다. 여기서, 목적함수는 기존 문제 입력예제(instance)와 새로 얻어진 문제 입력예제 간의 차이(deviation)를 최소화하는 것이다. 차선의 선택이 최선의 선택이 될 수 있도록 의사결정이 일어나는 환경 자체를 변형

한다는 점에서 이 문제는 역 최적화 이론(inverse optimization)으로 정의될 수 있다[3, 11].

역 최적화 이론은 1990년대 초반에 소개된 이후[4], 여러 학자들에 의해 본격적으로 연구된 최적화의 새로운 분야이다[3, 18, 20]. 주어진 문제의 최적해를 찾는 기존의 최적화 문제들과는 달리, 어떤 문제의 최적은 아니지만 임의의 실현가능해나 목적해가 있을 때, 그 해를 기존 문제의 최적해로 만들기 위해, 문제를 구성하는 모형 파라미터(비용, 수익, 가중치 등) 값을 최소한으로 변형하는 문제를 해당 최적화 문제의 역 문제라 일컫는다. 역 최적화는 최단 경로 문제(shortest path problem), 최소 걸침나무 문제(minimum spanning tree problem), 최소/최대 흐름 문제(minimum cost flow problem/maximum flow problem), 최소 절단 문제(minimum cut problem) 등 다항시간 안에 풀이 가능한 여러 최적화 문제들에 대해 집중적으로 연구되어 왔다.

주요 연구 결과로, 선형계획의 역 문제는 또 다른 선형계획 문제가 되어 쌍대 이론을 이용해 풀이 가능하다[21]. 선형 목적함수를 갖는 다항시간 최적화 문제의 역 문제 또한 다항시간 안에 풀이 가능하다는 것이 이미 알려져 있다[3]. 또한, Zhang et al.[22]은 다항시간 최적화 문제로 알려져 있는 센터로케이션 문제(center location problem)의 역 문제가 NP-hard임을 증명해 바 있다.

Chung and Demange[6]는 역 최적화의 연구 범위를 NP-hard인 조합최적화 문제로 확장하고, 역 최적화의 개념을 일반화하기 위해 다음의 세 가지 새로운 토픽을 소개한다. 첫째, 모델 파라미터 값을 변형함에 있어 새로운 파라미터 값에 특정 제약조건을 부과한 가중제한 역 문제(weight-constrained inverse problem), 둘째, 선정된 해가 최적해가 되게 하기 보다는, 어떤 특정 알고리즘에 의해 솔루션으로 채택되는 것을 목적으로 하는 특정해법 역 문제(inverse problem against a specified algorithm), 그리고 어떤 특정 해를 선정하는 대신 목적하는 해값(target solution value)을 정하고 그 값이 최적해 값이 되도록 모형 파라미터 값을 최소한으로 변형하

는 역수 문제(inverse number problem) 등이 그것이다. 이미, 여러 논문에서 최대 안정집합 문제(maximum stable set problem), 세일즈맨 순회문제(minimum traveling salesman problem), 그래프 컬러링 문제(minimum chromatic number problem), 그리고 빈 패킹 문제(bin-packing problem) 등 최적화의 대표 문제들에 역적 접근법이 적용되었으며, 관련 역문제의 계산 복잡성과 근사 가능성이 집중적으로 연구되어 왔다[5-7].

3. 문제 정의

이 절에서는 주어진 네트워크에서 핵심 노드를 선별해내는 문제를 최소지배집합 문제로 정의하고, 특정 노드집합이 주어진 네트워크의 핵심 노드가 되도록 네트워크를 변형시키는 문제를 최소지배집합 역 문제로 정의한다.

주어진 소비자 네트워크에서 정보 확산을 주도하는 핵심 노드는, 주어진 네트워크의 모든 노드에 영향력을 행사한다는 점에서 그래프 이론의 지배집합(Dominating set)으로 정의될 수 있다[19]. 지배집합은 이름 그대로, 주어진 그래프의 모든 노드를 지배적으로 장악하는 노드들의 집합으로, 그래프의 모든 노드들은 지배집합에 속하거나, 지배집합에 속하는 적어도 하나의 노드에 직접 연결되어 있어야 한다. 최소지배집합 문제의 정의는 다음과 같다.

정의 1 : 최소지배집합 문제(Minimum Dominating Set Problem)

입력예제 : 그래프 $G=(V, E)$, 양의 정수 $K \leq |V|$.

문제 : 그래프 $G=(V, E)$ 에 사이즈가 K 이하인 지배 집합이 존재하는가? 즉, 그래프 $G=(V, E)$ 의 노드 부분집합 중 다음의 두 가지 조건을 만족하는 노드 부분집합 $V' \subseteq V$ 를 찾아라.

조건 1 : $|V'| \leq K$.

조건 2 : $\forall u \in V - V', \exists v \in V' \text{ s.t. } \{u, v\} \in E$.

최소지배집합 문제는 그래프 이론의 대표적인 문제 중 하나로, 주어진 네트워크에 존재하는 여러 지배집합 중 사이즈가 가장 작은, 최소지배집합을 찾는 문제이다. 이 문제는 NP-hard임이 이미 증명된 바 있다[9]. 본 논문에서는 임의로 선택된 특정 소비자군이 주어진 네트워크의 최소지배집합이 되도록 네트워크의 연결 구조를 최소 비용으로 변형시키는 문제에 집중한다. 네트워크를 구성하는 모든 노드들이 선정된 특정 노드집합에 의해 커버될 수 있도록 주어진 그래프의 노드집합과 엣지집합을 최소한으로 변형시키는 문제를 최소지배집합 역 문제로 정의한다.

정의 2 : 최소지배집합 역 문제(Inverse Dominating Set Problem)

입력예제 : 그래프 $G=(V, E)$, 노드 부분집합 $S \subseteq V$, 그리고 양의 정수 Q .

문제 : 주어진 노드 부분집합 S 가 최소지배집합이 되도록 그래프 $G=(V, E)$ 를 최소한으로 변형하라. 즉, 다음의 두 가지 조건을 만족하는 그래프 $G'=(V', E')$ 를 찾아라.

조건 1 : 주어진 노드 부분집합 S 는 변형된 그래프 $G'=(V', E')$ 의 최소지배집합이다.

조건 2 : 원래 그래프 $G=(V, E)$ 와 변형된 그래프 $G'=(V', E')$ 의 차이로 측정되는 변형비용이 Q 이하이다.

위에서 정의한 최소지배집합 역 문제는 주어진 노드집합(선정된 해)이 최소지배집합(최적해)이 되도록 주어진 네트워크를 변형시키는 문제이다. 다음 절의 계산 복잡성에서 우리는 최소지배집합 역 문제가 NP-hard임을 증명할 것이다. 이는 특정 노드집합이 최소지배집합이 되게 만드는 것이 다항시간 안에 불가능하다는 것을 의미한다. 따라서, 최적성을 거당하면 응용적 측면에서 활용이 쉽지 않다는 문제가 발생한다. 그러나 선정된 해가 최적성을 만족시키는 대신 어떤 특성을 만족할 수 있도록 주어진 네트워크를 변형하는 문제를 고려한다면, 만족

시켜야 할 특성이 무엇이나에 따라 관련 문제의 계산 복잡성은 달라질 수 있다.

이런 맥락에서 최소지배집합 역 문제의 변형 문제로, 선정된 해(주어진 노드 집합)가 최적해(최소지배집합)가 되게 하기보다는, 어떤 특정 알고리즘에 의한 최종 결과(output)가 되도록 만드는 문제를 정의할 수 있다. 이러한 변형 문제는 특정 알고리즘을 겨냥한 역 문제로, 기존의 연구들에서 최대안정집합 문제(maximum stable set problem), 세일즈맨 순회 문제(minimum traveling salesman problem) 등에 적용된 바 있다[5-6]. 특정 알고리즘을 가정한 최소지배집합 역 문제를 정의하면 다음과 같다.

정의 3 : 특정 알고리즘을 겨냥한 최소지배집합 역 문제(Inverse Dominating Set Problem Against A Specified Algorithm)

입력예제 : 그래프 $G=(V, E)$, 노드 부분집합 $S \subseteq V$, 양의 정수 Q , 그리고 최소지배집합 문제의 특정 알고리즘 A .

문제 : 주어진 노드 부분집합 S 가 알고리즘 A 을 적용했을 때 얻어지는 솔루션이 될 수 있도록 $G=(V, E)$ 를 최소한으로 변형하라. 즉, 다음의 두 가지 조건을 만족하는 그래프 $G'=(V', E')$ 찾아라.

조건 1 : 주어진 노드 부분집합 S 는 변형된 그래프 $G'=(V', E')$ 에 알고리즘 A 를 적용했을 때 얻을 수 있는 솔루션이다.

조건 2 : 원래 그래프 $G=(V, E)$ 와 변형된 그래프 $G'=(V', E')$ 의 차이로 측정되는 변형 비용이 Q 이하이다.

주어진 알고리즘이 근사 알고리즘일 경우, 이 변형 문제는 원 문제의 완화문제(relaxation)로 간주될 수 있다. 이는 최소지배집합 역 문제에 대한 근사적 접근이라는 점에서 주목할 만하다. 최소지배집합 문제는 NP-complete으로[9], 이 문제를 근사적으로 접근하는 여러 해법들이 개발되어 왔다. 잘 알려진 근사 알고리즘으로는 노드 차수(degree)에 따라 순차적으로

노드를 선택하는 그리디(greedy) 알고리즘이 대표적이다. 이 논문에서는 국소탐색(local search) 알고리즘인 k -opt 알고리즘에 대해 최소지배집합 역 문제의 변형 문제를 다룬다.

국소탐색 알고리즘 k -opt는, 어떤 지배집합 DS_0 가 주어졌을 때, DS_0 에 속하는 k 개 노드를 제거하고, 거기에 노드 $k-1$ 개를 새롭게 추가함으로써, 주어진 지배집합 DS_0 의 사이즈(cardinality)를 하나씩 줄여나가는 알고리즘이다. DS_0 에서 기존의 노드 k 개를 제거하고 새롭게 $k-1$ 개 노드를 추가하는 것을 k -swap이라 부르며, k -swap을 통해 해를 향상시키는 것이 더 이상 불가능할 때, DS_0 는 k -optimal이라고 일컫는다. 여기서, k 는 1이 아닌 상수로 가정한다. 국소탐색 알고리즘 k -opt을 겨냥한 최소지배집합 역 문제는 다음과 같이 정의된다.

정의 4 : 국소탐색 알고리즘 k -opt을 겨냥한 최소지배집합 역 문제(Inverse Dominating Set Problem Against k -opt : IDS_{k-opt})

입력예제 : 그래프 $G=(V, E)$, 노드 부분집합 $S \subseteq V$, 양의 정수 Q , 그리고 국소탐색 알고리즘 k -opt.

문제 : 주어진 노드 부분집합 S 가 알고리즘 A 을 적용했을 때 얻어지는 솔루션이 될 수 있도록 $G=(V, E)$ 를 최소한으로 변형하라. 즉, 다음의 두 가지 조건을 만족하는 그래프 $G'=(V', E')$ 찾아라.

조건 1 : 주어진 노드 부분집합 S 는 변형된 그래프 $G'=(V', E')$ 에서 k -optimal이다.

조건 2 : 원래 그래프 $G=(V, E)$ 와 변형된 그래프 $G'=(V', E')$ 의 차이로 측정되는 변형비용이 Q 이하이다.

4. 계산 복잡성

최소지배집합 문제가 NP-hard임은 이미 잘 알려져 있다[6]. 따라서 이 절에서는 최소지배집합 역 문제의 계산 복잡성을 규명한다.

정리 1 : 최소지배집합 역 문제는 co-NP-hard이다.

증명 : 최소지배집합 역 문제의 계산복잡성은 최소지배집합 문제로부터의 다항시간 환원(polynomial-time reduction)을 이용해 증명된다.

최소지배집합 문제의 입력예제로 그래프 $G=(V, E)$ 와 양의 정수 $K \leq |V|$ 가 주어지면, 그래프 G 의 노드 중 차수가 가장 높은 노드를 v_1 이라 하자. 노드 v_1 에 호로 연결되어 있는 이웃(neighbor) 노드들의 집합을 $I(v_1)$ 라 표기하자. 그리고, $V - (\{v_1\} \cup I(v_1))$ 의 노드로 이루어진 부분 그래프 $G[V - (\{v_1\} \cup I(v_1))]$ 에서 차수가 가장 높은 노드를 v_2 이라 하자. 이런 방식으로 v_1, v_2, \dots, v_k 를 찾아낸 다음, v_1, v_2, \dots, v_k 를 중심으로 하는 $k=K+1$ 개의 연결요소(connected components) C_1, C_2, \dots, C_k 를 다음과 같이 정의하자.

$$C_1 = \{v_1\} \cup I(v_1), C_2 = \{v_2\} \cup (I(v_2) - I(v_1)),$$

$$C_3 = \{v_3\} \cup (I(v_3) - (I(v_1) \cup I(v_2))), \dots,$$

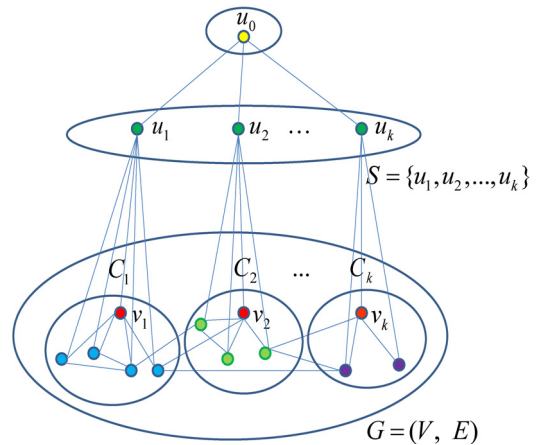
$$C_k = \{v_k\} \cup (I(v_k) - \bigcup_{i=1}^{k-1} I(v_i)).$$

여기서, C_1, C_2, \dots, C_k 는 공통 원소를 갖지 않으며(disjoint), 경우에 따라서는 공집합일 수도 있다.

이렇게 주어진 최소지배집합 문제의 입력예제를 기반으로 최소지배집합 역 문제의 입력예제를 다음과 같이 구성할 수 있다. 그래프 $G=(V, E)$ 에 임의로 선정한 노드집합 $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 와 S 의 모든 노드에 연결되어 있는 싱글 노드 u_0 를 추가하고, S 의 노드들 u_1, u_2, \dots, u_k 를 그래프 $G=(V, E)$ 의 연결요소 C_1, C_2, \dots, C_k 의 노드들에 각각 [그림 1]과 같이 연결한다.

새로 생성된 그래프 $G'=(V', E')$ 의 노드집합과 엣지집합은 다음과 같다.

- $V' = V \cup S \cup \{u_0\}$ with $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k=K+1$
- $E' = E \cup \{(u_0, u_j) | j \in \{1, 2, \dots, k\}\} \cup \{(u_j, C_j) | j \in \{1, 2, \dots, k\}\}$



[그림 1] 그래프 $G'=(V', E')$

이렇게 얻어진 그래프 $G'=(V', E')$ 에 양의 정수 $Q=0$ 를 더하면 최소지배집합 역 문제의 입력예제를 다항시간 안에 구성할 수 있다.

최소지배집합 역 문제의 co-NP-hardness를 증명하기 위해서, 다음 두 명제가 동치임을 보이자.

- 1) S 가 그래프 $G'=(V', E')$ 의 최소지배집합이다.
 - 2) 원래 그래프 $G=(V, E)$ 의 지배집합은 사이즈가 모두 $K=k-1$ 이상이다.
- 1) \Rightarrow 2) 증명 : G 에 사이즈가 $K=k-1$ 보다 작은 지배집합 D 가 존재한다고 하자. 그러면, G' 은 사이즈가 k 보다 작은 $D \cup \{u_0\}$ 에 의해 모두 커버 가능하다. 따라서 S 는 G' 의 최소지배집합이 아니고 이는 가정에 모순이다.
- 2) \Rightarrow 1) 증명 : 그래프 $G'=(V', E')$ 에 사이즈가 $k-1$ 인 지배집합 D' 가 존재한다고 가정하자. 만약 $u_0 \in D'$ 이면 $D'' = \{v_i\} \cup D' - \{u_i\}$ 역시 지배집합이 되기 때문에 모든 $u_i \in S$ 에 대하여 $u_i \notin D'$ 라고 가정할 수 있다. 이때, $D' - \{u_0\}$ 는 크기가 $k-1$ 보다 작으므로 가정 2)에 의해 $D' - \{u_0\}$ 가 커버하지 못하는 G 의 노드 $v \in V$ 가 적어도 하나 존재한다. 그런데 v 는 u_0 로도 커버할 수 없으므로 D' 는 G' 의 지배집합이 아니다. 이는 모순이다. 이번에는, $u_i \notin D'$ 라 가정

하자. 그러면 u_0 를 커버하기 위해 S 의 적어도 한 노드 $u_{i^*} \in S$ 가 D' 에 속해야 한다. $D' - \{u_{i^*}\}$ 는 크기가 $k-2$ 이하이므로 최소한 S 에 속하는 두 노드를 커버하지 못한다. 이 두 노드 중 하나는 u_{i^*} 로도 커버할 수 없으므로 D' 는 G' 의 지배집합이 아니다. 이는 모순이다.

최소지배집합 역 문제는 최소지배집합 문제에서 다항시간 환원되므로 증명은 완성된다. □

한편, IDS_{k-opt} 의 계산복잡성은 아직 규명된 바 없다. 이 논문에서는 IDS_{k-opt} 의 계산복잡성을 규명하기 앞서, 주어진 솔루션이 k -optimal이 되기 위해 그래프를 변형하는 것이 필요한지를 판단하는 문제, 즉 변형비용이 $Q=0$ 인 경우에 해당하는 문제인 $IDS_{k-opt, Q=0}$ 의 용의성(tractability)을 최소지배집합 문제의 최적성 테스트(optimality test)로의 다항시간 환원을 이용해 증명한다. 최소지배집합 문제의 최적성 테스트는 임의의 지배집합이 주어진 그래프의 최소지배집합인지를 결정하는 결정문제(decision problem)이다.

정의 5 : 최소지배집합 문제의 최적성 테스트 (Optimality Test Associated With Minimum Dominating Set Problem : OT_{MDS}).

입력예제 : 그래프 $H=(V, E)$, 지배집합 $DS \subseteq V$, $|DS|=K$, 그리고 양의 정수 K .

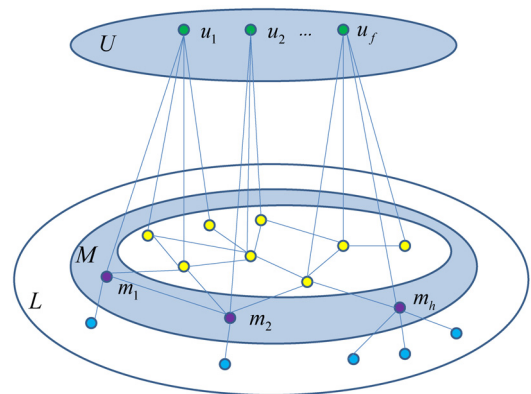
문제 : 주어진 지배집합 DS 가 H 의 최소지배집합인가? 즉, 그래프 H 에 사이즈가 $K-1$ 이하인 지배집합이 존재하는가?

정리 2 : $IDS_{k-opt, Q=0}$ 는 OT_{MDS} 로 다항시간 환원된다.

증명 : 그래프 $G=(V, E)$, 특정 지배집합 $S=\{u_1, u_2, \dots, u_f\} \cup \{m_1, m_2, \dots, m_h\}$, 그리고 k -opt

알고리즘이 $IDS_{k-opt, Q=0}$ 의 입력예제로 주어졌다고 가정하자([그림 2] 참조). 그래프 $G=(V, E)$ 의 노드 집합은 임의의 지배집합 S 와 그 여집합 $V-S$ 로 나뉜다. 주어진 지배집합 S 의 노드들은 그래프 G 의 단말노드 집합(leaf node set) L 을 커버하는 중간노드 집합(intermediate node set) $M=\{m_1, m_2, \dots, m_h\}$ 과 그 여집합 $U=S-M=\{u_1, u_2, \dots, u_f\}$ 으로 나눌 수 있다.

$$S = U \cup M = \{u_1, u_2, \dots, u_f\} \cup \{m_1, m_2, \dots, m_h\}$$



[그림 2] IDS_{k-opt} 의 입력예제

관찰 1 : S 는 최소성을 갖는 지배집합(Minimal Dominating Set)이다.

여기서, 최소성(minimality)은 S 로부터 노드를 하나라도 제거할 경우 S 가 더 이상 지배집합이 아니게 됨을 의미한다. 따라서, 노드 추가 없이, S 에 속하는 노드의 단순 제거를 통해 S 의 사이즈(cardinality)를 줄이는 것은 불가능하다.

관찰 2 : M 에 속하는 노드는 각각 적어도 하나 이상의 단말노드를 커버하므로, 그래프 G 의 최소지배집합(minimum dominating set)은 적어도 $|M|$ 개의 노드를 포함한다.

M 의 노드를 k 개 제거하면, $k+1$ 개 이상의 노드

를 추가해야만 그래프 G 의 모든 노드를 커버하는 지배집합으로 남을 수 있다. 따라서, M 의 노드들은 k -swap의 제거 고려대상에서 제외된다.

관찰 1과 2에 의해 다음을 유추할 수 있다.

관찰 3 : U 의 노드 k 개와 $V-(MU L)$ 의 노드 $k-1$ 개를 교체해 새로운 지배집합을 만들 수 있다면, S 는 k -optimal이 아니다.

관찰 1, 2, 3은 $IDS_{k-opt, Q=0}$ 의 입력예제의 구조와 특성을 보여준다. 위와 같이, 주어진 입력예제로부터 다항시간 내에 그래프 $H = G[V-(MU L)]$, 지배집합 $DS = \{u_1, u_2, \dots, u_f\}$, 양의 정수 $K=f$ 로 구성된 OT_{MDS} 의 입력예제를 만들 수 있다. 관찰 3에 의하면, S 의 k -optimality는 $V-(MU L)$ 의 노드집합으로 형성된 G 의 부분그래프 $H = G[V-(MU L)]$ 에 존재하는 모든 지배 집합의 사이즈가 $K=f$ 이상일 때, 즉 $V-(MU L)$ 에 속하는 $K-1$ 개 이하의 노드로는 $H = G[V-(MU L)]$ 의 모든 노드를 커버하는 것이 불가능할 때, 보증된다. 이 경우, 주어진 지배집합 $DS = \{u_1, u_2, \dots, u_f\}$ 는 사이즈가 $K=f$ 이므로, $H = G[V-(MU L)]$ 의 최소지배집합이 된다. 따라서, 그래프 G 에서 S 가 k -optimal일 필요충분 조건은 그래프 $H = G[V-(MU L)]$ 에서 $DS = \{u_1, u_2, \dots, u_f\}$ 가 최소지배집합이라 할 수 있다. □

정리 3 : $K=|DS|$ 가 상수로 주어질 경우, OT_{MDS} 은 다항시간 안에 풀이 가능하다.

증명 : 주어진 지배집합의 사이즈가 상수일 경우, 최적성 테스트는 완전탐색(exhaustive search)에 의해 다항시간 안에 풀이 가능하다. □

정리 2와 3에 의해서 다음의 결과를 도출해낼 수 있다.

정리 4 : $IDS_{k-opt, Q=0}$ 은 다항시간 안에 풀이 가능하다.

앞서의 정리 1에 따르면 기존 고객을 매개로 한 효과적인 네트워크 관리는 주어진 네트워크에서 핵심 고객을 식별해내는 문제만큼이나 어렵다는 것을 알 수 있었다. k -optimality라는 근사성을 거당할 경우 해당 문제의 계산 복잡성은 아직 알려져 있지 않다. 다만, 주어진 해가 k -optimality를 만족하기 위해 주어진 네트워크를 변형시키는 것이 필요한지 아닌지를 판단하는 문제는 다항시간 내 풀이 가능하다는 것을 알 수 있었다.

5. 결론

소비자 네트워크의 정보 확산 프로세스를 효과적으로 관리할 수 있는 방법론을 제공하기 위해서는 네트워크상의 정보 확산 문제를 이론적 체계하에서 정의하는 것이 선결 과제이다. 이 논문에서 우리는 그래프 이론과 역 최적화 이론 등 조합 최적화의 최신 이론에 근거하여 네트워크의 정보 확산 관리 문제를 새롭게 정의하였다. 아울러 그 계산 복잡성을 규명하여 관련 연구의 이론적 틀을 마련했다.

기존의 고객층을 매개로 기업의 소비자 접근성(정보의 전달, 확산 또는 차단)이 확보될 수 있는 새로운 네트워크를 구성한다는 점에 착안하여 네트워크 통제 문제를 최소지배집합 역 문제(inverse dominating set problem)로 정의하고 이 문제가 NP-hard임을 증명하였다. 나아가 주어진 노드집합이 최소지배집합이 아닌, k -optimal인 지배집합이 되도록 네트워크를 변형시키는 문제를 정의하였다.

최소지배집합 역 문제는 그 이론적 기여에도 불구하고 계산의 복잡성으로 인하여 현실에 적용하기가 어렵다는 한계가 있었다. 향후 연구로, 최소지배집합 역 문제에 대한 근사 알고리즘을 제안하고, 소비자 네트워크를 특성 별로 분류해 각각의 네트워크 유형에 대한 근사 알고리즘의 성능을 검토할 필요성이 있다. 또한, 주어진 해가 k -optimal이라는 근사성을 갖는 것을 목적으로 할 경우, 기존 고객을 매개로 한 네트워크 관리를 가능하게 하는 효과적인 해법이 존재하는지를 알기 위해 계산복잡성을 규명해야 한다.

참 고 문 헌

- [1] 이유재, 이지영, “브랜드 동일시, 브랜드 감정, 브랜드 로열티의 관계에 대한 연구”, 『광고연구』, 제65호(2004) pp.143-162.
- [2] 이현정, “고객충성도, 신뢰와 애착으로 높여라”, [LG주간경제], 2006. 4. 19.
- [3] Ahuja, R.K. and J.B. Orlin, “Inverse optimization,” *Operations Research*, Vol.49, No.5 (2001), pp.771-783.
- [4] Burton, D. and Ph.L. Toint, “On an instance of the inverse shortest paths problem,” *Mathematical Programming*, Vol.53(1992), pp.45-61.
- [5] Chung, Y. and M. Demange, “The 0-1 inverse maximum stable set problem,” *Discrete Applied Mathematics*, Vol.156, No.13(2008), pp.2501-2516.
- [6] Chung, Y. and M. Demange, “On inverse traveling salesman problems,” *4OR-A Quarterly Journal of Operations Research*, Vol.10(2012), pp.193-209.
- [7] Chung, Y., “Inverse bin-packing number problems : Hardness and approximation results,” *Management Science and Financial Engineering*, Vol.18, No.2(2012), pp.1-4.
- [8] Domingos, P. and M. Richardson, “Mining the network value of customers,” *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining*, pp.57-66, ACM, New York, 2001.
- [9] Garey, M.R. and D.S. Johnson, *Computers and intractability : a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [10] Guille, A., H. Hacid, C. Favre, and D.A. Zighed, “Information diffusion in online social networks : A survey,” *ACM SIGMOD Record*, Vol.42, No.2(2013), pp.17-28.
- [11] Heuberger, C., “Inverse combinatorial optimization : A survey on problems, methods, and results,” *Journal of Combinatorial Optimization*, Vol.8, No.3(2004), pp.329-361.
- [12] Kempe, D., J. Kleinberg, and E. Tardos, “Maximizing the spread of influence through a social network,” *Proceedings of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, (2003), pp.137-146.
- [13] Kimmel, A.J., *Connecting with consumers: Marketing for new marketplace realities*, Oxford University Press, 2010.
- [14] Rogers, D.L. *The network is your customer : five strategies to thrive in a digital age*, Yale University Press, 2010.
- [15] Wan, P.-J., K.M. Alzoubi, and O. Frieder, “Distributed construction of connected dominating set in wireless ad hoc networks,” *Mobile Networks and Applications*, Vol.9 (2004), pp.141-149.
- [16] Wu, J. and H. Li, “A dominating-set-based routing scheme in ad hoc wireless networks,” *Telecommunication Systems*, Vol.18, No.1-3 (2001), pp.13-36.
- [17] Wuyts, S., M.G. Dekimpe, E. Gijsbrechts, and R. Pieters, *The connected customer : The changing nature of customer and business market*, Routledge, 2010.
- [18] Yang, C., J. Zhang and Z. Ma, “Inverse maximum flow and minimum cut problems,” *Optimization*, Vol.40(2007), pp.147-170.
- [19] Yu, J., N. Wang, G. Wang, and D. Yu, “Connected dominating sets in wireless ad hoc and sensor networks-A comprehensive survey,” *Computer Communications*, Vol.36, No.2(2013), pp.121-134.

- [20] Zhang, J. and M.C. Cai, "Inverse problem of minimum cuts," *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol.47, No.1(1998), pp.51-58.
- [21] Zhang, J. and Z. Liu, "Calculating some inverse linear programming problem," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.72(1996), pp.261-273.
- [22] Zhang, J., X.G. Yang, and M.C. Cai, "The complexity analysis of the inverse center location problem," *Journal of Global Optimization*, Vol.15, No.2(1999), pp.213-218.