韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.2.281
제 28집 제 2호, 2014. 5. 281-302

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 2, May. 2014. 281-302

황금비와 수학교육 담론

박 제 남 (인하대학교)

우리는 본 연구에서 황금비의 역사, Markowsky의 황금비 판단 기준, 그리고 황금비에 대한 오해를 알아보았다. 쿠푸왕의 대 피라미드에는 황금비가 존재하지 않는다는 Markowsky의 주장에 반하여 필자는 황금비의 존재를 주장하였다. 초·중등 교과서와 수학사 관련 국내 출판 책자에서는 황금비의 예로 쿠푸왕의 대 피라미드와 파르테논 신전을 사용하고 있는데 이에 대한 잘못된 서술을 알아보고 황금비 지도의 대안으로 동적 조화 입장에서 현대 산업 디자인, 항공공학, 건축 디자인, 스크린 디자인 등의 예를 제시하였다. 또한, 기축시대가 우리나라 학교수학에 미친 영향을 탈레스와 황금비 중심으로 알아보았다.

I. 서론

학교수학에서 파르테논 신전이나 앵무조개 등을 황금비의 예로 자주 사용하고 있는데 이는 잘못된 것이다. 이와 같은 학교수학 상황에서 황금비의 역사와 그 판단기준을 알아보고 적합한 소재를 제시하고자 한다. 본 논문은 서론을 포함하여 5개의 장으로 구성되었다.

II장에서 우리는 황금비의 정의와 그 판단기준을 알아보았다. Markowsky(1992)는 처음으로 구조공학적 판단을 기반으로 황금비 존재에 대한 기준을 제시했는데, 수치적으로 "±2% 허용오차"를 도입하고 비율이 허용오차 내에 있을 때, 황금비 존재에 대한 상황의 가능성을 요구한다. 이에 따라 파르테논 신전에는 황금비가 존재하지 않는다. 한편, 쿠푸왕의 대 피라미드의 경우 허용오차 내에는 있지만 D. Burton(2007) 등이 사용하는 상황의 가능성에 문제가 있어 피라미드 구조에 황금비가 존재한다는 것은 오해임을 주장한다. Markowsky 주장에 반하여 필자는 쿠푸왕의 대 피라미드에 황금비가 존재한다고 주장하며, 학교수학에서 대 피라미드를 어떻게 다루어야하는지 그 방향을 제시하고자 한다. 따라서 황금비의 최초인식은 고대 이집트와 고대 그리스에서 찾을 수 있는데, 전자는 필자가 주장하는 쿠푸왕의 대 피라미드이고 후자는 피타고라스 학파의 Hippasus(Metapontum)에 있다.

III장에서 필자는 칼 야스퍼스가 표현한 기축시대(axial age)와 관련하여 우리나라 수학교육의 문제점을 제기하였다.

첫째, 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 또는 황금비의 뿌리는 고대 그리스에 있는가? 즉, 우리나라 수학교육은 유럽 중심 수학을 강조하면서 아시아 아프리카적 가치를 추구했는가?

둘째, 황금비란 용어가 언제 생겨났는가? 우연치 않게도 고대 모델에 반하여 아리안 모델이 확장되는 시기에 만들어진 용어를 비판 없이 '가장 이상적으로 나누는 비율'로 받아들여 학생을 지도한 것은 아닌가?

셋째, 파르테논 신전에 황금비가 존재하는가? 그동안 우리는 '파르테논 신전 = 황금비'라는 단순한 도식을 사용하면서 수학을 너무 익숙하게만 만드는 것이 아니었나?

---

* 접수일(2014년 3월 17일), 심사(수정)일(2014년 5월 7일), 게재 확정일(2014년 5월 12일)
* ZDM 분류 : A32, A33
* MSC2000 분류 : 97-03
* 주제어 : 황금비, 동적 조화, 기축시대, 융복합교육

또한, 기축시대가 우리나라 학교수학에 미친 영향을 탈레스와 황금비를 중심으로 알아보았다. 초·중등 수학은 탈레스를 비례(닮음)의 신으로 묘사하고 있는데 이는 잘못된 표현으로 재고되어야 한다.

IV장에서는 'dynamic symmetry'를 '동적 조화'로 변역하고 이에 대한 교수학습 방법을 다루었다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육 과정에서 출간된 모든 고등학교 교과서는 파르테논 신전을 다루지 않고 있으나 그 자리를 대신 차지할 적합한 황금비의 예를 다루지 못하고 있다. 일부 중학교 교과서는 파르테논 신전을 다루고 있는데 이를 삭제하는 것이 바람직하다고 본다. 또한, $\sqrt{2}$-사각형을 나타내는 '금강비'는 교과서에서 사용되고 있지 않지만 수학용어로는 부적합하다. 우리는 초·중등 수학에서 황금비와 금강비를 동적 조화 범주에서 어떻게 다루어야 하는지 그 방안을 제시하고자 한다.

마지막 장에서는 본 소고에 대한 요약과 향후 연구 방향을 알아보았다.

II. 황금비(Golden Ratio)

본 장에서는 용어 '황금비'의 역사와 황금비의 판단기준을 알아보았다. 학교수학에서 사용하고 있는 파르테논 신전에 황금비가 존재하지 않는 이유를 소개하고 문화적 다양성 이해를 위한 파르테논 신전의 교수·학습 방향을 제시하였다. Beard(1968)의 논문을 토대로 필자는 Markowsky(1992)의 주장에 반하여 쿠푸왕의 대 피라미드 구조에 황금비가 존재한다고 주장하였다. 따라서 황금비의 최초인식을 고대 이집트와 고대 그리스에 두어 이를 함께 학교수학에서 지도하는 것이 바람직하다고 본다.

1. 용어 '황금비'의 역사

문헌에 의하여 황금비를 처음 도입한 수학자는 유클리드이며 황금비는 《원론》의 Proposition 30 (BOOK VI)의 해를 말한다. 그는 'extreme and mean ratio'를 용어로 사용했는데

<그림 1> 황금비를 위한 선분의 분할

그 이유는 가장 긴 두 선분의 비율과 가장 적은 두 선분의 비율이 같도록 나누었기 때문이다. 즉,

$$\frac{x}{1}\,(extreme) = \frac{1}{x-1}(mean)$$

에서 $x^2 - x - 1 = 0$을 얻고 $x = (\sqrt{5}+1)/2$이다. 우리는 유클리드의 용어 'extreme and mean ratio'를 '극대와 극대가 아닌 비'로 사용하도록 하겠다. Hambidge(1924)도 이 용어를 사용했으며, Curchin & Fischler(1981)는 Heron이 세 권으로 이루어진 《Metrica》에서 한 변의 길이가 10인 정오각형의 넓이를 구하는 과정을 소개하면서 'extreme and mean ratio'를 사용하고 있다.

황금비는 golden section, golden number, golden mean, divine proportion, division in extreme and mean ratio 등으로 불러 왔다. 우리는 황금비란 용어를 매우 오래전부터 써온 것으로 오해하고 있는데 'divine proportion'은 초기 이탈리아 르네상스시대에 수학자 Luca Pacioli가 1509년에 저술한 《De Divina Proportione》에서(Huntley, 1970), 1781년에 Lorenz는 'continued section', 그리고 Johannes Kepler(1571-1630)는 'propotio divina'로 사용하였다(Hambidge, 1920b, p. 152). 이때까지는 황금비란 용어가 사용되지 않았는데, 독일어 Golden

Schnitt(Golden section)는 1835년 Martin Ohm이 사용하였고, golden ratio는 G. Chrystal이 1898년에 저술한 《Introduction to algebra》에서 처음 사용하였다(Livio, 2002). 한편, 황금비의 기호를 살펴보면 1900년 대 초에 미국 수학자 Mark Barr가 그 전에 사용하던 기호 tau(τ, the cut)를 파르테논 신전의 건축에서 총 감독인 Phidias (기원전 490~기원전 430년 경)의 철자를 사용하여 phi(ϕ)로 표시하였다(Livio, 2002). 이를 근거로 황금비를 기호 phi로 사용한다고 해서 Phidias와 관련지어 파르테논 신전에 황금비가 있다고 주장할 수는 없다.

2. 황금비의 정의와 그 판단 기준

유클리드의 정의와 황금비의 존재를 보이기 위한 판단기준(criterion)을 알아보자. 기원전 300년경 유클리드는 '극대와 극대가 아닌 비'를 모두 3가지 방법으로 원론에서 소개하고 있다. 이를 통하여 적어도 유클리드 시대에는 이차방정식 $x^2-x-1=0$을 인식하고 있었으며, 당시에 이를 어떤 방법으로 상이하게 접근했는지도 알 수 있다.

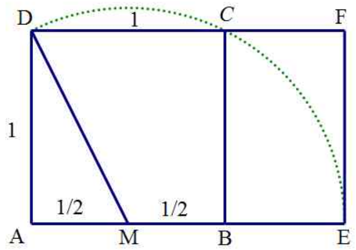
먼저, 이차방정식 $x^2=a(a-x)$를 구하는 문제이다(Book II, Proposition 11)(참고: Book XIII, Proposition 1, 2, 3). 특히, Book XIII(Proposition 1, 2, 3)는 Eudoxus(기원전 408~기원전 355)의 업적으로 여겨지고 있다 (Cajori, 1991, p. 28).

한 변의 길이가 a인 정사각형 ABCD에서 선분 AB 를 H 에서 등분하여 정사각형 AHGF 의 넓이가 직사각형 HBDK 의 넓이가 같은 점 H 를 구하여라.

다음은 Book VI, Proposition 30으로. 약간 변형하여 소개하겠다.

To cut a given finite straight line in extreme and mean ratio (한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 먼저 AB 의 중점 M 에서 선분 MD 를 M 을 중심으로 원을 그려 선분 AB 의 연장선상의 만나 점을 E 라 하자. $\mathrm{MD}=\mathrm{ME}=\sqrt{5}/2$, $\mathrm{AE}=(\sqrt{5}+1)/2:=\phi$, $\mathrm{BE}=(\sqrt{5}-1)/2=1/\phi$. 따라서

$$\mathrm{AE/AB\ (extreme)=AB/BE\ (mean)}).$$



<그림 2> 유클리드의 황금비

끝으로 Hippasus의 업적으로 여기고 있는 정오각형에서 'extreme and mean ratio'의 존재를 살펴보자(Book XIII, Proposition 8).

If in an equilateral and equiangular pentagon straight lines subtend two angles taken in order, they cut one another in extreme and mean ratio, and their greater segments are equal to the side of the pentagon(정오각형에서 같은 꼭짓점을 지나지 않는 두 개의 대각선을 그릴 때, 두 대각선은 서로 다른 것을 extreme and mean ratio로 나눈다).

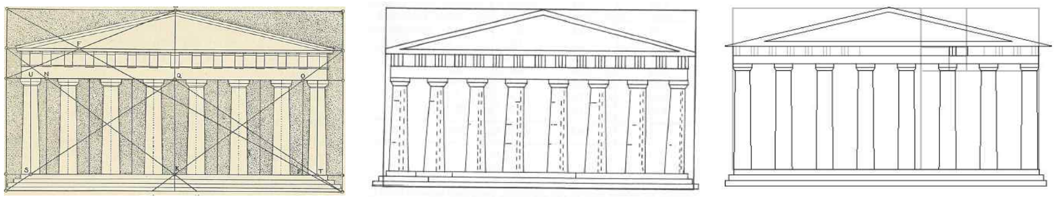
기록이 없는 고대 건축물의 특정 비율이 황금비임을 보이는 최선의 방법은 권위 있는 측정값을 기초로 한 수치해석에 있다. Markowsky(1992)는 처음으로 이에 대한 구조공학적 판단을 기반으로 기준을 제시했는데, 수치적으로 "$\pm 2\%$ 허용오차"를 도입하고 이에 따라 허용구간(acceptance range) [1.58, 1.66]을 필요조건으로 제시하였다. 그리고 비율이 허용구간 내에 있을 때, 황금비 존재에 대한 상황의 가능성을 요구한다.

3. 파르테논 신전에는 황금비가 없다.

파르테논 신전은 1456년 터키 정복 후에는 옛 기념물을 존중했던 이슬람정책으로 비교적 완전히 보존되었지만 1687년 베네치아의 폭격으로 크게 파괴되었다. 1806년 콘스탄티노플 주재 영국대사 Elgin이 떨어진 조각들과 남아 있는 일부 조각을 떼어 영국으로 가져갔다(김호연, 2012). 따라서 파르테논 신전의 전면(facade)의 크기는 전문서적을 이용할 수밖에 없으며 Markowsky는 출판년도가 각각 1986년과 1977년인 Trachtenber & Hyman과 Rossiter의 저서를 이용하였다. Rossiter는 최근 4판에서 정수비 9/4를 언급은 하고 있지 않으며 Trachtenber & Hyman(2002, p. 96)이 최근 판에서 제시한 파르테논 신전의 정면은 (폭)/(높이) = 9/4, 그리고 옆면은 $9^2/4^2$ 로 황금비의 허용구간을 벗어난다. 또한 Rossiter(1981, p. 88)는 (폭)/(높이) = 101/59 ≒ 1.71로 황금비와 거리가 있는 수치를 제시하고 있으며 Livio(2002, p. 73-74)는 파르테논 신전에 황금비가 쓰인다고 확신할 수 없다고 말하고 있다. 참고로 앵무조개(sea shells)에서도 황금비를 말할 수 없다(Falbo, 2005).

한편, Markowsky(1992)가 제시한데로 파르테논 신전의 전면은 경우에 따라 서로 다르다는 것을 알 수 있다. 필자는 2001년에 사용한 Walton의 사진을 추가하였다.

J. Hambidge(1924) H. Huntley(1970) I. Walton(2001)



<그림 3> 파르테논 신전 전면의 황금비 구도

우리나라 수학교육에서 주로 사용하고 있는 왼쪽 사진(Hambidge, 1924)은 하부기단의 끝을 사용하여 사각형의 폭을 결정한 것이고 가운데 사진(Huntley, 1970)은 상부 코니스에 해당하는 삼각형 박공벽(triangular pediment)의 양 끝을 폭으로 결정한 것이다. 또 오른쪽 사진(Ian Walton's Math G – Math for Liberal Arts Students – at Mission College, 2001)은 양 기둥 거리를 폭으로 잡은 것이다. 물론 Hambidge는 파르테논 신전에 황금비가 존재한다는 것을 보이기 위한 것이 아니라 파르테논 신전의 전면을 직사각형으로 설정하고 대각선이나 수선 등을 이용하여 디자인 구성(design-composition)을 한 것이다. 우리는 이를 IV장에서 다시 살필 것인데 그는 서문에서 다음을 언급한다(Hambidge, 1924).

> 어떤 가능성이 있어도 우리는 파르테논 신전에 어떤 수학적 비례가 있는지는 알 수가 없다. (중략) 어떤 시스템이 사용되었다 하더라도 이를 뒷받침할 증거는 없다.

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 출간된 중학교 교과서 두 곳에서 파르테논 신전을 다루며(고호경 외, 2013; 김서령 외, 2013) 류희찬 외(2013b)는 이차방정식에서 황금비를 사용하는데 유클리드의 정의를 출처로 하고 있다. 한편, 고등학교 수학 교과서는 파르테논 신전을 모두 다루지 않고 있다. 수학·미술 융합교육(박종률, 2013)이나 고등학교 미술교과서(장연자 외, 2010)는 파르테논 신전을 황금비의 예로 사용하고 있는데 장연자 외(2010)는 앞에서 제시한 J. Hambidge(1924)의 사진을 사용하고 다음과 같이 기술한다.

> (전략) 황금 비율 또는 황금 분할은 주어진 길이를 가장 이상적으로 나누는 비율로, 근삿값이 약 1.618이다. 그리스 시대의 피타고라스가 정의한 이후, 건축이나 미술품 등에서 즐겨 사용되었다. 오늘날 명함이나 신용카드의 가로와 세로 길이 등에서 많이 발견할 수 있다. (중략) 엄격한 기하학 정신에 의해 건축된 신전으로, 황금 비율의 너비와 높이, 기둥과 열린 공간으로 안정된 비례미를 느끼게 한다.

주미경·문종은·송륜진(2012)은 "수학교과의 융복합교육 프로그램은 주로 실세계 현상을 수학적 개념을 통해 분석하는 과제 중심으로 이루어지는 경향을 보이며 이에 비해 문화적 다양성 이해와 같은 이슈를 다루는 과제는 찾아보기 어렵다"고 주장하는데 이와 같은 시각에서 파르테논 신전의 전면(facade)을 황금비의 예로 단순히 다루기보다는 신전의 건축 배경(Carpentier & Lebrun, 2009, p. 79-80), 양식(Martin, 1996, p. 195), 디자인 구성(Hambidge, 1924), 그리고 사용된 기하학(이종우, 1998)을 주제로 학생을 지도하는 것이 바람직하다. 기둥이나 신전 바닥이 약간 쳐져 보이는 착시현상을 막기 위한 시도를 했는데 이와 같이 해석적 방법이 아닌 즉, 좌표를 사용하지 않고 직접 도형을 다루는 대표적인 예가 투시화법이다. 비극작가 소포클레스(기원전 497~기원전 406)는 무대의 배경으로 원근감을 강하게 나타내려고 투시화법을 쓴 것으로 알려지고 있다. 그리스 시대의 투시화법을 skenographia라 부르는데 익티노스도 당시에 알려진 투시화법을 사용한 것으로 추정할 수 있다(이종우, 1998, p. 170).

4. 고대 이집트의 황금비

기원전 300년 경 유클리드의 《원론》에서 찾을 수 있는 '극대와 극대가 아닌 비'의 최초 인식 문제는 기원전 2580~기원전 2560년경에 완성된 쿠푸왕의 대 피라미드와 피타고라스 학파의 Hippasus를 대상으로 한다. Beard(1968)와 Fritz(1945)가 각각 제시하는 극대와 극대가 아닌 비의 인식은 상황의 가능성에 기반을 둔 것이지 문헌증거에 입각한 것은 아니다. 따라서 이와 같은 상황에서 고대 이집트의 이차방정식($x^2-x-1=0$) 인식 문제는 서양 고전 문명이 아시아·아프리카적 뿌리를 인정하느냐의 문제로 연결될 수 있다.

이집트인을 최초의 수학자이자 천문학자로 주장하는 측량사이자 고고학자인 Alan Rowe는 "기원전 2800년대 청동기 시대에 건축된 대 피라미드의 비상한 수학적 정확성에 대한 수용과 그리스인이 최초의 진정한 수학자라는 확신 사이의 충돌이 존재한다"고 말한다. 그는 계산에 열중하다 측정값이 상당히 눈여겨볼 만한 특성을 드러내며, 그러한 특성에서 원주율과 '극대와 극대가 아닌 비(golden number)'[3], 그리고 피타고라스 정리 등과의 관련을 발견할 수 있으며 이러한 관련은 Herodotus를 비롯한 고대 작가들의 주장과 대체로 일치한다고 주장한다(Bernal, 2011, p. 394; 참고: Mendelssohn, 1974, p. 73). Rowe(1961)는 단위를 cubit으로 사용하여 <그림 4>에서 $d=220$, $h=280$, 따라서 $l/d=1.618$, 그리고 피라미드 밑변의 둘레와 높이의 비를 $(4\times 480)/280=2\pi$로 제시한다. 물론 Rowe(1961)는 Markowsky가 말하는 상황의 확실성은 다루지 않는다. 이와 같은 주장에 대하여 이집트인이 독창적이거나 추상적인 사상을 지닌바 없다고 주장해온 Neugebauer(1969, p. 96)는 피라미드와 신전의 정확한 배치와 π의 사용에 대해 심오한 사고의 결과가 아닌 실용적인 솜씨로 설명하며, Hamilton(2009, p. 53-54)은 극단적으로 피라미드를 거대한 무덤으로 보고 있다.

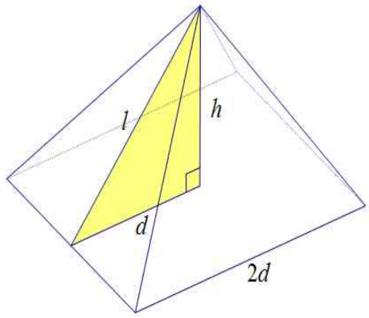
> 현실에 대한 이러한 이해는 이성으로 파악되는 것과는 완전히 다른 무엇이다. 이성의 작용과는 전혀 관계가 없다. 아직 자연의 방식으로부터 그 둘을 구분하는 의식이 없었던 사람들에게 이것은 심원한 직관

---

3) 옮긴이는 이를 황금수로 쓰고 776쪽 '작은 사전'에서 "연대학에서 달리 위상이 같은 날짜에 다시 나타나는 메톤 주기(19년)를 갖는 태양년의 위치"로 소개하는데 이는 오역임

> 력이다. 이러한 직관적인 느낌은 삶과 죽음이 거의 구별되지 않는 이집트의 무덤이 불멸의 희망 속에서 진리가 무엇인지 생각해 내려고 한 소크라테스가 앉아 있던 그 감옥과 다른 것만큼이나 이성이 도달하는 현실에 대한 개념과 다르다.

쿠푸왕의 대 피라미드에 황금비가 존재한다는 것은 상황의 가능성이 무엇이냐에 있다. 특히 질을 따질 때, 다음 절에서 다룰 Hippasus를 대상으로 한 상황의 가능성과의 형평성도 고려해야한다. 물론 비교 대상의 년도가 기원전 2600년대와 기원전 5세기 중반이라는 것도 역시 참고해야 한다. 먼저, 고대 이집트인들이 황금비를 인식했는지 그 상황의 가능성을 알아보자.



<그림 4> 쿠푸왕의 대 피라미드

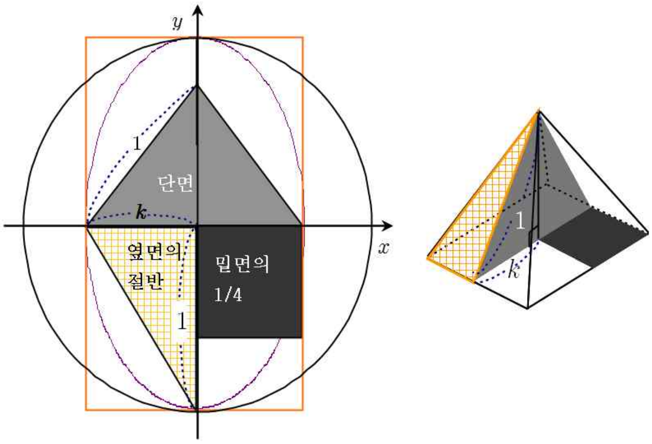
먼저, 부정적인 주장부터 살펴보자. Markowsky(1992)는 S. Taseos가 제시한 쿠푸왕의 대 피라미드의 크기(밑변 평균 길이: 755.79 feet, 높이: 481.4 feet)를 이용하여 허용구간 내에 있는 값 $l/d = 612.01/377.90 \fallingdotseq 1.62$를 얻는다. 물론 허용오차 내에 있다고 해서 황금비가 존재한다고 말할 수는 없다. Markowsky는 상황의 가능성에 의문을 제기하고 쿠푸왕의 대 피라미드에 황금비가 존재한다는 것은 그릇된 생각임을 주장한다. 그가 문제시하는 내용을 알아보자. 쿠푸왕의 대 피라미드의 크기를 Herodotus(2008, p. 145)는 밑변의 길이와 높이가 8 plethral(800 feet)로 같은 것으로 엉성하게 기술하고 있다. 우리는 문장을 정확하게 하기 위하여 영문판을 사용하였다.

> Each of its sides, which for a square, is eight plethra(800 feet) long and the pyramid is eight plethra heigh as well.

그런데 D. Burton 등은 Herodotus의 기록을 근거로 하여 "피라미드 높이의 제곱은 옆 면 삼각형의 넓이와 같다"로 잘못 사용하고 있다(2007, p. 59). 즉, $h^2 = (1/2)(2d)l = dl$을 가정하고 피타고라스 정리에서 $l^2 = h^2 + d^2$이므로 $(l/d)^2 - h^2/d^2 - 1 = 0$이고, 이차방정식 $(l/d)^2 - l/d - 1 = 0$으로부터 $l/d = (\sqrt{5}+1)/2$을 얻는다. 그러나 Herodotus의 인용을 바탕으로 "피라미드 높이의 제곱은 옆 면 삼각형의 넓이와 같다"를 사용할 수 없다. 따라서 수치적으로는 가능성이 있지만 상황의 가능성이 불분명하므로 Markowsky(1992)는 쿠푸왕의 피라미드에 황금비가 존재한다는 것은 그릇된 생각이라고 주장하였다.

그러나 필자는 다음에서 Beard(1968)의 주장을 상황의 가능성으로 제시하는데 Markowsky가 Beard의 논문을 보지 못했거나 무시한 것으로 판단한다.

Beard(1968)는 1880년대 초 W. Petrie가 제시한 높이 481.33 feet, 밑변의 길이 755.73 feet를 사용하여 황금비와 원주율의 존재를 주장하고 있다. <그림 4>에서 l/d이 황금비와 가깝다는 것을 높이 $755.73/(2\sqrt{\kappa}) \fallingdotseq 480.65$ (여기서 $\kappa = (\sqrt{5}-1)/2$)가 실측 높이 481.33과 가깝다는 것으로 설명하고 있다. Beard는 허용오차를 사용하지 않았지만 오차는 0.1%로 Markowsky의 허용오차 내에 있다. Beard의 주장을 식으로 나타내면 $h = d/\sqrt{\kappa}$이므로 $h^2 = d^2/(d/l) = dl$. 즉, 피라미드 높이의 제곱은 옆 면 삼각형의 넓이와 같다. 물론 $l^2 = d^2 + h^2$이고 양변을 d^2으로 나누면 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ (여기서 $x = l/d$)을 얻는다.



<그림 5> Beard의 상황의 가능성

편리한 계산을 위하여 앞에서 $l/d=\phi$ 이므로 <그림 4>에서 $l=1$로 놓으면 밑면의 모서리의 길이의 절반은 '극대와 극대가 아닌 비' ϕ의 역수가 된다. 즉, $\kappa=1/\phi$이다. 이때 피라미드의 단면에서 높이는 $\sqrt{1-\kappa^2}=\sqrt{\kappa}$이다. 한편, 네 점 $(\pm\kappa,0)$, $(0,\pm 1)$을 지나는 타원 $x^2/\kappa^2+y^2/1^2=1$의 초점 $(0,\pm\sqrt{1-\kappa^2})=(0,\pm\sqrt{\kappa})$은 피라미드의 높이를 나타낸다. 또한 Beard는 면의 절반을 나타내는 삼각형의 빗변은 주어진 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이임을 보였다. Beard(1968)는 이에 대하여 "어떤 실용 기하학의 거장들에게 위에서 언급한 수학적 관계는 확실히 흥미를 끌었을 것이다(Such relationships would certainly have appealed to these Egyptian masters of practical geometry)"라고 주장한다.

허용오차 내에는 있지만 Markowsky(1992)가 부정적으로 제기한 상황의 가능성을 Beard(1968)의 주장으로 알아보았다. Beard의 주장은 충분한 가치가 있으며 따라서 쿠푸왕의 대 피라미드에는 황금비가 존재한다고 보는 것이 필자의 견해이다.

다음에서 피타고라스 학파인 Hippasus가 황금비를 최초로 인지했다는 것에 대하여 Kurt von Fritz나 Merzbach & Boyer는 어떠한 상황의 가능성을 제시하는지 알아보자. 기원전 2600년대와 2000년 이상이 차이가 나는 기원전 5세기 중반의 사건을 대상으로 하는데 주목하자. 그리고 상황의 가능성을 비교하는데 형평성을 잃지 말아야 한다는 것이 필자의 견해이다.

5. 고대 그리스의 황금비

Hippasus의 생몰 년대를 기록으로는 알 수가 없는데 플라톤의 대화록 《Theaitetos》는 그가 기원전 510~기원전 490년에 태어난 것으로 예측하는데 도움이 되며 특히, 용어 dynamic symmetry를 번역하는데 훌륭한 참고자료이다. 플라톤은 《Theaitetos》에서 앎에 대한 예비적 정의의 시도와 이에 대한 비판으로 제곱근을 소개하는데 소크라테스와 Theaitetos의 대화를 보자(Platon, 2013, p. 82-83).

> 데아이테토스: 여기계신 테오도로스 선생님께서는 제곱근(dynamis)과 관련해서, 즉 3pous의 제곱근 및 5pous의 제곱근과 관련해서 저희에게 작도를 해 주시면서, 제곱근들이, 길이에서 1피트인 변과는 통약(symmetroi)될 수 없다는 것을 보여 주셨고, 17pous의 제곱근에 이르기까지 각기 하나씩 택하여 그런 식

으로 해 주셨답니다. 한데 어찌된 일인지 거기서 막히셨습니다. 그래서 다음과 같은 생각이 우리에게 떠올랐답니다. 제곱근들이 개수에서 무한한 것으로 드러난 만큼, 그것들을 하나로 모으는 시도를 하여 그것을 가지고서 이 모든 제곱근들을 불러야겠다고 말입니다

Plato의 대화록 《Theaitetos》의 극중 시점은 기원전 399년이고 Theodorus(Cyrene)를 노인(old man)으로 묘사한다. 이는 다른 기록에서 Theodorus가 기원전 470 또는 기원전 460에 태어 났다는 것과 일치한다. Hippasus는 Theodorus 이전 세대로 고대의 관례에 따라 30~40세 정도 차이가 나며 따라서 기원전 510~기원전 490년에 태어난 것으로 예측한다. Platon은 《Theaitetos》에서 Theodorus가 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ 이 유리수가 아님을 증명했다고 기록하고 있는데 어떤 방법으로 증명을 했는지 그리고 $\sqrt{17}$ 까지만 보인 이유는 아직 논쟁거리이지만 $\sqrt{2}$ 는 Theodorus의 증명 이전에 이루어진 것은 분명하다. 필자는 증명을 짝수와 홀수로 나누어 시도하지 않았다고 보는데 만일 짝수와 홀수로 나누어 시도했다면 일반화도 가능했을 것이다(참고: Misiurewicz, 2013). 이에 따라 Fritz(1945)는 Hippasus가 $\sqrt{2}$ 와 $(\sqrt{5}+1)/2$을 무리수로 인지한 시점을 기원전 5세기 중반을 넘지 않는 것으로 주장한다. 명백한 문헌적 증거는 없지만 Hippasus가 'extreme and mean ratio'를 최초로 발견했다는 Fritz(1945)의 주장은 Hippasus가 정오각형과 각 면이 정오각형인 정십이면체를 최초로 작도하고 구현한 것에 기반을 두고 있으며, 당시에는 정십이면 결정체를 지닌 황철석을 기하학적으로 분석하는데 관심이 있었다. Merzbach & Boyer도 "이를 증명할 문서는 없지만 적어도 가능성이 있다"(2011, p. 66)고 주장한다. 또한, Moh(1992, p. 263)는 최초라는 언급 없이, 황금비가 유리수가 아니라는 증명을 Hippasus가 한 것으로 사용하고 있다.

Beard(1968)와 Fritz(1944)의 주장에 근거로 'extreme and mean ratio(극대와 극대가 아닌 비)'를 누가 최초로 발견했는가를 알아보았다. 전자는 기원전 2600년경의 쿠푸왕의 대 피라미드를 대상으로 하고 후자는 기원전 5세기 중반의 Hippasus을 대상으로 하고 있다. 필자는 학교수학에서 황금비의 최초 인식을 고대 이집트와 고대 그리스에 두어 이를 함께 소개하는 것이 옳다고 본다.

III. 기축시대(Axial Age)

우리는 초등학교나 중학교 수학시간에 탈레스를 '최초의 수학자', '닮음의 신' 등으로 소개하고 있다. 또한 교과서에서도 그렇게 서술하고 있다. 이 서술은 서양 고전 문명이 아시아 아프리카적 뿌리를 인정하느냐로 연결된다. 칼 야스퍼스가 표현한 '기축시대(axial age)'에 따르면 기원전 6세기와 5세기에 진정한 종교, 철학, 과학이 시작되었다는 것이다. 중국에서 공자와 노자가, 인도에서 부처가, 페르시아에서 조르아스터가 활동했고, 바빌로니아에서 유대교가 창시되었는데 그 중에서도 가장 중요한 것은 그리스의 기적(Greek miracle)으로 소크라테스, 플라톤, 아리스토텔레스에 의하여 이루어진다(Bernal, 2012). 또한, Veljan (2000)은 이와 같은 논조로 피타고라스의 출현을 설명한다.

Pythagoras was born about 570 B.C. on the island of Samos and died about 490 B.C. Many other well-known philosophers lived and worked around the same time, but in other civilizations. Let us mention only Gautama Buddha in eastern Asia, Confucius (or Kung Fu-tse) in China, Zoroaster (or Zarathustra) in Persia, and the prophet Isaac (or Litzak) in Judea. Was this simultaneous flowering of philosophy a mear accident?

기축시대를 문학자 그리고 정치학자의 저서에서도 발견할 수 있는데 문학가 Andre Bonnard(2011, p. 107)는 탈레스의 등장에 대하여 “인류의 역사에서는 마치 폭발처럼 갑작스럽게 새로운 형태의 행동이나 사고가 나타나는 순간이 있다. 아시아 대륙에 위치한 그리스, 그러니까 이오니아에서 기원전 7세기 말 무렵에 탈레스와 그를 따르는 학파와 더불어 과학, 즉 합리적인 과학 지식이 출현한 것도 그런 식이였다”고 언급한다. Huntington(2001, p. 58)은 기축시대를 초월적 질서로 설명하고 Armstrong(2010)은 서문에서 “기원전 900년에서 기원전 200년으로 하여 이 뜨거운 창조의 시기에 영적, 철학적 천재들은 완전히 새로운 종류의 인간 경험을 개척해 나아갔다고” 언급하고 있다.

1. 학교수학과 기축시대

Martin Bernal(2011)은 그리스 사를 파악하는데 고대 모델과 아리안 모델을 도입한다. 전자는 그리스를 이집트와 셈족 문화의 주변부라는 시각에서 레반트와 연결 짓고, 후자는 본질적으로 유럽인 혹은 아리아인과 연결 짓는다. 고대 모델은 고전기와 헬레니즘 시대의 그리스 인이 지닌 전통적인 견해였다.

Bernal은 기축시대이론에 대한 반론으로 힉소스족의 그리스 지배와 테라 폭발연대의 재설정으로 동지중해에서 이집트의 영향력을 주장한다(2012, p. 450-462). 또한, 그는 “우리가 지금껏 배워온 그리스 역사는 기껏해야 1840~1850년대의 산물인데 독일과 영국의 학자들에게 이집트가 그리스를 식민지로 삼고 문명화 시켰다는 이야기는 ‘인종학’을 위반하는 것이었다. 그런 이야기는 모두 믿을 수 없는 것으로 폐기 당했다”고 주장한다(2011, p.12-41).

수학에 있어 기축시대란 그리스의 기적으로 탈레스나 피타고라스의 출현을 설명하고 있는 것이며, 그들의 학문적 성취를 자생적인 것으로 몰고 가는 것이다(참고: Bonnard, 2011; Veljan, 2000). 필자는 학교수학에서 탈레스를 최초의 수학자나 비례의 신으로 묘사하는 배경이 기축시대에 있다고 본다. 한편, Fritz(1945)는 고대 이집트와 바빌로니아 수학에서는 존재에 관한 문제를 어렴풋이 느끼지도 못한 것에 주목을 하면서 고대 그리스 수학의 위대함을 ‘동일한 단위로 잴 수 없다’는 피타고라스 학파의 ‘incommensurability’의 발견에 두고 있는데 이와 같은 맥락에서 고대 이집트인들의 ‘extreme and mean ratio’의 발견을 인정하지 않겠다는 의도가 내재되어 있다고 볼 수 있다.

기원전 5세기 그리스에 널리 퍼진 고대 모델이 기원후 18세기 말까지 존속되다가 19세기 초에 허물어지면서 1840년대 아리안 모델에 의해 대체되는 시기에 우연치 않게 ‘극대와 극대가 아닌 비’가 ‘황금비’로 사용되기 시작했으며, 유럽문명은 황금비의 최초의 인식을 고대 그리스인에 두어 이집트로부터의 문명의 전이를 인정하지 않겠다는 것이라고 필자는 주장한다.

‘극대와 극대가 아닌 비’를 고대 이집트인(쿠푸왕의 대 피라미드) 또는 고대 그리스인(피타고라스학파; Happasus) 중 누가 최초로 인식했느냐는 상황에 가능성에서 판단할 수밖에 없기 때문에 우리나라 수학교육에서는 황금비를 다룰 때, 이 두 가지 정황을 모두 언급하는 것이 바람직하다. 즉, 이집트와 바빌로니아에서 아테네로 그 다음에는 로마, 바그다드로 전이 되듯이 탈레스나 피타고라스의 출현을 기축시대 이론으로 보는 것이 아니라 학문적 전이로 보는 것이 옳다고 생각한다.

2. 학교수학에서 다루는 쿠푸왕의 대 피라미드와 탈레스

초등학교 수학 6-1(익힘책, p. 123)의 비례식에서 피라미드를 다루고 탈레스의 업적을 설명한다. 우리나라 학교수학이 쿠푸왕의 대 피라미드와 탈레스를 어떻게 바라보는지 다음에서 찾을 수 있다(교육과학기술부, 2011).

피라미드의 높이를 잰 탈레스

> 피라미드는 2.5톤이나 되는 돌 230만 개를 쌓아서 고대 이집트 왕의 무덤입니다. 그런데 이렇게 커다란 피라미드의 높이를 단지 짧은 막대기 하나로 알아낸 사람이 있었다고 합니다. 그 사람이 바로 탈레스입니다. 그렇다면 탈레스는 어떻게 피라미드의 높이를 구할 수 있었을까요? (중략) 피라미드의 높이를 구하려고 고민하던 탈레스는 이렇게 비례식을 최초로 발견하게 되었습니다. 이후 탈레스에게는 '비례의 신'이라는 별명이 생겼습니다.

우리는 비례식에서 위 문제를 다루고 있는데 높이를 측정한다는 것은 경사각과 관련이 있다. 먼저, 탈레스는 각의 크기(magnitude)를 어떻게 이해하고 있었을까? 이집트인이 피라미드에서 사용한 기울기(seked, cotangent)와 같이 어떤 꼴의 형태로 이해하고 있었다는 Heath의 주장을 들어보자(Heath, 1981, p, 131).

> Thales did not yet conceive of a angle as a magnitude, but as a figure having a certain shape, a view which would agree closely with the idea of the Egyptian seket(cotangent), 'that which makes the nature', in the sense of determining a similar or the same inclination in the faces of pyramids.

나일 강 근처에는 지금도 거대한 피라미드가 35개나 남아 있고, 기자(Giza)에는 3개의 대 피라미드(the great Pyramids)가 있다. 탈레스는 여러 피라미드의 높이를 쟀다고 전해지는데 이에 대하여 두 가지 버전이 있다(Suzuki, 2002, p. 57; Eves, 1983, p. 22).

- (버전1, Hieronymus) 한 남자의 키와 남자의 그림자의 길이가 같을 때, 피라미드의 높이를 그림자의 길이로 하였다.
- (버전2, Plutarch) 탈레스는 막대기를 세우고 닮은비를 이용하여 피라미드의 높이를 재었다.

탈레스의 방법과 기원전 19세기에 고대 이집트인들이 Dakshur, Giza, Meidum에 있는 실존 피라미드들의 높이나 기울기를 다룬 방법을 알아보고 이들을 비교해 보자.

제12왕조 아메넴하트 3세(기원전 1859~기원전 1814) 때 쓰인 수학을 집대성한 《아메스 파피루스》에서 고대 이집트인은 코탄젠트(cotangent)인 'seked'를 기울기로 정의하여 사용하였다(Chace, 1979; Robins & Shute, 1987, p. 47). 수학자 Ahmose는 《아메스 파피루스》에서 'seked' 관련 문제를 문제 56, 문제57, 문제 58, 문제 59, 그리고 문제 60에서 다루고 있는데 57번 문제를 현대적 기호를 사용하면 $\cot\theta = \frac{(1/2)(140)}{(\text{높이})} = \frac{1}{7}\left(5\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$(여기서 1 cubit = 7 plams) 따라서 피라미드의 높이 h는 $\frac{280}{3} = 93\frac{1}{3}$(cubit)이다(Chace, 1979). 59B는 59번의 역을 묻는 문제이다. 실제 'seked'문제인 문제 56-60과 관련된 피라미드를 보면 문제 56은 Dakshur에 있는 피라미드이고, 문제 57, 58, 59에서 사용한 피라미드는 기자의 Chephren의 대 피라미드이다. 우리가 현제 사용하고 있는 기울기로 바꾸면 $53°7'$이다. 마지막으로 문제 60은 Meidum에 있는 피라미드이다(Heath, 1981; Mendelssohn, 1974). 이와 같은 상황에서 초 중등 수학은 탈레스를 비례(닮음)의 신으로 묘사하고 있는데 이는 잘못된 표현으로 재고되어야 한다.

교과서에서 피라미드를 어떻게 교수 학습 자료로 사용하고 있는지 알아보자. 초등 교과서(수학 6-1, 익힘책, p. 123)가 다루는 대 피라미드는 돌의 개수(230만개)와 무게(2.5톤)로 보아 쿠푸왕의 대 피라미드이다(Jackson & Stamp, 2006, p. 56). 탈레스가 높이를 재는 방법은 Plutarch의 버전이다. 현재 우리가 사용하고 있는 삼각(함수)비 cotangent를 고대 이집트인들은 제12왕조(기원전 1859~기원전 1814)때 피라미드에 적용하고 있는 것을 앞에

서 알아보았다.

한편, 초등수학 5-2(p. 116)는 기원전 2550년경에 세워진 이집트의 피라미드를 사용하여 밑변의 길이를 230미터 그리고 옆면 삼각형의 높이를 185.85미터로 하여 비율 $185.85/115$를 소수 1.616으로 나타내는 문제를 황금비의 용어사용 없이 다루고 있다. 교과서가 제시한 크기는 쿠푸왕의 대 피라미드의 크기이며 건설연대는 기원전 2580~기원전 2560년으로 받아드리고 있다.

초등학교 3~4학년군 수학 ③(p. 34)에서 쿠푸왕의 대 피라미드를 쿠푸왕의 피라미드로 소개하고 이집트인이 사용한 수 체계를 다루고 있다. 교사용 지도서(p. 144)는 왕을 “욕심 많고 자존심이 강한 왕인 것 같습니다. 수학을 너무 싫어하고 못하는 인물인 것 같습니다”로 제시하고 있는데 이러한 표현이 적절한 것인지 생각해볼 필요가 있다. 또한, 초등학교 3~4학년군 수학 ②(p. 108)는 피라미드 공사현장에서 4명의 인부가 3개의 빵을 나누는 문제를 다루고 있다. 교과서는 ‘10만 명이 3개월 교대로 동원되어 20년 동안 만들었다’고 적고 있는데, 이 내용은 Herodotus의 Book II, 124(Herodotus, 2012)의 내용이므로 교과서가 말하는 피라미드는 쿠푸왕의 대 피라미드이다. 한편, 본 문제는 고대 이집트인이 단위분수를 도입한 목적 중 도형의 분배에 해당되는 내용으로 분수를 단위분수 $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ 로 분해하는 최적화(Greedy algorithm)의 문제이다(Chace, 1979). 그러나 교사용 지도서(p. 227)는 이와 같은 교사를 위한 내용제공 없이 이집트인이 사용한 분수의 모양에 초점을 두어 설명하고 있다. 한편, 당시의 의식주문제, 평균수명, 결혼연령 등의 시대 상황(참고: Jakson & Stamp, 2006)을 사회 3-2(3단원 다양한 삶의 모습)에서 활용할 수 있다. 알고 싶은 나라의 문화를 조사하여 친구들에게 소개하는데 놀이, 음식, 전통, 의복, 춤 등을 다룬다(교육과학기술부, 2011c).

류희찬 외(2013a, p. 305)가 다루는 피라미드는 누구의 피라미드인지 알 수는 없으며 탈레스가 재는 방법은 Plutarch의 버전이다. 여기서도 탈레스를 ‘비례(닮음)’의 신으로 기술하고 있다. 이는 잘못된 표현으로 재고되어야 한다.

3. 학교수학의 문제

그동안 학교수학이 다뤄온 황금비를 토대로 다음 세 가지 문제를 생각해보자.

첫째, 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 또는 황금비의 뿌리는 고대 그리스에 있는가? 즉, 우리나라 수학교육은 유럽 중심 수학을 강조하면서 아시아·아프리카적 가치를 추구했는지 되돌아 보아야한다.

둘째, 황금비란 용어가 언제 생겨났는가? 우연치 않게도 고대 모델에 반하여 아리안 모델이 확장되는 시기에 만들어진 용어를 비판 없이 ‘가장 이상적으로 나누는 비율’로 받아드린 것은 아닌지 생각해 보아야한다.

셋째, 파르테논 신전에는 황금비가 존재하는가? 그동안 우리는 ‘파르테논 신전 = 황금비’라는 단순한 도식을 사용하면서 수학을 너무 익숙하게만 만드는 것이 아니었는지 돌아보아야 한다.

IV. 동적 조화(Dynamic Symmetry)

우리가 앞에서 언급한데로 2009 개정 교육과정 하에서 출간된 모든 고등학교 수학 교과서는 파르테논 신전을 더 이상 황금비의 예로 다루지 않는다. 문제는 파르테논 신전이 떠난 자리에 수학 교과서는 적합한 황금비의 예를 사용하지 못하고 있다. 필자는 본장에서 바람직한 황금비의 예와 교수 학습방법을 제시하고자 한다.

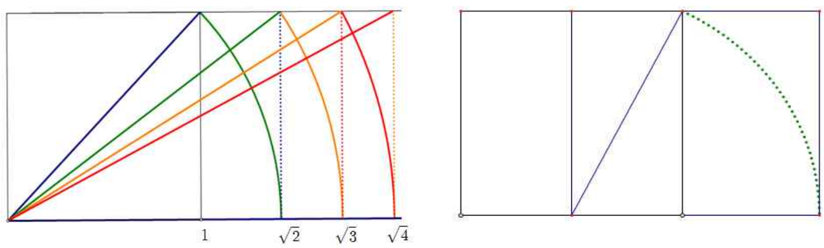
Hambidge(1920b)는 ‘dynamic symmetry’를 디자인 구성(design-composition)에서 넓이의 관계를 설정하는 방법(a method of establishing the relationship of area)으로 정의하고, 그 기원을 고대 이집트에 두고 있다. 토지측량을 위한 경험적이고 실용적인 설계가 고대 이집트에서 발전했는데. 그 이유는 나일 강 범람으로 세금을 낮

추기 위하여 단순하고 실용적인 토지측량이 필요했기 때문이라고 그는 주장한다. 이집트 기하학에 근원을 둔 Hambidge의 정의는 Herodotus의 기록을 참고한 것이라고 필자는 판단한다. Herodotus가 말하는 기하학의 근원을 살펴보자(Herodotos, 2012, p. 223).

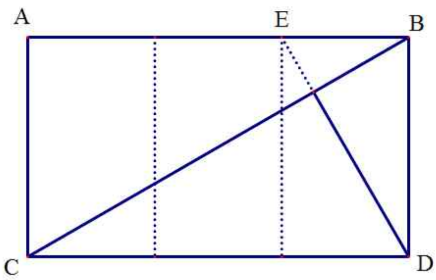
> 사제들에 따르면 왕은 또 국토를 나누어 전 아이귑토스인들에게 같은 크기의 네모난 땅을 주고 해마다 소작료를 받아 세수를 충당했다. 받은 땅의 일부가 강물에 떠내려갔을 경우 당사자는 왕을 찾아가 신고했다. 그러면 왕이 조사관들을 파견해 할당된 땅이 얼마나 줄었는지 다시 측량하게 하여 땅이 준 마큼 소작료를 줄여주었다. 내 생각에, 그런 연유로 기하학이 창안되어 헬라스로 수입된 것 같다. 해시계와 해시계의 바늘과 하루를 12부분으로 나누는 지식은 헤라스인들이 바빌론인들에게 배웠기에 하는 말이다.

1. 동적 조화(dynamic symmetry)와 디자인 구성(design-decomposition)

Hambidge(1924)는 6가지의 사각형을 도입하고 이들을 거듭해서 사용하여 파르테논 신전의 디자인 구성을 설명하고 있다. 일부를 살펴보면, 다음 왼쪽 그림은 정사각형에서 대각선을 연속적으로 사용하여 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 등의 사각형을, 그리고 오른쪽 그림은 처음 정사각형에서 절반을 취하고 이에 따른 대각선을 이용하여 황금사각형을 작도하는 것을 보여준다.



<그림 6> $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$-사각형과 황금 사각형



<그림 7> $\sqrt{3}$-사각형과 수선

디자인 구성을 위하여 사각형에서 대각선($\overline{CB}$)과 그 수선($\overline{DE}$)을 사용한다. 이때 $\sqrt{3}$-사각형에서 수선은 선분 AB를 3등분하는데 일반적인 $\sqrt{n}$-사각형에서 EB는 사각형의 폭을 n등분한다(Hambidge, 1920a).

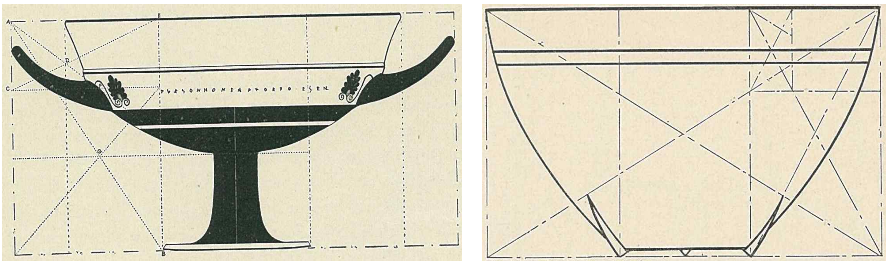
황금사각형은 구조를 분석하는데 사용하는 하나의 기본 단위이지 이를 사용한다고 해서, Hambidge(1924)가 서문에서 언급하듯이, 파르테논 신전에 황금비가 존재한다는 것은 아니다. 우리는 dynamic symmetry의 정의와 디자인 구성을 넓이와 작도로 간략히 알아보았다. 이제 dynamic symmetry를 '동적 조화'로 번역하자. 앞에서 알아 본데로, Platon은 《Theaitetos》에서 제곱근을 소개한다. 기원전 5세기 그리스 시대에서 인식하고 있던 'commensurability'를 'symmetry'로 사용하고 있다. 즉, 두 선분의 길이가 동일한 단위로 잴 수 있는 것을 의미한다. 따라서 이들의 비율은 유리수이다. 한편, 동일한 단위 길이로 잴 수는 없으나 거듭제곱에 의하여 이들의 비

가 유리수가 될 때, 그리스인들이 사용한 용어 'commensurable power(δυνάμει σύμμετροι)'를 Hambidge(1924)는 dynamic symmetry로 차용하고 있으므로 우리는 이를 동적 조화로 번역하여 사용하자.

2. 동적 조화의 초·중등 수학 지도 방향

동적 조화에서 사용하는 용어는 (정)사각형, 대각선, 그리고 대각선의 수선으로 초등학교 3~4학년군 수학 ④ '수직과 평행'에서 이를 다룬다(교육부, 2013). 물론 좌표를 사용하여 직선의 식, 일차연립방정식(두 직선의 교점), 그리고 두 직선의 직교관계 등을 지도하려면 중학교 2학년과 고등학교 1학년의 수학을 필요로 한다. 준비물은 삼각자, 컴퍼스, 그리고 모눈종인데 정사각형에서 직사각형으로 확대하기 때문에 모눈종이를 사용하면 편리하며 삼각자를 사용하기 때문에 동적 조화 지도에서 각도기는 필요 없다.

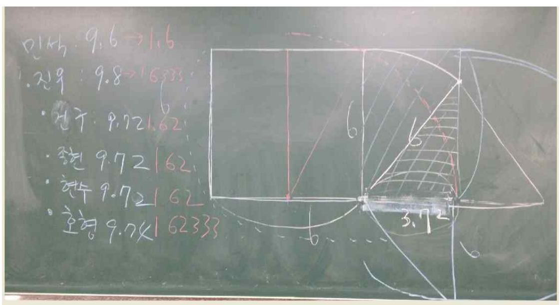
디자인 구성의 예를 몇 개 살펴보자. 다음 왼쪽 사진은 고대 그리스 도자기(skyphos)를 3개의 $\sqrt{2}$-사각형으로 디자인 구성을 한 것이며 오른쪽 사진은 $\sqrt{3}$-사각형으로 디자인 구성을 한 것으로 주어진 대각선의 수선이 폭을 3등분하고 있다(Hambidge, 1920b).



<그림 8> $\sqrt{2}$-사각형과 $\sqrt{3}$-사각형

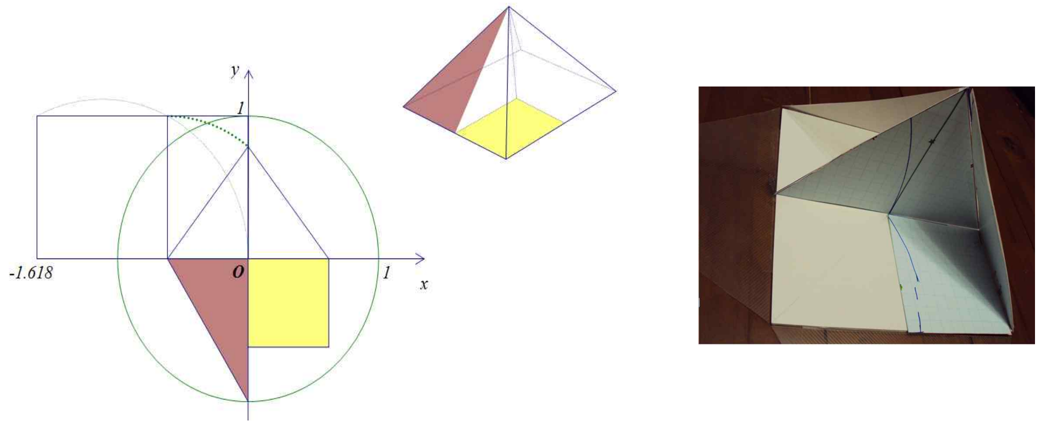
한편, 낙랑시대 조왕리 69호 전곽분 그리고 평양 청암리의 건축군 유적지중 기단(건축물의 터전이 되는 단)의 평면도 등은 동적 조화에서 말하는 $\sqrt{2}$-사각형의 예이다(김용운 김용국, 2012, p. 110-112). 또한 금강비로 다루는 사각형 또한 $\sqrt{2}$-사각형이다(박종률, 2013). 따라서 학교수학에서 용어 '금강비'를 사용하지 않는 것이 바람직하다. 황금사각형과 $\sqrt{2}$-사각형을 혼합한 형태도 지도하기가 어렵지 않다(Hambidge, 1920c).

<그림 9>는 초등수학 5-2(p. 116)의 내용이다. 예비 초등학교 5, 6학년 6명을 대상으로 황금사각형을 작도하고 그 비율을 교과서에서 다루는 직각삼각형의 비율로 옮기는 작도를 지도한 것이다. 학생들은 모눈종이 위에 한 변의 길이가 6인 정사각형에서 황금사각형을 만들어 폭을 자로 재어보게 하면 9.6, 9.8, 9.72, 9.72, 9.72, 9.74를 제시한다. 폭을 9.72로 사용한 건구, 종현, 현수는 $6/(9.72-6)=6/3.72 \fallingdotseq 1.613$을 얻는다. 학생들은 처음 정사각형의 변의 길이를 6 대신 185.85로 하면 3.72 대신 교과서의 숫자 115를 얻는다는 것을 작도를 통하여 예측할 수 있다.



<그림 9> 쿠푸왕의 대 피라미드 지도

다음은 쿠푸왕의 대 피라미드의 디자인 구성을 $l=1$로 하여 동적 조화로 설명한 것이다(박제남, 2013). 동적 조화를 이용한 전개도를 학생들에게 지도하고 이를 바탕으로 학생들은 쿠푸왕의 대 피라미드의 축소 모형 제작 하였다.



<그림 10> 쿠푸왕의 대 피라미드의 디자인 구성과 모형 만들기

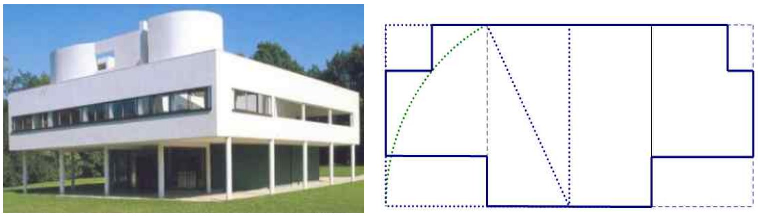
또한 S. Taseos와 W. Petrie가 제시한 쿠푸왕의 대 피라미드의 크기를 Markowsky의 $\pm 2\%$의 허용오차를 “(피라미드 옆면의 넓이)와 $(\text{높이})^2$” 에 직접 적용하면 이들의 비는 1.0020정도로 $\pm 2\%$ 이내에 있으므로 가설 (옆면의 넓이) $=$ $(\text{높이})^2$을 설정하자. 따라서 쿠푸왕의 대 피라미드의 크기 는Herodotus의 기술로부터 야기된 오해가 있었지만 ‘Markowsky의 $\pm 2\%$의 허용오차’를 기반으로 다음을 설정하여 지도하자(박제남, 2013).

[가설1] 피라미드의 밑면은 정사각형으로 건축한다.

[가설2] 피라미드 옆면의 넓이는 높이의 제곱과 같도록 건축한다.

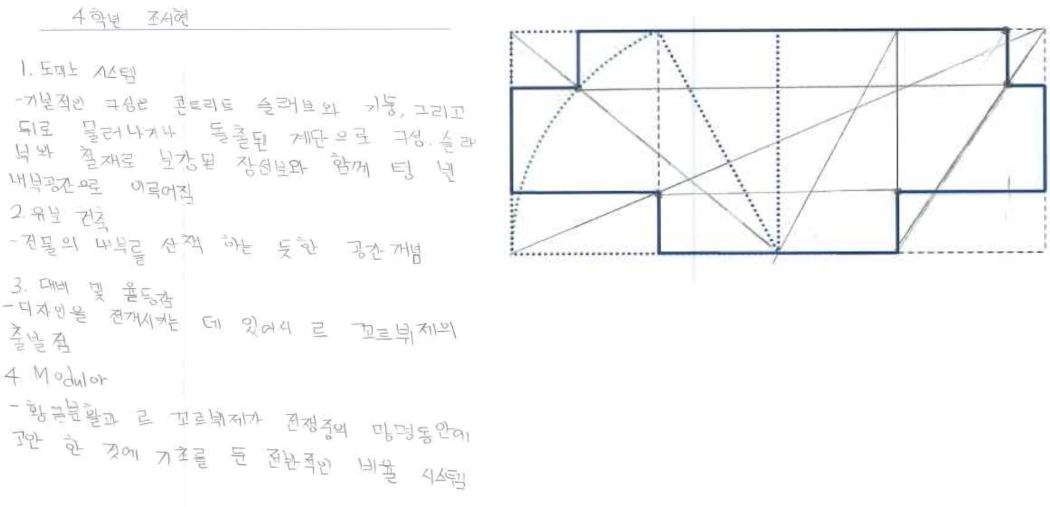
위 [가설1, 2]로부터 l/d 에 관한 방정식을 지도해 보자. 식 $dl=h^2$을 $l^2=d^2+h^2$에 대입하면 $(l/d)^2=1+l/d$ 이므로 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 을 얻는다.

지금까지 우리는 고대 건축물이나 고대 그리스 도자기의 디자인 구성에서 황금사각형을 사용하였다. 초 중·고학생지도에서 현대 산업디자인, 항공공학, 그리고 건축 디자인에서 황금비의 활용을 찾아 이를 지도하는 것이 바람직하다고 필자는 주장한다. 특히, 황금비의 예로서 스크린디자인 등을 지도할 수 있다(Ngo & Ch’ng, 2005). 류지영(2005)은 조선시대 한국 전통 조각보를 모두 21가지로 분류하고 있는데 일부는 동적 조화로 학교수학에서 지도할 수 있고 색칠을 통한 분수지도에도 활용할 수 있다. Le Corbusier의 의자 디자인이나 폭스바겐의 Beetle(Elam, 2011)은 황금사각형 지도의 좋은 예라고 보는데 매우 훌륭한 저서인 Elam(2011)의 《Geometry of design》을 참고해 보자. 한편, 다음은 Le Corbuster의 작품이다(Gast, 2000). 각 모서리를 동적 조화 입장에서 결정할 수 있다.



<그림 11> Le Corbuster의 작품과 정면도

본 문제는 정사각형에서 황금사각형을 양 쪽으로 만들고 각 모서를 3개의 대각선을 이용하여 결정하는 것이다. 초등학교 예비 4학년 대상 수업에서 사전과제로 Le Corbuster의 작품을 조사하고 수업에서 서현이는 정사각형을 가지고 양쪽으로 황금사각형을 작도한 후 네 모서리의 모양을 결정하기 위하여 직선과 대각선을 적합하게 사용하고 있다.



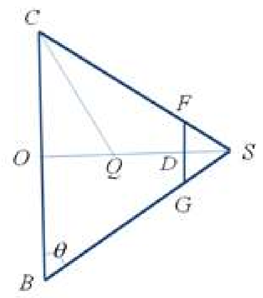
<그림 12> 서현의 예비과제와 디자인 구성

황금비를 해석적으로도 지도할 수 있는 예를 들어보자. 사령선(command module)은 동적 조화의 디지인 구성을 따른다. 1687년 뉴턴은 그의 저서 《Philosophioe Naturalis Principia Mathematica》에서 사령선이 대기권으로 진입했을 때, 저항을 최소화하기 위한 원뿔대를 다음과 같이 언급하고 있다(Cruz-Sampedro & Tetlalmazi-Montiel, 2010).

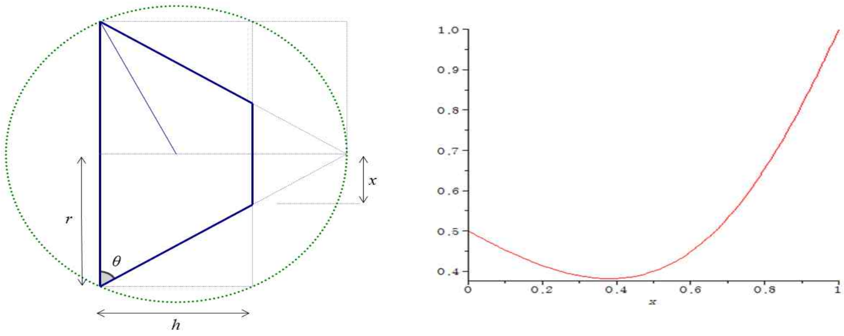
> 원뿔대의 큰 원의 지름(중심 : O)을 BC 로 하고 작은 원(중심 D)의 지름을 FG, 그리고 원뿔대를 연장했을 때, 꼭짓점을 S 라 하자. 원뿔대가 $\overrightarrow{OS}$ 방향으로 진행할 때, OD 의 중점 Q 와 C 를 연결한 길이가 QS 와 같으면 저항이 최소가 된다.

밑면의 반지름과 높이가 같은 사령선(황금 원뿔대, golden frustum)을 설계해보자. 즉 $\overline{OC} = \overline{OD} = r$ 을 가정하자. 이때 $\theta = \angle SBO$ 라면 $\tan\theta = OS/r = (1+\sqrt{5})/2$ 이다.

본 기하학적 접근을 해석적으로 지도할 수 있다. 고등학교 '물리 II'에서 다루는 '운동과 에너지'를 바탕으로 분수함수 $S(x) = 1 - \dfrac{1-x^2}{(1-x)^2+1}$ 을 얻을 수 있으며(<그림 14> 참고) 이로부터 미분을 이용한 최솟값 문제로 학생을 지도할 수 있다.

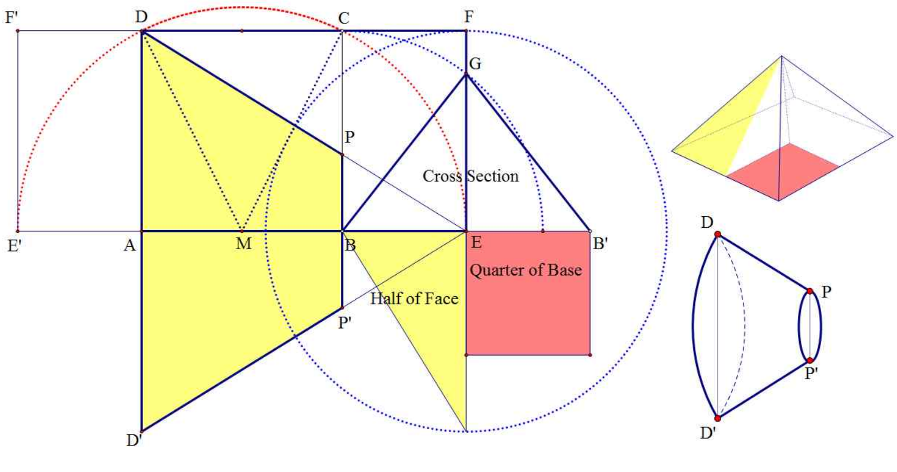


<그림 13> 사령선의 동적 조화



<그림 14> $r = h$인 황금원뿔대의 저항을 나타내는 그래프

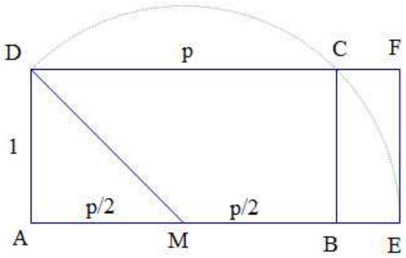
유클리드의 황금사각형, 뉴턴의 황금원뿔대, 그리고 쿠푸왕의 대 피라미드를 동적 조화에서 디자인 구성을 다음과 같이 제시할 수 있다(박제남, 2013).



<그림 15> 유클리드의 황금사각형, 뉴턴 황금원뿔대, 쿠푸왕의 대 피라미드의 디자인 구성

3. 황금비와 피리미드의 일반화 지도

Fowler(1982)는 황금비를 일반화 했는데 선분 AB 의 길이가 p 이고 $\mathrm{AD}=1$ 인 직사각형에서 $\mathrm{AE}=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$, $\mathrm{BE}=\dfrac{-p+\sqrt{p^2+4}}{2}$ 를 얻는다. 우리는 방정식 $x^2-x-1=0$ 의 양의 근을 ϕ로 사용하였다. 양의 실수 p 에 대하여 이차방정식 $x^2-px-1=0$ 의 양의 근을 ϕ_p 로 나타내자. 따라서 $\phi_1=\phi$ 이고 <그림 16>에서 $\mathrm{AE}=\phi_{\mathrm{p}}$, $\mathrm{BE}=1/\phi_{\mathrm{p}}$ 이다.



<그림 16> 황금사각형의 일반화

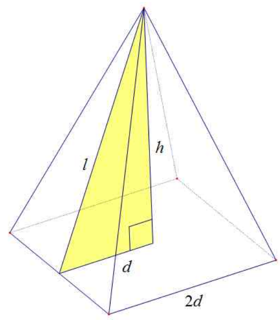
쿠푸왕의 대 피라미드를 일반화하여 보자(박제남, 2013). 피라미드가

$$(\text{높이})^2 = p \bullet (\text{피라미드 옆면의 넓이})$$

에 따라 건축되었을 때, <그림 17>에서 $\dfrac{l}{d}$ 의 값을 구하자.

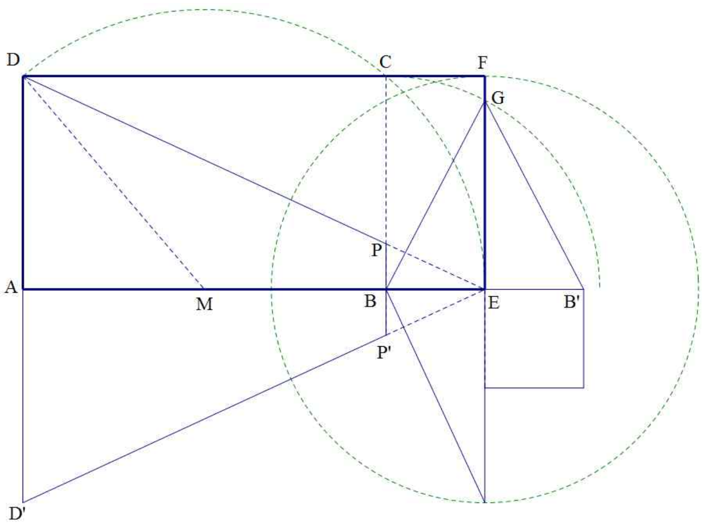
$(\text{높이})^2 = p \bullet (\text{피라미드 옆면의 넓이})$; $h^2 = p\,d\,l$.

한편, $l^2 = h^2 + d^2$ 이므로 $\left(\dfrac{l}{d}\right)^2 - p\left(\dfrac{l}{d}\right) - 1 = 0$. 따라서 $\dfrac{l}{d} = \phi_p$ 이다.



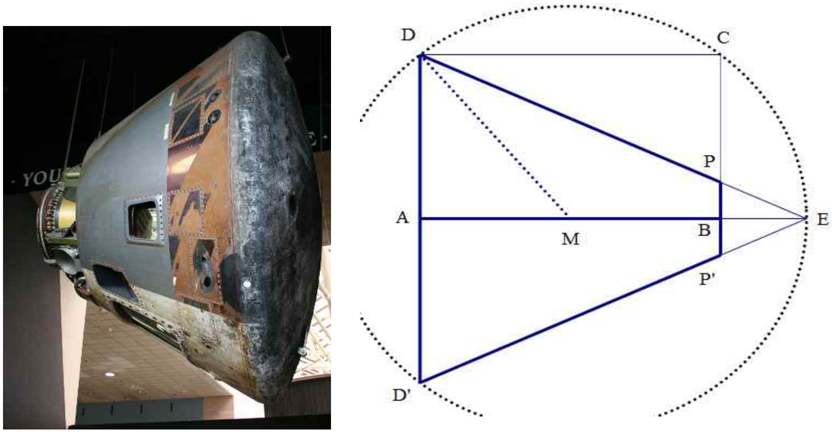
<그림 17> 일반화된 피라미드

이제 <그림 15>에서처럼 황금사각형, 뉴턴의 원뿔대, 그리고 피라미드를 모두 일반화 하여 함께 디자인 구성을 하면 다음과 같다(Park, 2014).



<그림 18> 황금사각형, 뉴턴의 원뿔대, 피라미드의 일반화

예를 들어, Skylab4 command module은 $\mathrm{DD}' = 391.16\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{AB} = 322.58\ \mathrm{cm}$, 그리고 질량은 $5443.2\,\mathrm{kg}$이다(참고: Skylab4 Command Module). 따라서 $\mathrm{AD} = 1$일 때, $\mathrm{AB} = 322.58/195.58 \fallingdotseq 1.65$이며 $\mathrm{AE} = \tan(\angle\mathrm{EDA})$는 $x^2 - 1.65\,x - 1 = 0$의 양의 근 $\phi_{1.65}$이다. 다음 그림을 참고하자.



<그림 19> Skylab4 Command Module의 디자인 구성

끝으로 n차원 피라미드(n-dimensional square pyramid)를 귀납적으로 지도해보자.

피라미드에서 밑면(base), 옆면(side) 그리고 윗꼭지점(top)을 용어로 사용하자. 특히 <그림 17>에서 면의 수를 구할 때, 눈의 위치를 top에 두자.

(1) 일차원 피라미드: 피라미드는 수직 선분으로 base는 점이고 side은 1개의 점으로 이루어진다.

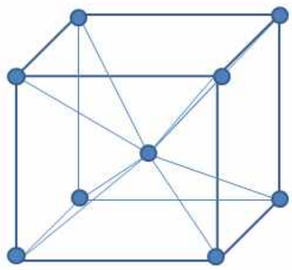
(2) 이차원 피라미드: 피라미드는 삼각형으로 base는 선분, side는 2개의 선분으로 만들어 진다.

(3) 삼차원 피리미드: 피리미드는 공간에서 말하는 피라미드이고, base는 정사각형, side는 4개의 삼각형으로 이루어진다.

따라서 사차원 피라미드는 다음과 같이 귀납적으로 정의 된다.

① base는 정육면체 이고 ② side는 6개의 삼차원 피리미드이다.

즉, n차원 피라미드의 base는 $(n-1)$차원 큐빅이고 side는 $(n-1)$차원 피라미드이다(참고: Wikipedia, 2014).



<그림 20> 사차원 피라미드

학교수학에서 황금비를 다룰 때, 파르테논 신전, 앵무조개, 그리고 레오나르도 다빈치의 그림, 인체의 비 등을 다루지 말고 현대 디자인 등에서 활용되는 예를 다루는 것이 바람직하다고 본다. 디자인의 저자가 황금비를 사용하고 있기 때문에 그 존재를 의심할 필요가 없다는 것이다. 또한, 이와 같은 주제의 전문성은 주미경 문종은·송륜진(2012)이 제기한 "교사의 융복합적 지식창출 역량의 개발"을 위한 교사교육의 목표로 다루어질 수 있다.

V. 요약 및 향후 연구 방향

우리는 황금비의 역사와 그 판단 기준을 알아보았고, 초·중등교과서에서 사용하고 있는 파르테논 신전과 쿠푸왕의 대 피라미드에 대하여 고찰하였다.

Markowsky(1992)는 황금비의 무분별한 사용에 문제를 제기하고 수치적으로 허용구간과 내용적으로 상황의 가능성을 판정기준으로 제시하였다. 이에 따라 그는 파르테논 신전과 쿠푸왕의 대 피라미드에 황금비가 존재한다는 것은 오해임을 주장하였다. 그러나 필자는 Beard(1968)의 결과를 상황의 가능성으로 하여 쿠푸왕의 대 피라미드에는 황금비가 존재한다고 주장하였다.

한편, 우리나라 수학교육에서 기축시대에 입각한 일부 수학교육의 문제점과 그 대안을 제시하였다. 우리는 황금비의 최초의 인식을 다룰 때, 고대 이집트인의 쿠푸왕의 대 피라미드와 고대 그리스 피타고라스 학파의 Hippasus의 정황을 모두 언급하는 것이 바람직하다고 본다.

학교수학에서 황금비 지도가 문제가 되는 이유는 기록이 없는 것을 대상으로 하기 때문이다. 따라서 동적 조화의 범주에서 황금비를 다루는 것이 바람직하다. 초·중·고학생지도에서 현대 산업디자인, 항공공학, 건축 디자인, 스크린 디자인, 또는 조선시대 한국 전통 조각보 등을 이용하여 지도할 수 있다. 실제 초등학생을 대상으로 한 지도에서 동적 조화에 대한 교수·학습방안을 제시하여 향후 융복합교육의 가능성을 탐색하였다.

우리는 황금비의 최초 인식문제를 통하여 수학에 있어 아시아·아프리카적 가치의 문제를 제기 하였다. 이와 같은 문제는 황금비에 국한되지 않는다. 우리가 방정식을 지도할 때, 읽기자료에서 까르다노를 소개하고 미적분을 지도할 때, 뉴턴과 라이프니츠가 미적분을 발견하였다고 소개하면서 결과적으로, 우리가 의도하지 않더라도, 그 위대성을 유럽 문화에 돌리고 있다. 그러나 삼차방정식은 이란 수학자 Omer Khayyam(1048-1131)이 처음 체계적으로 연구하여 이를 19가지로 분류하고 기하적 해법을 내 놓았고(Mardia, 2000), 1000년에 이집트에서 우리가 가르치고 있는 방법인 구분구적법이 ibn al-Haytham(965-1039)에 의하여 발견되고 발전되었다(Katz, 1995). V. Katz(1995)는 "미적분의 발견(invent)을 뉴턴이나 라이프니츠에 돌리는데, 이는 잘못된 역사로서 재고 되어야 한다"고 말한다. 이와 같은 상황에서 우리는 방정식이나 미적분을 통하여 이슬람 문화에 대한 가치를 학교수학에 반영할 필요가 있다. 향후 이에 대한 연구가 필요하다고 본다. 수학문화를 학교수학에서 구현하는데 필요한 연구라 판단된다.

참 고 문 헌

고호경·김응환 양순열·권세화 권순학·정낙영 장인선·임유원 최수영 이성재·노솔·백형윤 홍창섭 (2013). 중학교 수학③. 서울: 교학사.

교육과학기술부 (2011a). 수학 5-2. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 2011b). 수학 6-1 익힘책. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011c), 사회 3-2. 서울: 두산동아.

교육부 (2013). 3~4학년군 수학 ④(실험용). 서울: 천재교육.

김서령·이정례 선우하식 이진호·김원·김양수 신지영·김윤희 노창균 정혜윤·주우진 (2013). 중학교 수학③. 서울: 천재교육.

김용운·김용국 (2012). 한국 수학사. 경기도: 살림출판사.

김호연 (2012). 그리스 로마의 문화유산. 울산: 울산대학교 출판부.

류지영 (2005). 한국 전통 조각보의 정각계열체 결합구조: P-언어 분석과 심층구조를 중심으로. 홍익대 대학원 석사논문.

류희찬·류성림·이경화·신보미·강순모·윤옥교·김명수·조성오·천대선·김철호 (2013a). 중학교 수학②. 서울: 천재교과서.

류희찬·류성림 이경화·신보미 강순모·윤옥교 김명수·조성오 천대선 김철호 (2013b). 중학교 수학③. 서울: 천재교과서.

박종률 (2013). 예술(음/미)과 수학 통합 교수 학습자료 개발. 한국과학창의재단.

박제남 (2013). 현대대수학. 서울: 경문사.

이종우 (1998). 기하학의 역사적 배경과 발달. 서울: 경문사.

장연자·오미숙·김혜경·한형규 (2010). 고등학교 미술과 삶. 서울: 천재교육.

주미경·문종은 송륜진 (2012). 수학교육과 융복합교육: 담론과 과제. 대한수학교육학회지, 학교수학, **14**(1), 165-190.

Armstrong, K. (2010). 축의 시대 (정영목 옮김). 서울: 교양인.

Beard, C. S. (1968). The Fibonacci drawing board-design of the great pyramid of Gizah. *The Fibonacci Quarterly*, **6**, 66-68.

Bonnard, A. (2011). 그리스인 이야기2 (양영란 옮김). 서울: 책과함께.

Bernal, M. (2011). 블랙 아테나, 제1권 (오흥식 옮김). 서울: 소나무.

Bernal, M. (2012). 블랙 아테나, 제2권 (오흥식 옮김). 서울: 소나무.

Burton, D. (2007). *The history of mathematics*, 6th ed. New York: McGraw-Hill.

Cajori, F. (1991). *A history of mathematics*, 5th ed. Rhode Island: AMS.

Carpentier, J. & Lebrun, F. (2009). *지중해의 역사* (강민정 나선희 옮김). 경기도: 한길.

Chace, A. (1979). *The Rhind mathematical papyrus*. Virginia: NCTM.

Cruz-Sampedro, J. & Tetlalmazi-Montiel, M. (2010). POEM's and Newton's aerodynamic frustum. *College Math. J.*, **41**(2), 145-153.

Curchin, I & Fischler, R. (1981). Hero of Alexandria's numerical treatment of division in extreme and mean ratio and its implications. *Pheonix*, **35**(2), 129-133.

Elam, K. (2011). *Geometry of design*, 2nd ed. New York: Princeton Architectural Press.

Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics before 1650*. Washington: MAA.

Falbo, C. (2005). The golden ratio-a contrary viewpoint. *College Math. J.*, **36**(2), 123-134.

Fowler, D. H. (1982). A generalization of the golden section. *The Fibonacci Quarterly*, **20**, 146-158.

Fritz, K. (1945). The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Math*. **46**(2), 242-264.

Gast, K. (2000). *Le Corbusier, Paris-Chandigarh*. Boston: Birkhäuser.

Hambidge, J. (1920a). *The elements of dynamic symmetry*. New Haven: Yale Univ. Press.

Hambidge, J. (1920b). *The Greek vase*. New Haven: Yale Univ. Press.

Hambidge, J. (1920c). (editor). *The diagonal*, Vol. 1(6): An important Skyphos in the British Museum. New Haven: Yale Univ. Press.

Hambidge, J. (1924). *The Parthenon and the other Greek temples*. New Haven: Yale Univ. Press,

Hamilton, E. (2009). 고대 그리스인의 생각과 힘 (이지은 옮김). 서울: 까치.

Herodotos (2012). 역사 (천병희 옮김). 경기도: 숲.

Herodotus (2008). *The histories, A new translation by Robin Waterfield*. Oxford: Oxford Univ. Press.

Heath, T. (1981). *A history of Greek mathematics*, Vol. 1. New York: Dover.

Huntington, S. (2001). 문명의 충돌 (이희재 옮김). 서울: 김영사.

Huntley, H. (1970). *The divine proportion*. New York: Dover.

Jakson, K. & Stamp, J. (2006). 피라미드, 상상 그 너머의 세계 (정주현 옮김). 서울: 샘터.

Katz, V. (1995). Ideas of calculus in Islam and India. *Math. Mag*. 68, 163-174.

Livio, M. (2002). *The golden ratio*. New York: Broadway Books.

Mardia, K. (2000). *Omar Khayyam, René Descartes and solutions to algebraic equations*. International Congress in Commemorating Hakim Omar Khayyam Neyshabouri (900th Death Anniversary)(pp. 1-13), Neyshabour, Iran, 17 - 19 May.

Markowsky, G. (1992). *Misconceptions about the golden ratio*, College Math. J. 23, 1-19.

Martin, T. (1996). 고대 그리스의 역사 (이종인 옮김). 서울: 가람기획,

Mendelssohn, K. (1974). *The riddle of the pyramids*. London: Thames and Hudson.

Merzbach, U. & Boyer, C. (2011). *A history of mathematics*, 3rd ed. New Jersey: Wiley.

Misiurewicz, M. (2013). Irrational square roots. *College Math. J.*, 44(1), 53-55.

Moh, T. (1992). *Algebra*. New Jersey: World Scientific.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*, 2nd ed. New York: Dover.

Ngo, D. & Ch'ng, E. (2005). Screen design with dynamic symmetry: A discovery. *Computers on Human Behavior*, 21, 307-322.

Park, J. (2014). *A generalization of the great pyramid of Gizeh*, preprint.

Platon. (2013). *Theaitetos* (정준영 옮김). 서울: 이제이북스.

Robins, G. & Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus*. New York: Dover Publications.

Rossiter, S. (1981). *Greece*. 4th ed. New York: Ernest Benn Limited.

Rowe, A. (1961). Studies in the archaeology of the near east II: Some facts concerning the great pyramids of El_Giza and their royal constructors. *Bulletin of the John Rylands Library*, 44(1), 100-118.

Skylab4 command module at the Smithsonian National Air and Space Museum from Wikipedia, the free encyclopedia; available at http://en.wikipedia.org/wiki/File:Skylab4CommandModule.JPG. Last time accessed 10 May 2014.

Suzuki, J. (2002). *A history of mathematics*. New Jersey: Prentice Hall.

Trachtenber, M. & Hyman, I. (2002). *Architecture: From prehistory to post-modernism*, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall.

Veljan, D. (2000). The 2500-year-old Pythagorean theorem. *Math. Mag.*, 73(4), 259-272.

Wikipedia. the free encyclopedia; available at http://en.wikipedia.org/wiki/Pyramid_(geometry). Last time accessed 16 March 2014.

The golden ratio and mathematics education issues

Park, Jeanam
Department of mathematics education, Inha University, Incheon Korea
E-mail: jnpark@inha.ac.kr

The purpose of this paper is to offer a history of golden ratio, the criterion raised by Markowsky, and misconceptions about golden ratio. Markowsky(1992) insists that the golden ratio does not appear in the great pyramid of Khufu. On the contrary, we claim that there exists the golden ration on it. Elementary and middle school text books, and domestic history books deal with the great pyramid of Khuff and the Parthenon by examples of the golden ratio. Text books make many incorrect statements about golden ratio; so in teaching and learning the golden ratio, we recommend the design-composition of dynamic symmetry, for example, industrial design, aerodynamic, architecture design, and screen design. Finally we discuss the axial age how to affect the school mathematics with respect to the subject of Thales and the golden ratio.

* ZDM Classification : A32, A33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 01A05, 01A16, 01A20, 01A72
* Key Words : golden ratio, dynamic symmetry, axial age, convergence education