

직렬체인 다리를 갖는 평면 병렬형 기구의 강성해석

김한성^{a*}

Stiffness Analysis of Planar Parallel Manipulators with Serially Connected Legs

Han Sung Kim^{a*}^a School of Mechanical Engineering, Kyungnam University, Republic of Korea

ARTICLE INFO

Article history:

Received	14	January	2014
Revised	13	February	2014
Accepted	9	March	2014

Keywords:

Planar parallel manipulator
Singular stiffness matrix
Compliance matrix
Serial chain
Screw theory
Reciprocal screws

ABSTRACT

This paper presents a method for analyzing the stiffness of full and low DOF (degree of freedom) planar parallel manipulators with serially connected legs. The individual stiffness of each leg is obtained by applying reciprocal screws to the leg twist using passive joints and elastic elements consisting of actuators and links. Because the legs are connected in parallel, the manipulator stiffness is determined by summing the individual leg stiffness values. This method does not require the assumption that springs should be located along reciprocal screws and is applicable to a planar parallel manipulator with a generic or singular configuration. The stiffness values of three planar parallel manipulators with different DOFs are analyzed. The numerical results are confirmed using ADAMS S/W.

1. 서론

병렬형 기구는 이동 플랫폼이 다수의 다리로 고정부에 연결되는 구조를 갖는다. 구동부가 고정부 근처 또는 고정부에 위치하므로 이동부의 관성이 작고 이동플랫폼의 작업하중이 각 다리에 분산되며 각 다리의 오차가 이동플랫폼에 분산되는 특징을 갖는다. 일반적으로 병렬형 기구는 직렬형 기구에 비하여 고속, 고하중, 고정밀도 및 고강성을 갖는다.

병렬형 기구에 대한 연구 및 개발은 주로 Gough-Stewart 플랫폼^[1,2]과 같은 6자유도 또는 Delta 병렬형 기구^[3,4]와 같은 3~4자유도 공간 병렬형 기구에 대해 집중되어 진행되고 있다. 그러나 전자, 포장, 식품, 제약 산업 등에서 많이 요구되는 위치배치, 조립 및 경가공 작업들은 주로 평면 작업 형태를 갖는다. 평면에 작업 외에

자유도가 필요한 경우에는 평면 병렬형 기구에 1~2자유도 기구를 직렬로 연결한 혼합형 구조(hybrid structure)를 사용하는 것이 공간 병렬형 기구를 사용하는 것보다 경제적이다^[5-7].

이러한 평면 병렬형 기구는 주로 고속, 고하중, 고정밀도 응용에 이용되므로 강성해석은 초기 설계단계에서 필수적인 요소이다. 공간 6자유도 및 평면 3자유도 병렬형 기구의 강성해석 방법은 결과가 명확하고 많은 연구가 발표되었다^[8-10]. 반면, 저자유도 공간 및 평면 병렬형 기구의 강성해석은 그 중요성에 비하여 많은 연구가 진행되고 있지 않다. Zhang 등^[11]은 저자유도 병렬형 기구 다리에 가상 조인트를 추가하는 방법을 제시하였다. 그러나 이 방법은 가상 조인트를 추가하는 방법이 체계적이지 못한 단점을 갖는다. Kim 등^[12]과 Xu 등^[13]은 구동부와 구속부를 포함하는 전체 자코비안 행렬^[14]에 기초한 강성해석 방법을 제시하였다. 이 방법은 모델

* Corresponding author. Tel.: +82-55-249-2627

Fax: +82-505-999-2160

E-mail address: hkim@kyungnam.ac.kr (Han Sung Kim).

링된 스프링이 역나선(reciprocal screw) 방향으로 위치해야 한다는 가정을 필요로 한다. Kim^[15]은 이 방법을 평면 병렬형 기구에 적용하였다. Pashkevich 등^[16]은 병렬형 기구의 다리가 p개의 수동조인트를 가질 때, (6+p)×(6+p) 행렬을 구성하고 이의 역행렬을 구하여 다리의 강성행렬을 구하고 이를 합하여 기구의 강성행렬을 구하는 방법을 제시하였다. 만약 다리가 특이 위치에 있을 때는 특이값 분해(singular value decomposition)를 필요로 한다.

본 논문에서는 먼저 구동기 및 링크의 순응행렬을 구하고 이에 역나선을 적용하여 각 다리의 특이 강성행렬(singular stiffness matrix)을 구하고 다리들이 병렬연결이므로 이를 합하여 평면 병렬형 기구의 강성행렬을 구하는 방법을 제시한다. 제시하는 방법은 기존 구동기의 강성만을 고려하는 방법^[8-10]과 달리 링크 및 베어링의 강성도 고려할 수 있고, 역나선 방향으로 스프링이 위치해야 하는 가정이 필요 없고^[8-12,15] 다리가 특이 위치에 있을 경우에도 특이값 분해를 사용^[16]하지 않고 강성해석을 수행할 수 있다. 특히, 3장의 Type III 기구 예제에서 역나선에 의한 변형이 연성화되어 강성을 단순 스프링으로 모델링할 수 없는 경우에도 강성해석이 가능함을 제시하였다.

2. 강성 해석

본 논문에서는 직렬체인 다리로 구성된 n-DOF (degrees of freedom) 평면 병렬형 기구를 강성해석의 대상으로 한다. 여기서 평면기구이므로 $n \leq 3$ 으로 한정한다. 병렬기구의 다리가 하나 이상의 페루프를 포함하는 경우는 해석대상에서 제외한다. Fig. 1과 같이 이동 플랫폼(moving platform)은 m ($m \geq n$)개의 직렬체인으로만 구성된 다리에 의하여 지지되고, 각 다리는 최대 한 개의 구동기를 갖는다고 가정한다. 구동기를 갖는 다리의 번호를 먼저 $i=1, \dots, n$ 으로 설정하고, 구동기를 갖지 않는 다리의 번호를 $i=n+1, \dots, m$ 으로 정한다.

강성해석에서 이동 및 고정 플랫폼은 강체로 가정하고 각 다리를 구성하는 구동기 및 링크의 순응성을 고려하였다. 모든 구동기는

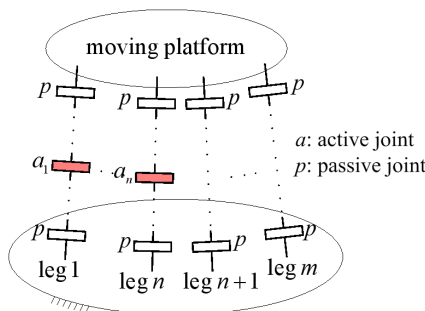


Fig. 1 Structure of an n-DOF planar parallel manipulator

해석시 고정된다고 가정하나 제이기 및 동력전달장치의 순응성으로 인하여 구동기에 변위가 발생한다고 모델링한다. 즉, 순응성의 주요원인을 각 다리에 작용하는 힘 또는 모멘트에 대한 구동기 및 링크의 미소변위로 가정하였다.

무부하 평형근처에서는 모든 구동기가 고정된 상태에서 렌치(wrench) \hat{w} 가 이동 플랫폼에 작용할 때, 미소변위(infinitesimal displacement) $\delta\hat{D}$ 의 관계는 다음의 강성사상으로 나타낼 수 있다^[17].

$$\hat{w} = K \delta\hat{D} \tag{1}$$

여기서 $f = [f_x, f_y]^T$ 와 n_z 을 xy 평면상의 힘벡터와 z축에 대한 모멘트라 할 때, $\hat{w} = [f^T, n_z]^T$ 는 방사 좌표(ray coordinates)로 표현된 렌치를 나타낸다. $\delta p = [\delta x, \delta y]^T$ 와 $\delta\theta_z$ 를 xy 평면상의 미소직선변위벡터와 z축에 대한 미소회전변위라 할 때, $\delta\hat{D} = [\delta p^T, \delta\theta_z]^T$ 는 축 좌표(axis coordinates)로 표현된 미소변위 트위스트(twist)이다. K 행렬은 이동 플랫폼의 강성행렬을 나타내고 평면의 경우 3×3 대칭행렬이다.

이동 플랫폼에 부착된 각 다리의 강성사상도 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{w}_i = K_i \delta\hat{D}_i \tag{2}$$

여기서, K_i 는 i번째 다리의 강성행렬을 나타낸다.

각 다리는 이동 플랫폼에 대하여 병렬연결이므로 모든 트위스트는 같아야 하고 이동 플랫폼의 렌치는 각 다리에 작용하는 렌치들의 합이다.

$$\delta\hat{D} = \delta\hat{D}_1 = \delta\hat{D}_2 = \dots = \delta\hat{D}_m \tag{3}$$

$$\hat{w} = \hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \dots + \hat{w}_m \tag{4}$$

병렬연결이므로 이동 플랫폼의 강성행렬은 다리의 강성행렬의 합과 같다.

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_m \tag{5}$$

2.1 다리의 강성행렬

i번째 다리에서 j번째 수동조인트(passive joint)에 의한 트위스트 $\delta\hat{D}_{j,ji}$ 와 k번째 탄성요소에 의한 트위스트 $\delta\hat{D}_{E,ki}$ 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \hat{\mathbf{D}}_{J,ji} = \hat{\mathbf{S}}_{ji} dq_{ji} \quad (6)$$

생성하지 못하고 다음과 같이 역나선 공간 R_i 에 있어야 한다.

$$\delta \hat{\mathbf{D}}_{E,ki} = C_{ki} \hat{\mathbf{w}}_{ki} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_i = R_i \boldsymbol{\tau}_i \quad (15)$$

여기서, $\hat{\mathbf{S}}_{ji}$ 는 축좌표로 표현된 j 번째 수동조인트의 조인트 나선(joint screw)이고 dq_{ji} 는 수동조인트 변위를 나타낸다. 한편, C_{ki} 는 k 번째 탄성요소의 순응행렬(compliance matrix)이고 $\hat{\mathbf{w}}_{ki}$ 는 탄성요소에 작용하는 렌치이다.

식 (10)의 양변에 R_i^T 를 곱하고 식 (14)와 식 (15)를 적용하면 다음과 같다.

$$R_i^T \delta \hat{\mathbf{D}}_i = R_i^T J_i dq_i + R_i^T C_i \hat{\mathbf{w}}_i = (R_i^T C_i R_i) \boldsymbol{\tau}_i \quad (16)$$

각 다리에서 수동조인트와 탄성요소들은 직렬연결이므로 다리 끝단의 변위는 모든 변위의 합과 같고 각 요소에 작용하는 렌치들은 모두 같다.

이를 $\boldsymbol{\tau}_i$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\delta \hat{\mathbf{D}}_i = \sum_j \hat{\mathbf{D}}_{J,ji} + \sum_k \hat{\mathbf{D}}_{E,ki} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = (R_i^T C_i R_i)^{-1} R_i^T \delta \hat{\mathbf{D}}_i \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_i = \hat{\mathbf{w}}_{ki} \quad (9)$$

식 (17)을 식 (15)에 대입하면 i 번째 다리의 강성사상을 구할 수 있다.

식 (6), (7)을 (8)에 대입하고 이 결과에 (9)를 적용하면 식 (8)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{w}}_i = \{ R_i (R_i^T C_i R_i)^{-1} R_i^T \} \boldsymbol{\tau}_i \quad (18)$$

i 번째 다리의 강성행렬은 다음과 같다.

$$\delta \hat{\mathbf{D}}_i = J_i dq_i + C_i \hat{\mathbf{w}}_i \quad (10)$$

$$K_i = R_i (R_i^T C_i R_i)^{-1} R_i^T \quad (19)$$

여기서 수동조인트의 조인트 나선행렬 J_i 와 다리의 순응행렬 C_i 는 다음과 같다.

여기서,

$$J_i = [\hat{\mathbf{S}}_{1i} \hat{\mathbf{S}}_{2i} \cdots], \quad dq_i = [dq_{1i}, dq_{2i}, \cdots] \quad (11)$$

$$c_i = R_i^T C_i R_i \in R^{r_i \times r_i} \quad (20)$$

$$C_i = \sum_k C_{ki} \quad (12)$$

만약 $rank(J_i) = p_i$ 이면, 수동조인트의 조인트 나선행렬 J_i 와 역의 관계에 있는 $r_i = 3 - p_i$ 개의 방사좌표로 표현된 역나선(reciprocal screws)은 다음과 같이 구할 수 있다.

다리의 순응행렬 C_i 를 구속공간 R_i 로 투영을 시키므로 c_i 를 구속공간 순응행렬(constraint space compliance matrix)이라 정의한다. C_i 는 양한정(positive definite) 행렬이므로 c_i^{-1} 은 항상 가능하다. 각 다리는 수동조인트 1개 이상을 가지므로 ($p_i \geq 1$), $rank(K_i) = rank(R_i) = r_i \leq 2$ 이고 K_i 는 특이행렬(singular matrix)이 된다.

K_i 는 역나선 R_i 의 기저(basis)로 생성(span)된 임의의 역나선공간($R_i' = R_i \alpha$)에 독립적이다. 이는 다음의 식으로 증명된다.

$$R_i = [\hat{\mathbf{s}}_{1i} \hat{\mathbf{s}}_{2i} \cdots] \quad (13)$$

$$R_i' (R_i'^T C_i R_i')^{-1} R_i'^T = R_i (R_i^T C_i R_i)^{-1} R_i^T \quad (21)$$

여기서 각 열벡터는 방사좌표로 표현된 단위나선(unit screw)이다. 조인트 나선과 역나선은 다음과 같은 역의 관계를 갖는다.

일반적으로 구속공간 순응행렬 c_i 는 대각행렬이 아니지만 다리의 순응행렬 C_i 에 대해 대각인 R_i' 기저를 선택함으로써 c_i 를 대각화할 수 있다(3.1절 (c) 참고). 이와 같이 대각화를 할 수 있는 R_i' 기저를 선택하면 역나선 방향으로 직선 또는 회전 스프링이 위치한

$$J_i^T R_i = 0 \quad (14)$$

각 다리에 적용되는 렌치는 수동조인트의 변위에 대하여 일을

다고 강성을 모델링할 수 있다(Fig. 6 참고). 반면 기존연구^[12,13,15]는 임의로 선택된 역나선 방향으로 스프링이 위치한다는 가정을 사용하였으나 이는 일반적으로 성립하지 않는다.

식 (5), (19), (20)을 이용하여 기구의 강성행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = RkR^T \tag{22}$$

여기서 병렬기구는 m 개의 다리를 가지므로

$$R = [R_1 R_2 \cdots R_m], k = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m), k_i = c_i^{-1} \text{이다.}$$

2.2 다리의 순응 모델링

회전 및 선형 구동조인트(active joint)의 순응행렬을 각각 다음과 같이 모델링한다.

$$C_{ki} = \text{diag}(0, 0, c_R), C_{ki} = \text{diag}(c_P, 0, 0) \tag{23}$$

여기서 회전 구동조인트의 축은 지역좌표계의 z 축으로 선형 구동조인트의 축은 지역좌표계의 x 축으로 일치시켰다. $k_R = c_R^{-1}$ 및 $k_P = c_P^{-1}$ 는 각각 회전 및 선형 구동조인트 강성을 나타낸다.

본 논문에서는 베어링을 강체로 고려하였다. 그러나 실험적 또는 유한요소 방법으로 구한 베어링의 순응성을 식 (23) 및 수동조인트의 순응행렬에 추가하여 보다 정밀한 강성해석을 수행할 수 있다.

링크는 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)로 가정하였다. 링크의 순응행렬을 Fig. 2와 같이 ki 지역좌표계에서 표현하면 다음과 같다.

$$C_{ki} = \begin{bmatrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \tag{24}$$

여기서 A, L, E 및 I 는 각각 링크의 단면적, 길이, 탄성계수 및 관성모멘트를 나타낸다.

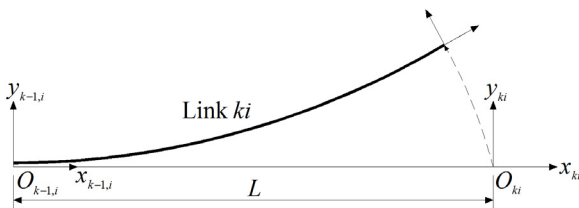


Fig. 2 Elastic model of link ki

식 (12)와 같이 각 요소의 순응행렬을 합하기 위해서는 순응행렬들을 동일한 좌표계로 변환하여야 한다. L 좌표계가 G 좌표계에서 $[p_x, p_y]^T$ 이동되고 ϕ 만큼 회전되었다고 할 때, 축좌표와 방사좌표로 표현된 나선을 L 좌표계에서 G 좌표계로 변환하는 나선좌표 변환행렬(transformation matrix of screw coordinates)은 각각 다음과 같다^[17].

$${}^G[E]_L = \begin{bmatrix} c\phi - s\phi & p_y & \\ s\phi & c\phi & -p_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$${}^G[e]_L = {}^G[E]_L^{-T} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ p_x s\phi - p_y c\phi & p_x c\phi + p_y s\phi & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

다음과 같이 나선좌표변환행렬을 적용할 수 있다.

$${}^G\delta\hat{D} = {}^G[E]_L {}^L\delta\hat{D}, {}^G\hat{w} = {}^G[e]_L {}^L\hat{w} \tag{27}$$

$${}^GJ = {}^G[E]_L {}^LJ, {}^GR = {}^G[e]_L {}^LR \tag{28}$$

$${}^GC = {}^G[E]_L {}^LC {}^L[E]_L^T, {}^GK = {}^G[e]_L {}^LK {}^L[e]_L^T \tag{29}$$

식 (29)의 첫 번째 식을 이용하여 각 탄성요소의 순응행렬을 동일한 좌표계로 변환 후 합하여 다리 순응행렬 C_i 를 구한다.

한편 구속공간 순응행렬 c_i 는 다음과 같이 좌표변환에 독립적이다. 이는 다음과 같이 증명될 수 있다.

$$\begin{aligned} & {}^G R_i {}^T G C_i {}^G R_i \\ &= ({}^G[E]_L^{-T} {}^L R_i)^T ({}^G[E]_L {}^L C {}^G[E]_L^T) ({}^G[E]_L^{-T} {}^L R_i) \\ &= {}^L R_i {}^T L C_i {}^L R_i \end{aligned} \tag{30}$$

일반적으로 구속공간 순응행렬을 각 다리의 지역좌표계에 대하여 구하는 것이 용이하다.

3. 강성해석 예제

본 예제에서는 2장에서 제시하는 방법의 유효성을 검증하기 위하여 Fig. 3과 같이 3 자유도 3-RPR 평면 병렬형 기구와 이로부터

Name (DOF)	Serial chain structure
Type I (3-DOF)	3-RPR
Type II (2-DOF)	2-RPR+1-RP
Type III (1-DOF)	1-RP+1-RR

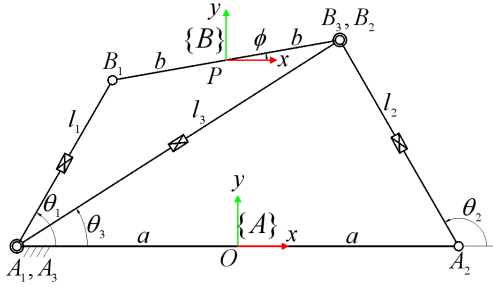


Fig. 3 Geometry of a 3-RPR parallel manipulator

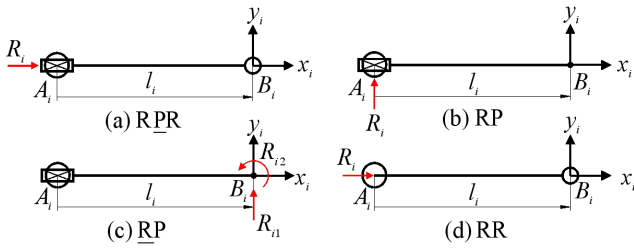


Fig. 4 Serial chain structures

유도된 2가지 유형의 평면 병렬형 기구들에 대해 강성해석을 수행하고자 한다.

여기서 R과 P는 각각 회전 및 직선 조인트를 나타내고 밑줄 친 기호는 구동조인트를 밑줄이 없는 기호는 수동조인트를 나타낸다. Fig. 3과 같이, 고정좌표계 $\{A\}$ 는 $\overline{A_1A_2}$ 중점 O 에 위치하고 이동 좌표계 $\{B\}$ 는 $\overline{B_1B_2}$ 중점 P 에 위치하고 축 방향은 $\{A\}$ 축과 평행하다. ϕ 는 x 축에서 $\overline{PB_2}$ 까지의 각도를 나타내고 θ_i 는 고정좌표계의 x 축에서 각 다리까지의 각도를 나타낸다.

3.1 직렬체인의 구속공간 순응행렬 해석

Fig. 4는 Type I, II, III 기구를 구성하는 4가지 직렬체인의 구조를 나타낸다. 해석의 편의를 위하여 각 다리의 직선조인트 P를 A_i 점에 위치시켰다. 수식표현의 용이함을 위하여 다리의 순응행렬을 지역좌표계 $\{B_i\}$ 에서 유도한다. $\{B_i\}$ 는 각 다리의 끝단 B_i 에 위치하고 x_i 축은 링크길이 방향을 향한다.

(a) Type I

Type I의 다리1, 2, 3은 모두 RPR 직렬체인(Fig. 4(a) 참조)이고 $\{B_i\}$ 에서 구한 역나선은 다음과 같다.

$${}^{B_i}R_i = [1, 0, 0]^T \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (31)$$

구동 직선조인트의 순응행렬은 다음과 같다.

$${}^{B_i}C_{P_i} = {}^{B_i}[E]_{A_i} {}^{A_i}C_{P_i} {}^{B_i}[E]_{A_i}^T = \begin{bmatrix} c_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서, ${}^{A_i}C_{P_i} = \begin{bmatrix} c_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ${}^{B_i}[E]_{A_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

링크의 순응행렬은 다음과 같다.

$${}^{B_i}C_{L_i} = \begin{bmatrix} \frac{l_i}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_i^3}{3EI} & \frac{l_i^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l_i^2}{2EI} & \frac{l_i}{EI} \end{bmatrix} \quad (33)$$

i 번째 RPR 직렬체인의 모든 순응행렬의 합에 역나선을 적용하면 i 번째 다리의 구속공간 순응행렬 c_i 는 다음과 같다.

$$c_i = {}^{B_i}R_i^T ({}^{B_i}C_{P_i} + {}^{B_i}C_{L_i}) {}^{B_i}R_i = c_P + \frac{l_i}{AE} \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (34)$$

(b) Type II

이 기구의 다리1과 2는 RPR 직렬체인이므로 역나선과 구속공간 순응행렬은 식 (31), (34)로 구할 수 있다. 이 기구의 다리3은 RP 직렬체인(Fig. 4(b) 참조)이고 순응성은 링크에만 존재하므로 링크의 순응행렬에 다음과 같은 역나선을 적용하여 c_3 를 구할 수 있다.

$${}^{B_3}R_3 = [0, 1, -l_3]^T \quad (35)$$

$$c_3 = {}^{B_3}R_3^T {}^{B_3}C_{L_3} {}^{B_3}R_3 = \frac{l_3^3}{3EI} \quad (36)$$

(c) Type III

이 기구의 다리1은 RP 직렬체인(Fig. 4(c) 참조)이므로 다리1의 지역좌표계에서 나타낸 2개의 역나선은 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^{B_1}R_1 = [{}^{B_1}R_{11} \quad {}^{B_2}R_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

구동 회전조인트의 순응행렬은 다음과 같다.

$${}^{B1}C_{R1} = {}^{B1}[E]_{A1} {}^{A1}C_{R1} {}^{B1}[E]_{A1}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_R l_1^2 & c_R l_1 \\ 0 & c_R l_1 & c_R \end{bmatrix} \quad (38)$$

여기서, ${}^{A1}C_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_R \end{bmatrix}$, ${}^{B1}[E]_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

다리1의 구속공간 순응행렬 c_1 는 다음과 같다.

$$c_1 = {}^{B1}R_1^T {}^{B1}C_1 {}^{B1}R_1 = \begin{bmatrix} c_R l_1^2 + \frac{l_1^3}{3EI} & c_R l_1 + \frac{l_1^2}{2EI} \\ c_R l_1 + \frac{l_1^2}{2EI} & c_R + \frac{l_1}{EI} \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서, ${}^{B1}C_1 = {}^{B1}C_{R1} + {}^{B1}C_{L1}$ 이다. 식 (39)는 2개의 역나선에 의한 변형이 서로 연성화되어 역나선 방향의 단순스프링으로 강성을 표현할 수 없다.

식 (39)를 대각화(diagonalization)하기 위하여 식 (37)의 선형 조합을 통하여 다른 조합의 역나선을 구할 수 있다.

$${}^{B1}R_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -d & d \end{bmatrix} \quad (40)$$

여기서 $d \geq 0$ 로 설정한다. 새로운 조합의 역나선으로 계산된 구속공간 순응행렬 c_1' 는 다음과 같다.

$$c_1' = {}^{B1}R_1'^T {}^{B1}C_1 {}^{B1}R_1' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (41)$$

여기서,

$$c_{11} = c_R(l_1 - d)^2 + \frac{l_1(l_1^2 - 3dl_1 + 3d^2)}{3EI},$$

$$c_{22} = c_R(l_1 + d)^2 + \frac{l_1(l_1^2 + 3dl_1 + 3d^2)}{3EI},$$

$$c_{12} = c_{21} = c_R(l_1^2 - d^2) + \frac{l_1^3 - 3d^2l_1}{3EI}.$$

비대각원소를 $c_{12} = 0$ 로 만들기 위한 d 는 다음과 같다.

$$d = \alpha l_1, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3c_R EI + l_1}{3c_R EI + 3l_1}} \quad (42)$$

다리2는 RR 직렬체인이므로 링크의 순응행렬만 고려하면 된다. 식 (33)에 $i = 2$ 를 대입하여 링크의 순응행렬을 구할 수 있다. 지역 좌표계에서 표현한 역나선과 구속공간 순응행렬은 다음과 같다.

$${}^{B2}R_2 = [1, 0, 0]^T \quad (43)$$

$$c_2 = {}^{B2}R_2^T {}^{B2}C_{L2} {}^{B2}R_2 = \frac{l_2}{AE} \quad (44)$$

3.2 기구의 강성행렬

Type I, II, III 기구들의 역나선 행렬을 고정좌표계 {A} 표현하면 각각 식 (45), (46), (47)과 같다.

$${}^A R = [{}^A R_1 {}^A R_2 {}^A R_3] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ -as_1 & as_2 & -as_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$${}^A R = [{}^A R_1 {}^A R_2 {}^A R_3] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & -s_3 \\ s_1 & s_2 & c_3 \\ -as_1 & as_2 & -ac_3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$${}^A R = [{}^A R_1 {}^A R_2] = \begin{bmatrix} -s_1 - s_1 & c_2 \\ c_1 & c_1 & s_2 \\ n_1 & n_2 & as_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

여기서, $n_1 = -ac_1 + (1 - \alpha)l_1$,
 $n_2 = -ac_1 + (1 + \alpha)l_1$ 이다.

Type I, II 기구의 강성행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^A K = \sum_{i=1}^3 {}^A R_i k_i {}^A R_i^T \quad (48)$$

여기서, $k_i = c_i^{-1}$ 이고 Type I의 경우 R_i 는 식 (45)의 해당 열벡터로 c_i 는 식 (34)로 구할 수 있다. Type II의 경우 R_i 는 식 (46)의 해당 열벡터로 $c_{1,2}$ 는 식 (34)로 c_3 은 식 (36)으로 구할 수 있다.

Type III 기구의 강성행렬은 다음과 같다.

$${}^A K = {}^A R_1 k_1 {}^A R_1^T + {}^A R_2 k_2 {}^A R_2^T \quad (49)$$

여기서, R_1 은 식 (47)의 처음 2개의 열벡터로 R_2 는 세 번째 열벡터로 k_1, k_2 는 각각 식 (41), 식 (44)의 역행렬로 구할 수 있다.

좌표변환을 이용하여 기구의 강성행렬을 이동좌표계 {B}에서 표현하면 다음과 같다.

$${}^B K = A[E]_B^T K^A [E]_B \quad (50)$$

여기서, ${}^A [E]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

3.3 ADAMS 해석결과와 비교

제안하는 강성해석 방법의 유효성 및 정확성을 검증하기 위하여 ADAMS 해석결과와 비교하고자 한다. 수치 해석을 위하여 Type I, II, III 기구들에 대하여 이동 좌표계의 원점의 기준 위치, 구동기의 강성값 및 사각 링크의 형상을 Table 1과 같이 설정하였다. Table 2는 기구의 강성모델에서 직선스프링의 강성을 나타낸다. 여기서 길이의 단위는 m이다.

(a) Type I의 강성해석 결과

기준위치에서 식 (50)을 이용하여 Type I 기구의 강성행렬을 구하면 다음과 같다.

$${}^B K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1.2464 & 0.4315 & -0.2164 \\ 0.4315 & 1.7461 & 0.1246 \\ -0.2164 & 0.1246 & 0.4365 \end{bmatrix}$$

이의 역행렬로 구한 순응행렬은 다음과 같다.

$${}^B C = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 1.0031 & -0.2893 & 0.5798 \\ -0.2893 & 0.6680 & -0.3340 \\ 0.5798 & -0.3340 & 2.6735 \end{bmatrix}$$

Table 1 Simulation conditions

Items	Values
Reference configuration	$\mathbf{p} = [0, \sqrt{3}/2]^T$, $\phi = 0$ $a = 1$, $b = 1$, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$, $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = \sqrt{3}$
Actuator stiffness	$k_P = c_P^{-1} = 10^6$ [N/m], $k_R = c_R^{-1} = 10^6$ [Nm]
Beam geometry	$A = w^2$, $I = w^4/12$ ($w = 0.05$) $E = 200$ GPa, $G = 80$ GPa

Table 2 Linear spring stiffness of equivalent stiffness models

Items	Stiffness values ($\times 10^6$ [N/m])
Type I	$k_1 = k_2 = 0.9980$, $k_3 = 0.9965$
Type II	$k_1 = k_2 = 0.9980$, $k_3 = 0.0601$
Type III	$k_{11} = 0.9106$, $k_{22} = 0.0637$, $k_2 = 500$, $d = 0.6295$ [m]

Fig. 5와 같이 ADAMS 모델링에서 Euler Beam은 ‘Connector: Massless Beam’으로 선형 및 회전 구동기의 강성은 각각 ‘Connector : Translational Spring-Damper’와 ‘Connector: Torsion Spring’으로 모델링하였다.

ADAMS 모델에 P점에 x 축 방향으로 단위 힘($f_x = 1$ [N])을 가하고 직선변위 δx , δy 와 회전변위 $\delta \theta$ 를 각각 ‘Point-to-Point’와 ‘Measure Orientation’으로 측정하여 첫 번째 열벡터를 구성하고 y 축 방향으로 단위 힘($f_y = 1$ [N])을 가하여 생긴 변위로 두 번째 열벡터를 구성하고 P점에 대한 단위 모멘트($n_z = 1$ [Nm])를 가하여 마지막 열벡터를 구성하여 구한 순응행렬은 다음과 같다.

$${}^B C = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 1.0031 & -0.2893 & 0.5798 \\ -0.2893 & 0.6680 & -0.3340 \\ 0.5798 & -0.3340 & 2.6735 \end{bmatrix}$$

또한, 기준위치에서 $\phi = 0$ 으로 고정하고 각각 $\Delta x = 0.4$ 및 $\Delta y = 0.4$ m 떨어진 위치에서 ADAMS로 순응행렬을 구하였다. 3가지 경우 모든 원소의 백분율 오차는 0.0014%이내에 있음을 확인하였다.

Type I의 직교강성은 Fig. 6(a)와 같이 이동플랫폼이 3개의 다리방향으로 배치된 직선스프링(강성값은 Table 2의 Type I 참조)으로 지지된다고 모델링할 수 있다.

(b) Type II의 강성해석 결과

기준위치에서 이 기구의 강성행렬을 구하면 다음과 같다.

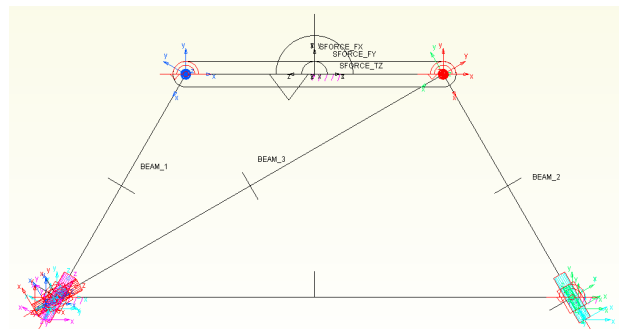


Fig. 5 Stiffness modeling of Type I (3-RPR) using ADAMS

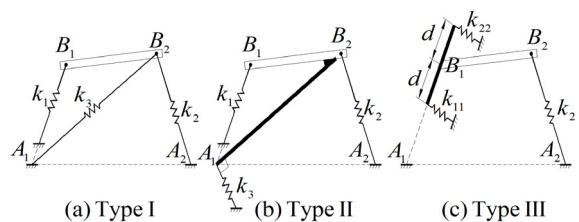


Fig. 6 Equivalent stiffness models

$${}^B K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.5140 & -0.0260 & -0.3931 \\ -0.0260 & 1.5421 & -0.0677 \\ -0.3931 & -0.0677 & 0.4757 \end{bmatrix}$$

이의 순운동행렬은 다음과 같다.

$${}^B C = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 5.4094 & 0.2893 & 4.5107 \\ 0.2893 & 0.6680 & 0.3340 \\ 4.5107 & 0.3340 & 5.8766 \end{bmatrix}$$

Type I의 다리3은 인장/압축력만 작용하는 것과 달리 Type II의 다리3은 굽힘 모멘트가 작용하므로 f_x 와 n_z 에 대한 변형, 즉 순운동행렬의 첫 번째와 세 번째 열벡터의 값이 증가된 것을 알 수 있다. 또한, 기준위치 및 기준위치에서 각각 $\Delta x=0.4$ 및 $\Delta y=0.4$ m 떨어진 위치에서 ADAMS로 순운동행렬 구하였다. 3가지 경우 모든 원소의 백분율 오차는 0.0097%이내에 있음을 확인하였다.

Type II의 강성은 Fig. 6(b)와 같이 이동플랫폼이 3개의 직선스프링(강성값은 Table 2의 Type II 참조)으로 지지된다고 모델링할 수 있다.

(c) Type III의 강성해석 결과

기준위치에서 이 기구의 강성행렬을 구하면 다음과 같다.

$${}^B K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 125.7307 & -216.9282 & -107.5806 \\ -216.9282 & 375.2436 & 187.1117 \\ -107.5806 & 187.1117 & 94.4635 \end{bmatrix}$$

이의 순운동행렬은 다음과 같다.

$${}^B C = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 37.9520 & 31.5268 & -19.2258 \\ 31.5268 & 26.4060 & -16.4000 \\ -19.2258 & -16.4000 & 10.6000 \end{bmatrix}$$

Type III은 Type I, II와 달리 다리3이 제거되고 다리1도 굽힘모멘트가 작용하므로 변형량이 크게 증가된 것을 알 수 있다. 또한, 기준위치와 기준위치에서 $\Delta x=0.4$ m 떨어진 위치에서 ADAMS로 순운동행렬 구하였다. 2가지 경우 모든 원소의 백분율 오차는 0.0138%이내에 있음을 확인하였다.

Type III의 다리1에서 역나선의 조합을 식 (40)과 같이 선정하는 경우에는 구속공간 순운동행렬이 대각행렬이 되고 이 때 역나선의 거리 d 와 $k_{11} = c_{11}^{-1}$, $k_{22} = c_{22}^{-1}$ 는 Table 2의 Type III를 참조한다. Type III의 강성도 Fig. 6(c)와 같이 이동플랫폼이 3개의 직선스프링으로 지지된다고 모델링할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 역나선을 이용하여 각 다리의 특이 강성행렬을 구하고 이의 합으로 평면 병렬형 기구의 강성행렬을 구하는 방법을 제시한다. 구동기뿐만 아니라 링크의 순운동도 해석에 고려되었다. 제시하는 방법은 다리가 직렬체인으로만 구성된 일반적인 3자유도 및 저자유도 평면 병렬형 기구에 적용할 수 있다. ADAMS를 이용한 수치적 강성해석을 통하여 제시하는 해석적 방법의 유효성 및 정밀성을 검증하였다. 구속공간 순운동행렬을 대각화할 수 있는 역나선 조합을 구함으로써 과구속이 아닌 경우 자유도에 관계없이 평면 병렬형 기구의 강성을 이동 플랫폼이 총 3개의 역나선 방향의 스프링으로 지지된다고 모델링 할 수 있다. 유한요소법에 비하여 제시하는 해석적 강성해석방법은 연산시간이 작으므로 강성설계 및 제어시 효과적으로 사용될 수 있다.

후기

본 연구는 2011학년도 경남대학교 연구년 연구비 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

References

- [1] Stewart, D., 1965, A Platform with Six Degrees of Freedom, Proc. Institute of Mechanical Engr. 180 371-386.
- [2] Kim, H. S., 2010, Development of a New 6-DOF Parallel-type Motion Simulator, Journal of the Korean Society of Machine Tool Engineers 19:2 171-177.
- [3] Pierrot, F., Nabat, V., Company, O., Krut, S., Poignet, P., 2009, Optimal Design of a 4-DOF Parallel Manipulator: From Academia to Industry, IEEE Trans. on Robotics and Automation 25:2 213-224.
- [4] Shin, W. J., Cho, N. G., 2004, A Study on the Error Compensation of Three Translational Parallel Manipulator, Transactions of the Korean Society of Machine Tool Engineers 13:3 44-52.
- [5] Hesselbach, J., Helm, M., Soetebier, S., 2002, Connecting assembly modes for workspace enlargement, Lenarcic, J. (Ed.), Advances in Robot Kinematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [6] Huang, T., Chetwynd, D. G., Gosselin, G. M., Li, Z., Li, M., 2002, Conceptual Design and Dimensional Synthesis of a Novel 2-DOF Translational Parallel Robot for Pick-and-Place Operations, Journal of Mechanical Design 126:5 449-455.
- [7] Kim, H. S., 2002, Development of Two Types of Novel Planar Translational Parallel Manipulators by Using Parallelogram Mechanism,

- KSPE 24:8 50-57.
- [8] Griffis, M., Duffy, J., 1993, Global Stiffness Modeling of a Class of Simple Compliant Couplings, *Mechanism and Machine Theory* 28:2 207-224.
- [9] Choi, Y. J., 2001, Stiffness Matrix of a Fully Parallel Manipulator and Its Applications, *Journal of the Korean Society of Precision Engineering* 18:7 34-39.
- [10] Gosselin, C., 1990, Stiffness Mapping of Parallel Manipulators, *IEEE Transaction on Robotics and Automation* 6 377-382.
- [11] Zhang, D., Gosselin, C. M., 2001, Kinetostatic Modeling of N-DOF Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Prismatic Actuators, *ASME J. of Mechanical Design* 123 375-381.
- [12] Kim, H. S., Shin, C. R., Kyung, J. Ho., 2005, Stiffness Analysis of a Low-DOF Parallel Manipulator including the Elastic Deformations of Both Joints and Links, *ICCAS*, June 2-5, Gyeonggi-do, Korea.
- [13] Xu, Q., Li, Y., 2008, Stiffness analysis for a 3-PUU parallel kinematic machine, *Mechanism and Machine Theory* 43 186-200.
- [14] Joshi, S., Tsai, L. W., 2002, Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators, *J. of Mechanical Design* 124:2 254-258.
- [15] Kim, H. S., 2009, Stiffness Analysis of a Low-DOF Planar Parallel Manipulator, *KSPE* 26:8 79-88.
- [16] Pashkevich, A., Chablat, D., Wenger, P., 2009, Stiffness analysis of over constrained parallel manipulators, *Mechanism and Machine Theory* 44 966-982.
- [17] Duffy, J., 1996, *Statics and Kinematics with applications to Robotics*, Cambridge University Press, United Kingdom.