Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 40, No. 3, pp. 321-324, June 2014.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2014.40.3.321

<Research Letter>

FMEA에서 주기적인 고장원인 감시하의 기대손실모형에 대한 소고

윤원영[1†] · 권혁무[2]

[1]부산대학교 산업공학과 / [2]부경대학교 시스템경영공학과

Comments on : An Expected Loss Model for FMEA under Periodic Monitoring of Failure Causes

Won Young Yun[1] · Hyuck-Moo Kwon[2]

[1]Department of Industrial Engineering, Pusan National University
[2]Department of Systems Management and Engineering, Pukyong National University

Kwon *et al*. (2013) studied the optimal monitoring interval of systems with finite life cycle. It is assumed that there are several failure modes from several failure causes and the occurrence of causes follows a homogeneous Poisson process. The total expected cost is used as an optimization criterion. In this article, we derive newly the total expected cost under the same assumptions and consider some extended models.

Keywords: Periodic Monitoring, Homogeneous Poisson Process, Expected Total Cost

1. 고장모형과 수정된 기대비용

Kwon *et al*.(2013)은 한정된 수명(임무기간, finite mission period, T)을 가진 제품의 잠재적 고장을 발견하기 위한 검사주기 결정문제를 다루었다. 고려되는 제품 혹은 부품은 다양한 고장모드(mode)가 있으며 각 고장모드는 그 모드의 원인(cause)에 의해 발생하게 된다고 가정하고 있다. 즉 제품의 고장은 다양한 고장모드에 의해 발생하며 각 고장모드도 역시 다양한 원인에 의해 발생하며 각 고장모드의 발생은 먼저 고장모드에 해당되는 원인에 의한 잠재적 고장 이 발생하고 랜덤한 시간 지연 후에 해당 고장모드에 의한 고장이 발생하는 것으로 가정한다.

이 모형은 Christer(1982)의 delay time model 로 알려진 고장발생모형으로 신뢰성분야에서 오랫동안 연구된 모형이다. 그리고 Rausand and Hoyland(2004) 에서는 PF(potential failures) 구간문제로 언급되어 있다. 지금까지의 이 분야에 대한 연구는 최근에 Wang(2012)에 의해 정리되어 있다. Kwon *et al*.(2013)에서 제시된 모형의 특징은 한정된 수명을 가정한다는 것과 고장이 나면 남아 있는 임무시간의 제곱에 비례하여 손실이 발생한다고 가정하고 있다는 것이다. 이 가정은 시스템 고장 이후 시스템의 수리가 불가능한 경우를 의미한다. 그리고 이 손실을 줄이기 위해 주기적으로 제품을 모니터링 할 수 있으며 이때 잠재 고장원인들이 제거되어 고장이 예방된다고 가정한다.

구체적인 고장발생의 과정은 다음과 같다. 고장모드 $k(k=1, \cdots, K)$의 잠재적 원인 $k(i)(k(i)=1, \cdots, C_k)$의 발생이 포아송과정(rate = $\lambda_{k(i)}$)을 따른다고 하고 각 원인 발생이후 랜덤 시간이 경과한 후 해당 고장모드에 의한 고장이 발생한다고 하면 제품의 고장은 가장 먼저 발생한 고장모드에 의해서 고장이 날 것이다. 여기서 만일 $X(k, i, j)$를 고장모드 k의 원인 $k(i)$의 j번째 잠재적 고장의 발생한 시점이라고 하며 $Y(k, i, j)$를 잠재적 고장발생 이후 고장모드발생까지의 지연된 시간이라고 한다. 그리고 $W(k, i, j)=X(k, i, j)+Y(k, i, j)$라고 하

이 논문은 2013년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업입니다(NRF-2013R1A1A2060066).
† 연락저자 : 윤원영 교수, 609-735 부산광역시 금정구 부산대학로 63번길 2 부산대학교 산업공학과, Tel : 051-510-2421, Fax : 051-512-7603, E-mail : wonyun@pusan.ac.kr
2013년 8월 27일 접수; 2013년 1월 21일 수정본 접수; 2014년 1월 24일 게재 확정.

면 이 고장원인에 의한 제품의 고장모드 발생시점은 $W(k,\,i,\,j) = X(k,\,i,\,j) + Y(k,\,i,\,j)$ 중에서 가장 짧은 시점이 될 것이다. 즉 제품의 k 고장모드 발생시점인

$$T_k = \min_{i,j}(\,W(k,\,i,\,j))$$

일 것이다. 고장발생이 임무기간(한정된 수명)전에 발생하면 임무를 수행하지 못하고 남아 있는 기간에 비례한 손실이 발생한다고 가정하자. 그러면 제품 고장모드 발생으로 인한 손실을 줄이고자 제품의 임무기간, T 동안에 $h = T/n$ 주기로 제품이 모니터링 된다고 가정한다. 여기서 모니터링의 의미는 일정시점에서 시스템이 검사되면 이 경우 모든 잠재 고장원인들의 발견이 가능하며 이를 제거 할 수 있다고 가정하는 것이다. 여기서의 최적화문제는 검사주기를 얼마의 길이로 정할 것인가 혹은 임무기간 내에 검사를 몇 회 실시할 것인가이다.

여기서 Kwon *et al*.(2013)에서 가정한 대로 $X(k,\,i,\,j)$, $Y(k,\,i,\,j)$는 독립이라고하며 $Y(k,\,i,\,j)$는 j에는 영향을 받지 않는다고 하면 $Y(k,\,i,\,j) = Y(k,\,i)$이고 지수분포(고장율 = $\mu(k,\,i)$)를 따른다고 하자.

이런 모형가정 하에서 총 기대비용은 기대손실과 모니터링 비용으로 구성되며 모니터링 비용은 간단히 $nC = CT/h$이다. 그러므로 문제는 기대손실 비용을 구하는 것이다. 잠재적 고장원인발생이 포아송과정을 따른다고 하면 잠재적 고장원인이 지수분포(고장율이 포아송과정의 발생율임)를 따르는 시간 간격으로 계속하여 발생하는데 Kwon *et al*.(2013) 에서는 실제 유도과정에서 원인발생까지 시간의 분포를 지수분포로 가정하면서 임무주기 내에서 한번 이상 발생할 수 없는 것으로 가정하여 비용을 유도하였다.

그래서 이 소고에서는 Kwon *et al*.(2013)에서의 사용된 동일한 가정 하에서 원인발생이 포아송과정으로 발생하는 경우의 기대손실을 유도하고자 한다.

기대손실 비용을 구하기 위해 먼저 첫 번째 검사주기를 고려해 보자. $N(k,\,i)$를 한 검사주기에서 발생한 모드 k의 원인 $k(i)$의 잠재적 고장발생 수라고 하면 이 주기에서 고장모드 k의 원인 $k(i)$에 의한 고장이 발생하지 않을 확률은 다음과 같다.

$$P(\min[W(k,\,i,\,1),\,\cdots,W(k,\,i,\,N(k,\,i))] > h)$$

여기서 i 원인이 h 기간 동안에 m가 발생하였다는 조건하에서의 고장이 발생하지 않을 확률 $P(\min[W(k,\,i,\,1),\,\cdots,W(k,\,i,\,m)] > h | N(k,\,i) = m)$를 먼저 구하고자 한다.

포아송과정에서 성립되는 중요정리인 주어진 시간 h에서 발생건수가 주어진 경우 발생시점들의 분포는 일양분포에서의 확률표본의 순서통계량분포와 동일하다(참고, Ross(1996))는 정리를 이용하고자 한다. 그러면 기간 h에서의 발생한 m 개 중 한 개의 원인에 의해 고장이 발생하지 않을 확률은 다음과 같다.

$$\int_0^h e^{-\mu_{(k,i)}(h-x)}\frac{1}{h}dx = \frac{1}{h\mu_{(k,i)}}[1-e^{-\mu_{(k,i)}h}]$$

그러므로 이 원인에 의한 고장이 발생하지 않을 확률은

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{h\mu}\left(1-e^{-\mu h}\right)\right]^m \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^m}{m!} = e^{-\lambda h + \frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu h}\right)} \qquad (1)$$

식 (1)이 고장모드 k의 원인 $k(i)$에 의한 고장이 발생하지 않을 확률이므로 모드 k의 모든 원인에 대해 고장이 한 주기에 발생하지 않을 확률은

$$\begin{aligned} R_k(h) &= \prod_{k(i)=1}^{C_k}\left[e^{-\lambda(k,i)h + \frac{\lambda(k,i)}{\mu(k,i)}\left(1-e^{-\mu(k,i)h}\right)}\right] \qquad (2) \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{C_k}\left[\lambda(k,i)h + \frac{\lambda(k,i)}{\mu(k,i)}\left(1-e^{-\mu(k,i)h}\right)\right]} \end{aligned}$$

이제 한 주기내에 모드 k에 의한 제품의 고장이 발생한 경우에 기대되는 손실을 구하기 위해서 고장시간의 밀도함수는 식 (2)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \sum_{i=1}^{C_k}\left[\lambda(k,\,i)(1+e^{-\mu(k,i)t})\right] \qquad (3) \\ &\quad\times e^{-\sum_{i=1}^{C_k}\left[\lambda(k,i)t + \frac{\lambda(k,i)}{\mu(k,i)}\left(1-e^{-\mu(k,i)t}\right)\right]} \end{aligned}$$

한 주기내에서 모드 k에 의해 고장이 일어난 조건하에서 고장이 지속되는 기대시간은 다음과 같다.

$$e_k(h) = h - \frac{\int_0^h t f_k(t)dt}{F_k(h)} \qquad (4)$$

$F_k(h)$를 모드 k에 의한 고장이 한 주기내에서 발생할 확률이라면 모드 k에 의한 총 기대 고장지속시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_k(h) &= F_k(h)(e_k(h) + (T/h-1)h) + R_k(h)F_k(h) \\ &\quad\times\left(e_k(h) + (T/h-2)h\right) + \cdots + R_k(h)^{T/h-1}F_k(h)e_k(h) \\ &= \frac{1}{F_k(h)}\left(e_k(h)\left(1-R_k(h)^{T/h}\right)\right. \\ &\quad\left. + h\left((T/h-1) - R_k(h)(1-R_k(h)^{T/h-1}\right)\right) \end{aligned}$$

그러므로 모드 k에 의한 기대 손실은 $EL_k(h) = \alpha_k L_k(h)^2$이며 따라서 총 기대비용은

$$ETC(n) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k(T/n)^2 + nC \qquad (5)$$

식 (5)에서 총 기대비용을 n의 함수로 표현하므로 임무기간

을 몇 개의 구간으로 나누는 것이 최적인가를 결정하고자 하는 문제가 되며 Kwon *et al*.(2013)에 고려한 총기대비용을 포아송과정 하에서 구한 것이다.

2. 모형의 개선

이 장에서는 Kwon *et al*.(2013)에서 가정한 모형의 한계점을 지적하고 확장된 모형으로서 두 가지 경우에 대해 손실함수를 제시하고자 한다.

먼저 Kwon *et al*.(2013)에서 구한 총 기대비용 모형의 현실적인 문제점은 각 고장모드에 의한 손실을 정의하고 이를 합하여 총 손실를 구한 부분이다. 일반적으로 임무기간이 주어진 경우 고장이 발생하여 임무를 수행할 수 없는 경우 손실이 발생하는데 Kwon *et al*.(2013)에는 한번 고장이 발생하면 고장을 수리할 수 없다는 가정이 함축되어 있다. 그러므로 임의의 고장모드에 의한 고장은 수리 불가능하고 이후 다른 고장모드에 의한 고장은 가능하며 각 고장의 시점에서 임무기간까지의 남은 시간에 비례하여 각 고장모드별로 손실이 독립적으로 발생한다고 가정하는 것은 다소 무리가 있다. 왜냐하면 고장모드란 고장의 종류이므로 어떤 고장모드라도 발생한 경우 이 후는 다른 고장모드에 의한 고장은 발생할 수 없을 것이다. 그러므로 손실모형은 기본적으로 최초의 고장발생(어떤 고장모드에 의해 발생)에서 부터 임무는 수행이 되지 않고 손실이 발생할 것이다. 그러므로 제품에 대해 모든 모드, 모든 원인에 대해 고장이 한 주기에 발생하지 않을 확률은

$$
\begin{aligned}
R_s(h) &= \prod_{k}^{K} \prod_{k(i)}^{C_k} \left[e^{-\lambda(k,i)h + \frac{\lambda(k,i)}{\mu(k,i)}\left(1-e^{-\mu(k,i)h}\right)} \right] \\
&= e^{-\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{C_k}\left[\lambda(k,i)h + \frac{\lambda(k,i)}{\mu(k,i)}\left(1-e^{-\mu(k,i)h}\right)\right]}
\end{aligned}
$$

이며 한 주기내에 제품의 고장이 발생한 경우에 기대되는 손실을 구하기 위해서 고장시간의 밀도함수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
f_s(t) = &\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{C_k}\left[\lambda(k,\, i)(1+e^{-\mu(k,i)t})\right] \\
&\times e^{-\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{C_k}\left[\lambda(k,i)t + \frac{\lambda(k,i)}{\mu(k,i)}\left(1-e^{-\mu(k,i)t}\right)\right]}
\end{aligned}
$$

한 주기내에서 임의의 모드에 의한 고장이 일어난 조건하에서 고장이 지속되는 기대시간은 다음과 같다.

$$
e_s(h) = h - \frac{\int_0^h t f_s(t)\,dt}{F_s(h)} \tag{4}
$$

$F_s(h)$를 제품에 의한 고장이 발생할 확률이라면 총 기대 고장지속시간은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
L_s(h) &= F_s(h)\big(e_s(h) + (T/h-1)h\big) \\
&\quad + R_s(h)F_s(h)\big(e_s(h) + (T/h-2)h\big) \\
&\quad + \cdots + R_s(h)^{T/h-1}F_s(h)e_s(h) \\
&= \frac{1}{F_s(h)}\Big(e_s(h)\big(1-R_s(h)^{T/h}\big) \\
&\quad + h\Big(\big(\frac{T}{h}-1\big) - R_s(h)(1-R_s(h)^{T/h-1}\big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

그러므로 기대 손실은 $EL_s(h) = \alpha_s L_s(h)^2$이며 여기서 α_s는 비례상수이다.

따라서 총 비용은

$$
ETC(n) = \alpha_s L_s(T/n)^2 + nC
$$

로 구할 수 있다.

두 번째로서 Kwon *et al*.(2013)에서는 시스템이 임무기간 전에 고장이 나면 수리가 불가능한 것으로 가정하고 있다. 여기서는 만일 수리가 가능하다면 어떻게 손실함수를 구하여야 하는가하는 문제를 다루고자 한다. 이 경우도 총 검사비용은 간단하므로 손실함수만 다루고자 한다. 그리고 여기서는 수리가능을 가정하므로 수리비용, C_r을 고려하여야 한다. 현 시점에서 주어진 임무기간까지 남아 있는 검사구간이 m일 때 이후 기대되는 손실을 $ETC(m)$라고 하자. 그러면 다음 첫 번째 검사구간에서 제품고장이 있는 경우와 없는 경우를 고려하여 다음과 같은 순환관계식을 만들 수 있다.

$$
\begin{aligned}
ETC(m) &= F_s(h)(\text{수리지연기대비용} + C_r) \\
&\qquad + ETC(m-1),\, 1 < m \le n \\
ETC(1) &= F_s(h)(\text{수리지연기대비용})
\end{aligned}
$$

이며 수리지연 기대비용은 $e_s(h)$의 함수가 될 것이다. 만일 기대비용이 지연시간에 비례한다고 하고 그 단위 시간당비용이 C_d라면

$$
ETC(m) = F_s(h)(e_s(h)C_d + C_r) + ETC(m-1)
$$

이 될 것이다. 위의 순환식을 이용하여 총 기대손실을 구할 수 있을 것이다.

이 장에서 고려된 두 가지 경우의 손실함수유도가 비교적 손쉬운 것은 원인발생이 동질적 포아송 과정이라는 것과 잠재적인 고장에서 고장발생까지의 시간이 지수분포라는 가정에 근거한다. 만일 이 가정이 수정되는 경우 즉 원인발생이 비동질적 포아송과정(Non-homogeneous Poisson Processes), 지연시간이 일반분포로 확장되는 경우는 손실함수의 유도가 매우 까다로운 문제로 될 것이다. 다른 확장문제로는 검사에서 모든 잠재적인 원인이 발견, 제거되지 않을 수 있는 모형도 고려해 볼 수 있을 것이다. 위에서 언급된 다양하고 복잡한 상황에서는 시뮬레이션을 이용하여 기대손실을 추정하고 메타휴리스

틱(Meta-heuristics)을 이용한 최적화를 하는 방법이 유용할 것으로 여겨진다.

참고문헌

Christer, A. H. (1982), Modelling Inspection Policies for Building Maintenance, *Journal of the Operational Research Society*, **33**, 723-732.

Kwon, H. M. Hong, S. H., and Lee, M. K. (2013), Expected Loss Model for FMEA under Periodic Monitoring of Failure Causes, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **39**(2), 143-148.

Rausand, M. and Hoyland A. (2004), *System Reliability Theory (2nd Edition)*, Wiley.

Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes (2nd Edition)*, Wiley.

Wang, W. (2012), An Overview of the Recent Advances in Delay-time Based Maintenance Modeling, *Reliability Engineering and System Safety*, **106**, 165-178.