

# 1차 확률적 지배를 하는 최대효용 포트폴리오 가중치의 탐색에 관한 연구

류 춘 호<sup>†</sup>

홍익대학교 경영학부

## Optimizing Portfolio Weights for the First Degree Stochastic Dominance with Maximum Utility

Choonho Ryu

Department of Business Administration, Hongik University

### ■ Abstract ■

The stochastic dominance approach is to form a portfolio that stochastically dominates a predetermined benchmark portfolio such as KOSPI. This study is to search a set of portfolio weights for the first-order stochastic dominance with maximum utility defined in terms of mean and variance by managing the constraint set and the objective function in an iterative manner. A nonlinear programming algorithm was developed and tested with promising results against Korean stock market data sets.

Keyword : The First-Order Stochastic Dominance, Portfolio Weights, Mean-Variance, Utility Function

## 1. 서 론

투자자가 위험자산(risky asset)에의 투자를 고려할 때는 가급적 수익은 크면서 위험은 작은 투자

를 원하므로, 여러 위험자산에 투자를 분산시킴으로써 투자에 따른 위험을 줄이려고 노력한다. 이럴 경우 '평균-분산(mean-variance) 기준'이 가장 보편적으로 사용되고 있는데, 포트폴리오 수익률의

논문접수일 : 2013년 12월 31일 논문게재확정일 : 2014년 02월 03일

논문수정일(1차 : 2014년 01월 27일)

<sup>†</sup> 교신저자 ryuch@wow.hongik.ac.kr

표준편차(혹은 분산)를 투자자들이 느끼는 위험이라고 보고, 포트폴리오의 기대수익률이 높을수록 그리고 포트폴리오 수익률의 표준편차가 작을수록 더 우수한 포트폴리오라고 생각하게 된다.

그런데 이런 평균-분산 기준은 포트폴리오의 기대수익률이 정규분포를 하고 있다고 가정을 하고 있는데, Gotoh and Konno[20]는 주식시장의 수익률에 대한 과거 데이터를 보면 정규분포를 따르지 않는다고 지적하였으며, 김진호[1]는 위험측정 수단으로서 표준편차를 사용하는 것에 대해 정규분포 가정이 금융시계열들에 잘 맞지 않는다는 것과 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격과 선형적으로 가격이 움직이는 주식 등의 경우에는 수익률의 표준편차를 통해 쉽게 투자자산의 위험 측정이 가능하지만 옵션과 같이 비선형적 움직임을 보이는 자산의 경우에는 어려움이 있다는 점 등을 한계점으로 지적하였다.

평균-분산 기준과 다른 방법으로서 ‘확률적 지배(stochastic dominance)’ 개념을 사용한 포트폴리오의 구성이 제시되었는데, 포트폴리오 수익률에 대해 어떠한 확률분포도 가정하지 않고 누적분포함수(cumulative distribution function)만을 이용함으로써 비모수적인 접근방법(non-parametric approach)을 취하고, 투자자의 효용함수에 어떠한 가정도 필요하지 않다는 점에서 매력적이다[22, 29]. Tao[35]는 확률적 지배 기준에 비해서 평균-분산 기준이 오직 두 개의 모수(parameter)만 필요하므로 간단하고 비용이 적게 들어서 실증적인 포트폴리오 분석에 보다 많은 영향력을 행사해 오고 있다고 하였으나, Gotoh and Konno[20]는 확률적 지배 기준이 평균-분산 기준보다 이론적인 측면에서 더 우수한 것이긴 하나, 평균-분산 기준에 비해 효율적인 포트폴리오를 구성하기가 쉽지 않다는 단점이 있다고 지적하였으며, Castellano and Cerqueti[15]는 투자자에 의해 어떻게 누적분포함수가 왜곡되는지를 보여줌으로써 구조성 상품(structured product)의 경우에 대해서 확률적 지배 기준의 문제점을 제시하였다.

확률적 지배 개념은 1960년대 말부터 통계 분야

는 물론, 경제, 재무, 농업, 마케팅, OR 등 다른 분야에서도 많이 이용되고 개발되어 왔다[23]. 몇 가지 예로서 전력 판매[14], 농업[33, 36], 농산물 유통 및 배송[18], 의학[23], 법경제학[19] 등에서의 이용을 들 수 있다.

그리고 확률적 지배 개념을 포트폴리오 가중치 결정과정정에 적용한 것을 살펴보면, 류춘호와 신성환[5]은 확률적 지배기준이 평균-분산 기준과 비교하여 어떠한 장점이 있는지를 제시하였고, 류춘호[4]는 ‘2차 확률적 지배(the second-order stochastic dominance)’를 고려할 경우 최적화의 대상이 되는 비선형 목적함수(nonlinear objective function)의 수학적 특성을 분석하여 전체최적성(global optimality)과 국지최적성(local optimality)을 검토하고, 이 알고리즘을 주식시장으로부터의 실제 자료에 적용하여 그 효용성을 시험하였다. 류춘호[3]는 ‘1차 확률적 지배(the first-order stochastic dominance)’의 경우에 대해서 포트폴리오의 가중치를 최적화하는 알고리즘을 개발하였다.

포트폴리오 구성에 확률적 지배 개념을 고려한 연구들은 매우 많은데, 대부분이 2차 확률적 지배를 다루고 있을 뿐 1차 확률적 지배에 대한 연구는 쉽게 찾아볼 수가 없다. 2차 확률적 지배에 대한 연구들 중 일부로서 Dentcheva and Ruszczyński[14, 15], Ruszczyński and Vanderbei[26], McNamara[22] 등을 예로 들 수 있다. Noyan and Ruszczyński[31]는 1차 확률적 지배 조건을 제약식으로 하는 확률계획법(stochastic programming) 문제를 0-1정수계획법(0-1 mixed integer programming) 문제로 정의하고 이 실행가능영역의 비볼록성(non-convexity) 때문에 유효부등식(valid inequalities)을 이용하여 근사해를 구하는 알고리즘을 제시하였고, 류춘호[2]는 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오 중에서 기대수익률을 최대화 하는 포트폴리오의 가중치를 구하는 비선형계획(non-linear programming) 알고리즘을 개발하였다는 점에서 차별성을 가진다.

일반적으로 높은 수익이 기대되는 투자는 높은 수준의 위험을 동반하기 때문에, 높은 수익률을 안

정적으로 달성한다는 것은 매우 어려운 일이라서, 투자자는 자신의 성향에 적합한 포트폴리오를 구성하게 되는데, 보수적인 투자 성향을 가지는 투자자는 낮은 기대수익률을 가지더라도 낮은 위험도를 가지는 포트폴리오를 원하고, 공격적인 성향을 가지는 투자자는 높은 위험도를 감수하고서라도 높은 기대수익률을 가지는 포트폴리오를 원한다[7, 10].

류춘호[2]의 1차 확률적 지배를 하는 최대수익 포트폴리오는 기대수익률만을 고려하였을 뿐 투자자의 위험도를 고려하고 있지 않는데, 본 논문에서는 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오의 기대수익률 뿐만 아니라 위험(분산)도 함께 고려함으로써, 실제 투자자의 결정에 조금 더 가까이 가려고 하였다. 이는 기대수익률이 크더라도 위험 또한 동시에 큰 포트폴리오라면 선호도가 작을 수도 있어서, 기대수익률이 클수록 그리고 위험이 작을수록 선호도가 높기 때문이다.

이를 위하여 포트폴리오의 기대수익률과 표준편차의 교환비율을 알아보고 이들의 조합으로서 정의된 효용함수를 최대를 하는 1차 확률적 지배 포트폴리오의 가중치를 구하는 알고리즘을 개발하고자 한다. Ogryczak and Ruszczyński[32]도 두 기준을 동시에 고려하긴 하였으나 2차 확률적 지배 기준이라는 점에서 1차 확률적 지배 기준을 고려하고 있는 본 논문과는 다르다고 하겠다. 이런 점을 고려해 볼 때, 본 논문이 평균-분산 기준과 1차 확률적 지배 기준을 동시에 고려한 시도의 하나로서 의미가 있다고 하겠다.

류춘호[2]가 제시한 1차 확률적 지배를 하는 최대수익률 포트폴리오의 가중치를 구하는 알고리즘이 기대수익률을 나타내는 목적함수가 가중치의 선형 함수로서 알고리즘의 진행이 수월한 반면에, 본 논문에서는 포트폴리오의 효용을 나타내는 목적함수가 가중치의 2차 함수라서 알고리즘의 개발에 유의해야 할 점들이 있고 프로그램을 수행할 때에도 모수(parameter)의 적절한 선택도 함께 고려해야 하기 때문에, 최대수익률 포트폴리오의 알고리즘과는 상당히 다른 모습을 보이고 있다는 점에서 차별

성을 가진다고 하겠다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 제 2장에서는 포트폴리오 수익률의 평균과 분산을 함께 고려하는 방법으로서 수익률의 평균과 분산의 조합으로 이루어진 효용함수를 정의하고 나서, 제 3장에서는 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오 중 이 효용함수를 최대를 하는 가중치를 구하기 위하여 개발된 알고리즘을 살펴보고, 제 4장에서 작은 수치예제를 가지고 이 알고리즘이 어떻게 움직이는지 알아본 후, 제 5장에서 주식시장으로부터 얻은 실제 데이터에 적용해서 알고리즘의 효율성을 확인하였으며, 제 6장에서는 결론 및 향후 연구방향을 제시하였다.

## 2. 문제의 정식화

$n$ 개의 주식으로 포트폴리오를 구성하여 벤치마크 포트폴리오에 대해 ‘확률적 지배(stochastic dominance)’를 하도록 포트폴리오 가중치를 구하는 것부터 살펴보도록 하자. 본 논문에서는 이러한 벤치마크 포트폴리오로 KOSPI(Korea Composite Stock Price Index; 한국종합주가지수)를 사용하도록 하겠다. 이들  $n$ 개의 주식들의  $T$ 개의 시점에 대한 수익률의 정보가 주어져 있다고 가정하면, 주식  $i$ 의 시점  $t$ 에서의 전기 대비 수익률을  $x_{it}$ , 주식  $i$ 에 부여하는 가중치를  $w_i$ , 각 시점  $t$ 에 대해서  $n$ 개의 주식들의 수익률의 가중합계(포트폴리오)를  $X_t$ 라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_t = \sum_{i=1}^n w_i x_{it}, \quad (\text{단, } \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \in R \quad \forall i) \quad (1)$$

여기서  $R$ 은 실수를 의미한다. 이렇게 만들어진  $T$ 개의  $X_t$ 를 표본으로 간주할 수 있다면, 각각의 표본에  $1/T$ 의 확률을 똑같이 부여함으로써 실증분포(empirical distribution)를 구성할 수가 있으며, 이것으로부터  $X_t$ 의 누적분포함수(cumulative distribution function)  $F_x(\cdot)$ 를 구할 수가 있다.  $T$ 개의 시점에 대한 KOSPI의 수익률  $K_t$ 에 대해서도 이와

같이 실증분포를 만들고 그로부터 누적분포함수  $F_k(\cdot)$ 를 구할 수 있다.

$$F_x(y) = \Pr\{X_t \leq y\} = \frac{p}{T}, \quad (\text{단, } X_{(p)} \leq y < X_{(p+1)}), \quad (2)$$

$$F_k(y) = \Pr\{K_t \leq y\} = \frac{q}{T}, \quad (\text{단, } K_{(q)} \leq y < K_{(q+1)}).$$

여기서  $X_{(t)}$ 는  $X_t$ 의 순서통계량(order statistics)으로서 크기가 작은 것부터 큰 순서대로 배열했을 때  $t$ 번째의  $X_t$ 를 의미한다. 즉,  $X_{(p)}$ 는  $X_t$ 의  $p$ 번째 순서통계량이고,  $K_{(q)}$ 는  $K_t$ 의  $q$ 번째 순서통계량이 된다.

여기서 우리의 포트폴리오  $X_t$ 가 벤치마크 포트폴리오인  $K_t$ 를 확률적으로 지배할 수 있도록 어떻게  $w_t$ 를 결정할 것인지, 그리고 나아가서 그렇게 만들어낸 확률적 지배 포트폴리오 중 최대의 기대 수익률을 주는 포트폴리오나 가급적 기대수익률은 크면서 분산은 작은 포트폴리오를 어떻게 찾아낼 것인지 등이 그 다음 관심사라고 하겠다.

2차 확률적 지배 포트폴리오는 위험회피적인 성향을 갖는 투자자만이 선택하고 위험선호적인 투자자는 선택하지 않는 반면에, 1차 확률적 지배 포트폴리오는 투자자의 위험성향이 위험회피적이든 위험선호적이든 관계없이 선택한다는 점에서 훨씬 더 강한 조건을 가지고 있다[21, 24]. 즉, 2차 확률적 지배는 효용함수(utility function)의 오목성(concavity)을 전제로 하지만, 1차 확률적 지배는 효용함수의 성질에 전혀 영향을 받지 않는다. 그러므로 1차 확률적 지배 포트폴리오는 언제나 2차 확률적 지배 포트폴리오가 되지만, 그 역은 성립하지 않는다. 그러므로 2차 확률적 지배 포트폴리오의 최대 기대수익률은 1차 확률적 지배 포트폴리오의 최대 기대수익률보다 항상 크거나 같으며, 따라서 전자는 후자의 상한(upper limit)이 된다고 할 수 있다[2].

KOSPI를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오 중 기대수익률을 최대화 하는 가중치를 찾아내는 문제 ( $P_2$ )는 아래와 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\omega} \quad & E(X) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \\ \text{(P}_2\text{)} \quad & \text{s.t.} \quad h(\omega) = \mathop{\text{max}}_h \int_{-\infty}^h \{F_x(y) - F_k(y)\} dy \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ & \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in R^n \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 첫 제약식의 함수는 비선형(nonlinear)이지만 류춘호[4]는 이 제약식을 0으로 하는 효율적인 알고리즘을 제시하였으며, 이를 이용하여 ( $P_2$ )의 최적해를 찾는 알고리즘을 개발하였고, Dentcheva and Ruszczyński[17]는 ( $P_2$ )의 실행가능 영역이 볼록집합임을 증명하고 이 문제를 선형계획모형으로 정식화함으로써 보통의 상업용 소프트웨어로 쉽게 최적해를 찾을 수 있음을 보여주었다.

KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오 중 기대수익률을 최대화 하는 가중치를 찾아내는 문제 ( $P_1$ )은 아래와 같이 정식화할 수 있다.

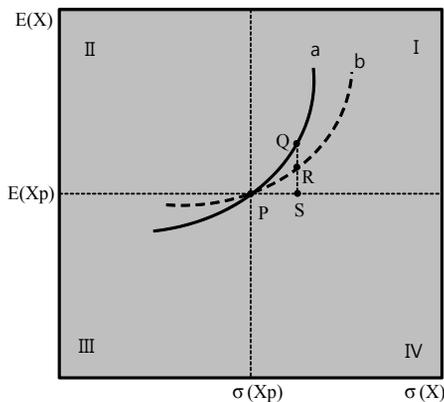
$$\begin{aligned} \text{Max}_{\omega} \quad & f_1(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \\ \text{(P}_1\text{)} \quad & \text{s.t.} \quad g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_x(y) - F_k(y)\}^+ dy = 0 \\ & \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ & \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in R^n \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\{F(\cdot)\}^+$ 는 함수가 0보다 크거나 같은 부분을 의미한다.  $g(\omega)$ 는 볼록함수(convex function)는 아니나 전역에서 미분가능하기 때문에 그 값을 0으로 만드는  $w$ 를 구하기만 하면 그것은 곧 실행 가능한 것이며,  $f_1(w)$ 는  $w$ 의 선형함수이므로, 위의 문제는 비볼록집합(non-convex set)인 실행가능영역(feasible region) 위에서 볼록함수인 선형함수를 최대화하는 문제가 되는데, 류춘호[2]는 이에 대한 알고리즘을 개발하여 그것이 효율적이고 안정적인

을 보여주었다.

Markowitz[25]는 투자자가 포트폴리오를 구성함에 있어서 포트폴리오의 기대수익률과 기대위험도(즉, 수익률에 대한 분산)를 이용할 것을 제안했는데, 본 논문에서도 벤치마크 포트폴리오를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오의 기대수익률 뿐만 아니라 위험도를 나타내는 분산(variance)까지도 함께 고려하고자 한다. 즉, 이러한 포트폴리오 중에서 가급적 기대수익률은 크면서도 분산이 작은 포트폴리오를 구성하고자 한다. 이렇게 하려면 기대수익률과 분산을 하나의 함수로 나타낼 수 있어야 하는데, 이는 기대수익률과 분산의 직접 비교가 가능해야만 하며, 투자자가 수익률과 분산을 서로 교환하려는 비율을 어떻게 계량화할 수 있는가로 귀결된다.

포트폴리오 X의 기대수익률  $E(X)$ 와 표준편차  $\sigma(X)$ 로 [그림 1]과 같은 무차별곡선(indifference curve)을 얻을 수 있다[11]. [그림 1]에서 곡선 a 상의 점 Q는 P와 선호도가 같은 포트폴리오이다. 이 무차별곡선으로부터 개인투자자가 가지고 있는 기대수익률과 표준편차의 교환비율의 정보를 얻을 수가 있다. 아울러 무차별곡선 a를 가지는 투자자가 무차별곡선 b를 가지는 투자자보다 더 위험회피적이라고 부른다.



[그림 1] 무차별곡선

투자자가 포트폴리오의 기대수익률과 분산을 바탕으로 그 포트폴리오의 효용(utility)을 계산할 수

있다고 가정하면, 이 효용 값이 클수록 더 매력적이고 더 선호도가 높다고 할 수 있다. 즉, 기대수익률이 큰 포트폴리오에 높은 효용 점수를 주고, 분산이 큰 포트폴리오에는 낮은 효용 점수를 줄 수가 있다.

이렇게 효용 점수를 주는 방법에는 이차함수(quadratic utility function)[26], 로그함수(log utility function)[27], 지수함수(exponential utility function)[13], 초지수함수(hyperexponential utility function)[12] 등 여러 가지가 있을 수 있는데, 본 논문에서는 기대수익률  $E(X)$ 와 분산  $\sigma^2(X)$ 를 가진 포트폴리오에 대해, 금융이론가들이 자주 애용하는 이차함수인, 다음과 같은 효용함수(utility function)를 고려해 보자[11].

$$U(X) = E(X) - 0.5A\sigma^2(X) \quad (5)$$

여기서 U는 포트폴리오 X의 효용점수(utility value)를 나타내고, A는 투자자의 위험회피 정도를 나타내는 위험회피계수(risk aversion coefficient)이며, 계수 0.5는 단지 척도를 적절한 비율로 조정하기 위한 것이다. 경제학자들은 광범위한 주가지수 포트폴리오의 기대수익률과 분산의 추정치로부터 투자자들의 위험회피계수 A가 2에서 4까지의 범위에 있을 것으로 추정하고 있는데, A가 4인 경우가 2인 경우보다 더 위험회피적이다[11].

식 (5)의 효용함수는 [그림 1]의 무차별곡선과 대단히 유사한 형태를 띠고 있어서, 본 논문에서는 무차별곡선으로부터 기대수익률과 표준편차의 교환비율을 구하기보다는 바로 이 효용함수를 이용하기로 한다.

KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오 중 기대수익률과 분산으로 이루어진 효용함수를 최대로 하는 가중치를 찾아내는 문제 (P)는 아래와 같이 정식화할 수 있다.

$$\text{Max}_{\omega} \quad f(\omega) = E(X) - 0.5A\sigma^2(X)$$

$$(P) \quad \text{s.t.} \quad g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_x(y) - F_k(y)\}^+ dy = 0 \quad (6)$$

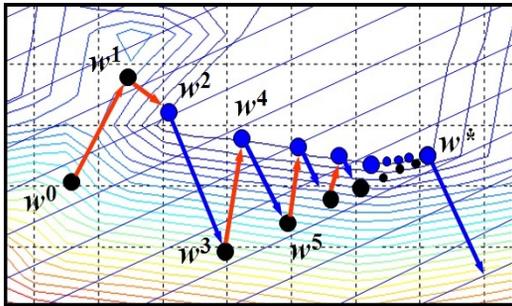
$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n$$

(P)와 (P<sub>1</sub>)의 실행가능영역은 동일하고,  $f(w)$ 는  $w$ 의 2차 함수(quadratic function)이므로, 위의 문제는 비볼록집합(non-convex set)인 실행가능영역(feasible region) 위에서 오목함수(concave function)를 최대화하는 문제가 된다. 따라서 통상적인 최적화 알고리즘을 적용하여 구한 최종해는 그것이 국지적 최적해(local optimal solution)는 될 수 있을 지언정 전체적 최적해(global optimal solution)라는 보장은 할 수가 없다.

### 3. 가중치탐색 알고리즘

우선 문제 (P<sub>1</sub>)에 대한 알고리즘을 살펴보면, 시작점에서 출발하여  $g(w)$ 를 최소화하기 시작한다.  $g(w)$ 의 이론적인 최솟값인 0이 되는  $w$ 를 찾게 되면 문제 (P<sub>1</sub>)의 실행가능영역으로 진입을 한 것이 되는데, 이는 1차 확률적 지배 조건을 달성하게 되는 것이다. 그리고 나서 목적함수인  $f_1(w)$ 를 증가시키고 그 결과가 실행가능영역을 벗어나면 다시 실행가능영역을 찾아 들어가고 거기서 다시 목적함수를 증가시키는 과정을 계속 반복한다. [그림 2]는 이 과정을 일목요연하게 보여주고 있다[2].



[그림 2] (P<sub>1</sub>) 알고리즘의 축차적 과정[2]

그런데 여기서  $f_1(w)$ 는  $w$ 의 1차 함수이므로 1차 도함수가 상수로 존재하며 이 함수의 등고선은 [그림 2]에서 볼 수 있듯이 평행한 직선들로 이루어져

있다. 현재의 해  $w^k$ 에서의  $f_1(w)$ 의 일차 도함수를  $\nabla f_1(w^k)$ 라고 하면 새로운 해  $w^{k+1}$ 은 아래와 같이 구할 수가 있다.

$$w^{k+1} = w^k + \lambda \frac{f_1(w^*) - f_1(w^k)}{\|\nabla f_1(w^k)\|^2} \cdot \nabla f_1(w^k) \quad (7)$$

여기서  $w^*$ 는 (P<sub>1</sub>)의 최적해를 의미하는데, 현재로서는 최적해를 알 수가 없으므로, 문제 (P)의 최적목적함수값을  $V(P)$ 라고 나타낸다면, (P<sub>2</sub>)의 최적해로부터 얻은 최대 기대수익률  $V(P_2)$ 는  $f_1(w^*)$ 와 같지는 않지만  $f_1(w^*)$ 의 상한이 되기 때문에,  $f_1(w^*)$  대신  $V(P_2)$ 를 사용하여 도함수 기법을 적용하였다[2].

문제 (P)의 경우는 문제 (P<sub>1</sub>)의 경우와 차이가 있는데, 문제 (P<sub>1</sub>)의 목적함수  $f_1(w)$ 는  $w$ 의 1차 함수이지만, 문제 (P)의 목적함수  $f(w)$ 는  $w$ 의 2차 함수이고 오목함수이므로 1차 도함수를 0으로 하는  $w^*$ 에서 최댓값  $f(w^*)$ 가 존재하며(목적함수의 등고선은 중심이  $w^*$ 인 동심원들임), 만일 이  $w^*$ 가 제약식을 만족한다면 이  $w^*$ 가 문제 (P)의 최적해가 된다. 만일 그렇지 않다면, 문제 (P<sub>1</sub>)과 (P)의 제약식은 동일하므로, 시작점에서 출발하여  $g(w)$ 를 최소화하는 방법은 문제 (P<sub>1</sub>)의 방법과 다를 것이 없다.

여기서 문제 (P<sub>1</sub>)의 방법을 적용하여  $g(w)$ 를 최소화하여 이  $w^*$ 로부터 실행가능영역 위의 한 점  $w^1$ 을 찾았다고 하자. 그 다음 순서로 이  $w^1$ 에서 시작하여  $f(w)$ 를 최대화하는 점을 찾으면 바로  $w^*$ 가 된다. 여기서 다시  $g(w)$ 를 최소화하면  $w^1$ 이 나오고 여기서 다시  $f(w)$ 를 최대화하면  $w^*$ 가 나오기를 반복하게 된다. 이것은 시작점이 어디이든 관계없이 일단  $w^*$ 에 도달하기만 하면 그 다음부터는  $w^*$ 와  $w^1$  사이를 왔다 갔다 하게 된다. 그러므로 여기서 문제 (P<sub>1</sub>)의 방법을 그대로 적용할 수는 없다. 그러므로  $w^1$ 에서  $w^*$  방향으로 움직이되  $w^*$ 까지 가질 말고 도중에 점  $w^2$ 에 멈추도록 하고, 그 점  $w^2$ 로부터  $g(w)$ 를 최소화한다면,  $w^1$ 이 아닌 다른 점  $w^3$ 로 갈 가능성이 높아진다. 이 과정을 계속 반복하게

되면  $g(w)$ 가 0이면서  $f(w)$  값이 가장 큰 점에 도달하게 된다. 이 점은 1차 확률적 지배를 하는 해 중에서 효용함수값  $f(w)$ 가 가장 큰 해가 된다. 하지만 실행가능영역이 볼록집합(convex set)이 아니므로, 해가 전체적 최적해(global optimal solution)라는 보장은 할 수가 없다.

그리고 이 과정에서 실행가능영역으로부터 너무 멀어지지 않도록 하기 위하여 한 번에 움직이는 보폭(step size)을 작게 하여 조금씩 진행을 하도록 하고, 일정 반복횟수를 계속해도 목적함수값이 개선되지 않으면 이 보폭(step size)을 더 줄이기 위하여  $\lambda$ 를 반으로 줄여가면서 목적함수값의 개선을 모색한다.

아울러 문제 (P)의 실행가능영역이 볼록집합이 아니므로 시작점이 어디인가에 따라서 최종 목적함수값이 달라질 가능성도 존재하게 된다. 본 논문에서는 세 종류의 서로 다른 시작점을 다음과 같이 고려하면서, 처음으로 찾게 되는 실행가능해와 최종해를 서로 비교해 보고자 한다.

- (a)  $\omega_i = 0, i=1, 2, \dots, n-1, \omega_n = 1,$   
 (b)  $\omega_i = 1/n, i=1, 2, \dots, n,$  (8)  
 (c)  $w^*$ , (단,  $f'(w^*) = 0$ )

(c)는  $f(w)$ 의 최댓값이 있는 곳이라는 점에서 가장 기대가 되는 시작점이고, (b)는 사전적인 아무런 정보가 없을 때 모든 대안에 대해 가중치를 동등하게 준다는 '불충분이유의 기준(criterion of insufficient reason)'을 적용한다는 점에서 의미가 있는 시작점이고, (a)는 최적해의 경우  $w_i$ 의 값이 음수인 경우가 적지 않다는 점에서 고려할 만한 시작점이라고 하겠다.

아울러 문제 (P)에서 가중치의 합이 1이라는 제약식으로부터 아래와 같이  $w_n$ 을 치환하여 소거하면  $g(w)$ 를 최소화하는 문제는 무제약 최적화(unconstrained optimization) 문제가 되어, 고려해야 될 제약식이 없는 상황에서 목적함수만을 최소화하면 된다.

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \implies \omega_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \quad (9)$$

식 (5)의 효용함수를 우리의 포트폴리오로 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} f(w) &= U(X) = E(X) - 0.5A\sigma^2(X) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \omega_i x_{it} - \frac{0.5A}{T} \sum_{t=1}^T \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^n \omega_i x_{it} - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^n \omega_j x_{js} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 식 (10)의 목적함수  $f(w)$ 의  $w$ 에 대한 1차 도함수를 구하도록 하자. 식 (9)를 이용하여  $w_n$ 을 치환하여 소거함으로써 변수의 숫자를  $n-1$ 개로 줄이도록 하고, 식의 표현이 복잡한 관계로 이를 단순화하기 위하여 다음과 같이 수식에 대한 정의를 추가하도록 한다.

$$\begin{aligned} y_{it} &= x_{it} - x_{nt} && \forall i, t \\ Sx_i &= \sum_{t=1}^T x_{it} && \forall i \\ Sy_i &= \sum_{t=1}^T y_{it} && \forall i \\ Dx_{it} &= x_{it} - \frac{1}{T} Sx_i && \forall i, t \\ Dy_{it} &= y_{it} - \frac{1}{T} Sy_i && \forall i, t \\ Sxy_{ni} &= \frac{Sy_i}{A} - \sum_{t=1}^T Dx_{nt} Dy_{it} && \forall i \\ Syy_{ik} &= \sum_{t=1}^T Dy_{it} Dy_{kt} && \forall i, k \end{aligned} \quad (11)$$

위의 수식을 이용하여 식 (10)의 목적함수를 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{T} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i Sy_i + Sx_n \right) \\ &\quad - \frac{0.5A}{T} \sum_{t=1}^T \left( \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i Dy_{it} + Dx_{nt} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

위의 식으로부터  $f(w)$ 의  $w_k$ 에 대한 1차 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w_k} &= \frac{1}{T} \left[ Sy_k - A \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \sum_{t=1}^T Dy_{it} Dy_{kt} \right. \\ &\quad \left. - A \sum_{t=1}^T Dx_{nt} Dy_{kt} \right] \quad \forall k \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \frac{A}{T} [Sxy_{nk} - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i Syy_{ik}] \quad \forall k$$

그러므로  $f(w)$ 의  $w$ 에 대한 1차 도함수를 0으로 하는  $w^*$ 는 다음 연립방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$Syy \cdot \omega = Sxy \quad (14)$$

여기서  $Syy$ 는  $(i, k)$ 번째 요소가  $Syy_{ik}$ 인  $(n-1) \times (n-1)$  차원의 행렬이고,  $w$ 는  $(w^1, w^2, \dots, w_{n-1})^T$ 로 이루어진  $(n-1)$  차원의 벡터이며,  $Sxy$ 는  $(Sxy_{n1}, Sxy_{n2}, \dots, Sxy_{n,n-1})^T$ 로 이루어진  $(n-1)$  차원의 벡터이다.  $w^*$ 는  $Syy$ 의 역행렬을 구하여 양변에 곱하면 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\omega^* = Syy^{-1} \cdot Sxy \quad (15)$$

### 4. 예제

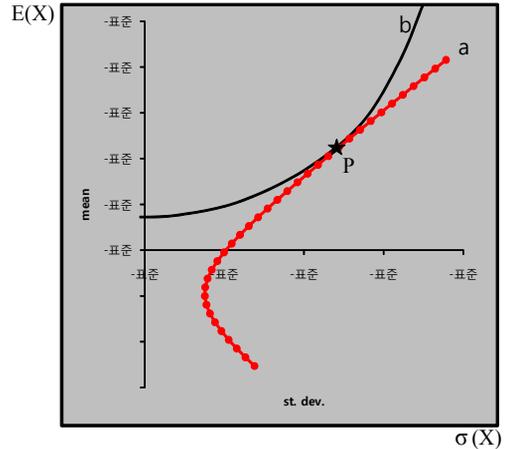
다음과 같이 세 개의 주식과 KOSPI에 대해 5일 동안의 일별수익률이 존재하는 조그마한 예제에 위의 알고리즘을 적용하여 어떻게 움직이는지를 살펴 보고자 한다.

<표 1> 기간별 수익률

기간/주식	A	B	C	KOSPI
1	0.0206	0.1807	-0.0049	-0.0240
2	0.1119	-0.0816	0.0100	-0.0225
3	0.0029	0.0022	-0.0009	0.0235
4	0.0119	-0.0197	0.0396	0.0207
5	-0.0601	0.0111	0.0000	-0.0067

먼저 주식 A와 B만으로 포트폴리오를 구성한다고 가정하고, 각 주식에 부여되는 가중치를 각각  $w_1$ 과  $w_2$ 라고 하자. 모든 가중치의 합은 1이어야 하므로  $w_2 = 1 - w_1$ 으로 치환하면,  $w_1$  하나만 결정하면 된다. 이  $w_1$ 의 크기를 -1.5부터 2.0까지 0.1씩

증가시켜 가면서 이 포트폴리오의 기대수익률과 표준편차를 계산하여 (표준편차, 기대수익률)-평면에 그래프로 그리면 [그림 3]의 곡선 a와 같다.



[그림 3] 포트폴리오의 기대수익률과 표준편차

여기에 우리의 효용함수를 그래프로 나타내기 위하여 효용점수(효용함수값)가 특정값  $u^*$ 일 경우를 고려하면(A=3으로 가정, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$E(X) = 1.5 \sigma^2(X) + u^* \quad (16)$$

이 식은 표준편차에 대해 2차 함수이므로, 이를 (표준편차, 기대수익률)-평면에 그래프로 그리면 [그림 3]의 곡선 b와 같게 된다. 곡선 a와 b가 만나는 점을 P라고 하고, 이 P에 해당하는 포트폴리오의  $w_1$ 이 1차 확률적 지배를 하는 가중치라고 하면, 바로 이 P점이 최적해가 되고 그때의 최대효용은  $u^*$ 가 된다. 만일 이  $w_1$ 이 1차 확률적 지배를 하는 가중치가 아니라고 하면, 1차 확률적 지배를 하는 점들로 이루어진 곡선 a 구간을 지나가는 곡선 b 중 가장 위에 있는 곡선의 u값이 1차 확률적 지배를 하는 최대효용이 된다.

다음으로 주식 A, B, C 세 개를 가지고 포트폴리오를 구성하고자 할 경우, 세 주식에 부여되는 가중치를 각각  $w_1, w_2, w_3$ 라고 하자. 여기서도 두

개의 주식의 경우와 마찬가지로  $w_3 = 1 - w_1 - w_2$ 로 치환해 놓으면,  $w_1$ 과  $w_2$ 만 결정하면 충분하다.

우선  $f(w)$ 의 1차 도함수를 0으로 하는  $(w_1, w_2)$ 를 구하면 (1.149, 0.555)이며, 이 때의  $f(w)$ 의 최댓값은 0.0170387030이 된다. 물론 이  $(w_1, w_2)$ 는  $g(w)$ 의 값이 0.0083110761로서 0보다 크므로 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오의 가중치가 될 수 없다. 즉, 문제 (P)의 실행가능영역 밖에 있는 점이 된다. 이 상황에서 시작점을  $(w_1, w_2) = (0, 0)$ 으로 정하여 우리의 알고리즘을 적용할 때 단계별 함수값의 변화를 정리하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 알고리즘의 단계별 함수값의 변화

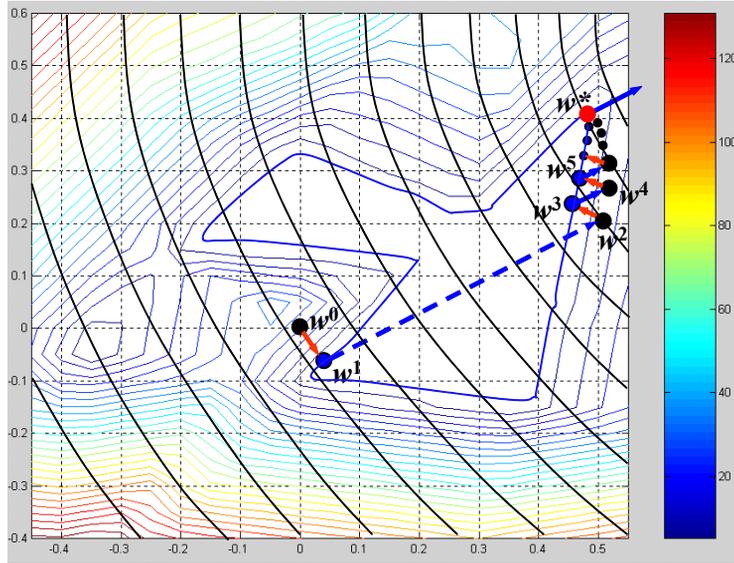
Iter.#	$w(1)$	$w(2)$	$f(w)$	$f^*(w)$	$g(w)$
1	0.000	0.000	0.00836721	-	0.00214000
2	0.116	-0.104	0.00786588	0.00786588	0.00000000
3	0.131	-0.075	0.00842735	0.00842735	0.00000000
4	0.145	-0.047	0.00895438	0.00895438	0.00000000
5	0.160	-0.019	0.00944908	0.00944908	0.00000000
10	0.237	0.107	0.01150328	0.01150328	0.00000000
15	0.319	0.213	0.01300114	0.01300114	0.00000000
20	0.405	0.299	0.01409404	0.01409404	0.00000000
25	0.456	0.358	0.01466476	0.01466476	0.00000000
30	0.480	0.396	0.01492625	0.01478813	0.00009191
35	0.477	0.409	0.01494182	0.01484899	0.00002368
40	0.475	0.410	0.01493207	0.01484899	0.00000074
45	0.475	0.410	0.01493176	0.01484899	0.00000002
50	0.475	0.410	0.01493175	0.01493175	0.00000000

여기서 Iter.#는 반복 횟수를,  $f(w)$ 는 목적함수값을,  $f^*(w)$ 는 현재까지 구한 실행가능해 중 가장 큰 목적함수값을,  $g(w)$ 는 1차 확률적 지배를 나타내는 함수값을 나타낸다. 그러므로 이  $g(w)$ 의 함수값이 0인 경우에 한해서만 1차 확률적 지배를 한다고 볼 수 있다. 이 표에 나와 있듯이 우리의 알고리즘은 처음 시작점에서는  $g(w)$ 의 값이 0이 아니므로 1차 확률적 지배를 하지 못하므로 우선  $g(w)$ 의 값을 최

소화하여 0으로 만들어 1차 확률적 지배를 확보한 후  $f(w)$ 의 값을 크게 하도록 진행을 하다 보면  $g(w)$ 의 값이 0보다 커지는 점으로 옮겨 가게 되는데, 이 점은 다시 1차 확률적 지배를 하지 못하므로  $g(w)$ 의 값을 다시 최소화하여 0으로 만들어 1차 확률적 지배를 확보하는 과정을 반복하게 된다. 이 과정은  $f(w)$ 의 값이 더 이상 개선되지 않는 점에서 멈추게 되고, 이 점이 최적해가 된다.

이 과정을  $(w_1, w_2)$ -평면상에 표시하면 [그림 4]와 같다. 우선  $g(w)$ 를  $(w_1, w_2)$ -평면상에 나타내기 위하여 등고선으로 표시하였는데, 문제 (P)의 실행가능영역은  $g(w)$ 의 값이 0인 부분으로서 등고선의 맨 안쪽에 있는 영역이 되며, 이는 볼록집합이 아님을 분명히 보여주고 있다. 또한 동심원의 일부가 등간격으로 그려져 있는데 이는 목적함수인  $f(w)$ 의 등고선을 나타내고 있으며, 이 동심원의 중심은 (1.149, 0.555)으로서 이 그림에는 표시되지 않았다. 이 동심원의 중심으로 향하는 방향이  $f(w)$ 가 증가하는 방향, 즉,  $f(w)$ 의 일차 도함수 방향이 된다.

본 논문에서 제시한 알고리즘은 첫 시작점  $w^0$ 에서 출발하여  $g(w)$ 를 최소화하는 과정을 적용하여  $w^1$ 에 도달하게 된다. 이때  $g(w^1)$ 의 값이 0이 되면서  $w^1$ 은 (P)의 실행가능영역으로 진입하게 된다. 그 다음으로 목적함수인  $f(w)$ 를 증가시키기 위하여  $f(w)$ 를 최대화하는 과정을 적용하여  $w^2$ 로 이동하게 된다. 그러나  $w^2$ 는 실행가능영역 밖에 있어서 실행불가능하므로, 다시  $g(w)$ 를 최소화하는 과정을 적용하여 실행가능한  $w^3$ 로 이동하게 된다. 이 과정을 지속적으로 반복해서 결국에는  $w^*$ 에 도달하게 된다. 단, 그림에서  $w^1$ 과  $w^2$  사이를 점선으로 표시한 것은, 실행가능영역으로부터 멀리 벗어나지 않도록 하기 위해서 보폭(step size)을 작게 조정하다 보니,  $w^1$ 에서  $w^2$ 까지 한 번에 가지 않고 여러 번 반복을 해서 진행했음을 나타내기 위함이다. 즉, <표 2>에서 2번째부터 10번째까지는 실행가능영역 안에서 움직이고 있어서  $g(w)$ 의 값이 0으로 변하지 않고 있음을 알 수 있다.



[그림 4] 알고리즘의 이행 과정

### 5. 실험 결과

본 논문에서 제시하고 있는, 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오 중 효용함수를 최대로 하는 가중치를 찾아내는 알고리즘의 효율성이 어느 정도인지를 알아보기 위하여, 한국의 주식시장으로부터 종목별로 우량하다고 여겨지는 주식들을 50개 골라서 각 주식의 1년간(260일)의 실제 일별 주식수익률 자료를 구하여 본 논문에서 제시한 알고리즘을 적용하였다. 그리고 이들은 각각 서로 다른 시작점에 대해서 처음으로 발견한 실행가능해와 최종해의 효용함수를 비교함으로써 어느 시작점이 다른

시작점들보다 더 좋은 성과가 있는지도 함께 알아보았다.

이를 위하여 5개의 그룹(주식의 숫자가 5개, 10개, 20개, 30개, 40개)에 대해서 1년(260개)의 주식수익률 자료를 선택하되, 각각의 그룹에 대하여 주식 조합을 10번에 걸쳐서 임의로 골라서 총 50개의 데이터 파일을 만들었다.

먼저 세 종류의 서로 다른 시작점을 가지고 각 그룹별로 10개의 데이터에 우리의 알고리즘을 적용하여 구한 초기 실행가능해와 최종해의 목적함수값(효용)이 서로 어떻게 다른지를 정리하면 <표 3>과 같다. N은 주식의 개수를, T는 주식수익률의 개수를, #는

<표 3> 그룹별 시작점별 초기 실행가능해와 최종해의 비교

그룹			$f(w^0)$			$f(w^*)$			$f(w^*)/f(w^0)$		
N	T	#	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
5	260	10	0.0052	0.0047	0.0056	0.0062	0.0062	0.0062	1.20	1.54	1.12
10	260	10	0.0068	0.0043	0.0082	0.0103	0.0103	0.0104	1.61	2.36	1.27
20	260	10	0.0057	0.0056	0.0090	0.0110	0.0110	0.0110	2.11	2.15	1.22
30	260	10	0.0053	0.0047	0.0119	0.0147	0.0146	0.0145	3.49	4.52	1.21
40	260	10	0.0057	0.0046	0.0142	0.0174	0.0174	0.0174	3.66	5.26	1.22
전체		50	0.0057	0.0048	0.0098	0.0119	0.0119	0.0119	2.41	3.17	1.21

각 그룹에 속하는 데이터의 개수를 의미하고,  $f(w^0)$ 는 본 논문에서 제시한 알고리즘이 (P)의 실행가능영역으로 들어가면서 처음으로 얻은 초기 실행가능해 (1차 확률적 지배를 하는)의 목적함수값(효용)을,  $f(w^*)$ 는 이 알고리즘을 적용하여 구한 최종해의 목적함수값을,  $f(w^*)/f(w^0)$ 는 최종해의 목적함수값이 초기 실행가능해의 목적함수값에 비해 몇 배나 개선되었는지의 비율을 나타내고, (a), (b), (c)는 서로 다른 시작점으로서 각각  $[\omega_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1, \omega_n = 1]$ ,  $[\omega_i = 1/n, i = 1, 2, \dots, n]$ ,  $[w^*, (\text{단, } f'(w^*) = 0)]$ 을 나타낸다. 전체의 평균을 비교해 보면, 초기 실행가능해는 (c)의 경우가 가장 좋고, 그 다음이 (a), (b) 순이며 그 차이도 확실해 보이지만, 최종해는 (a)-(b)-(c)의 순으로 좋으나 그 차이는 크게 있어 보이지는 않는다. 초기 실행가능해 대비 최종해의 개선비율은 (b)-(a)-(c)의 순으로 크지만 이 비율이 크다고 해서 최종해가 더 좋다고 말할 수는 없다.

50개의 데이터 각각에 대해서 우리의 알고리즘을 적용하였을 경우, 초기 실행가능해와 최종해에 대해서 시작점별로 목적함수값(효용)이 좋은 순위를 비교하여 정리하면 <표 4>와 같다.

<표 4> 시작점별 초기 실행가능해와 최종해의 순위 비교

구 분	$f(w^0)$			$f(w^*)$		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
# of 1st cases	5	1	44	17	17	16
# of 2nd cases	34	11	5	17	22	12
# of 3rd cases	11	38	1	16	11	22
점수	94	63	143	101	106	94

‘# of 1st cases’는 50개의 데이터 각각에 대해서 세 개의 시작점 중 가장 좋은 목적함수값을 구한 경우가 몇 번이나 되는지를 나타내며, ‘# of 2nd cases’와 ‘# of 3rd cases’는 각각 두 번째와 세 번째로 좋은 목적함수값을 구한 경우의 개수를 나타낸다. 이러한 시도를  $f(w^0)$ 와  $f(w^*)$ 에 대해서 실시하였으며, 마지막 줄의 점수는  $3*(\text{\# of 1st cases}) + 2*(\text{\# of 2nd cases}) + 1*(\text{\# of 3rd cases})$ 로 계산한 것이다. 이렇게 비교해 보면  $f(w^0)$ 의 경우는 <표 3>의 순위와 같지만,  $f(w^*)$ 의 경우는 (b)-(a)-(c)순으로 변하게 된다.

이러한 차이가 통계적으로도 유의한지 살펴보기 위해서, 전체 50개의 데이터를 가지고 ‘대응표본 T-검정’을 시행한 결과가 <표 5>에 제시되어 있다. 초기 실행가능해  $f(w^0)$ 의 경우는 세 개의 비교들에 대한 유의확률이 모두 0.05보다 작아서 각각의 차이가 통계적으로 유의하다고 볼 수 있으므로, <표 3>과 <표 4>에서와 마찬가지로 (c)-(a)-(b)의 순으로 각각의 차이가 의미 있는 것으로 나타났지만, 최종해  $f(w^*)$ 의 경우는 유의확률이 모두 0.05보다 커서 각각의 차이에 대한 어느 쌍의 비교도 통계적으로 유의하다고 할 수가 없다. 즉, 서로 다른 시작점으로부터 구한 최종해의 목적함수값이 어느 시작점의 경우가 다른 시작점의 경우보다 더 좋다고 할 수가 없다는 걸 의미한다.

문제 (P)의 실행가능영역이 볼록집합이 아니라서 국지적 최적해에서 멈출 가능성에 대비하여 서로 다른 세 개의 시작점을 이용해서 알고리즘을 수행해본 결과, 시작점이 어디든 관계없이 최종해가

<표 5> 초기 실행가능해와 최종해의 시작점별 차이에 대한 대응표본 T-검정

구 분	비교	대응차					t	자유도	유의 확률 (양쪽)
		평균	표준 편차	평균의 표준 오차	차이의 95% 신뢰구간				
					하한	상한			
$f_0(w)$	(a)-(b)	0.0009	0.0014	0.0002	0.0005	0.0013	4.616	49	0.000
	(a)-(c)	-0.0041	0.0047	0.0007	-0.0054	-0.0028	-6.130	49	0.000
	(b)-(c)	-0.0050	0.0050	0.0007	-0.0064	-0.0036	-7.083	49	0.000
$f^*(w)$	(a)-(b)	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.586	49	0.560
	(a)-(c)	0.0000	0.0003	0.0000	-0.0001	0.0001	0.563	49	0.576
	(b)-(c)	0.0000	0.0003	0.0000	-0.0001	0.0001	0.362	49	0.719

〈표 6〉 그룹별 시작점별 반복횟수, 반복과정 구성비 및 CPU의 비교

그룹			# of Iterations			% of $f(w)$ 's iterations			CPU(seconds)		
N	T	#	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
5	260	10	11471	13380	32322	14.6	17.6	17.5	21.2	24.9	48.2
10	260	10	97367	79000	85074	21.5	21.7	21.3	180.1	149.0	132.3
20	260	10	100000	100000	100000	10.9	11.8	13.6	215.5	220.5	182.7
30	260	10	100000	100000	100000	12.4	11.6	13.7	257.6	262.1	223.3
40	260	10	100000	100000	100000	13.7	13.5	14.4	313.6	318.8	281.3
전체		50	81768	78476	83479	14.6	15.2	16.1	197.6	195.1	173.6

서로 차이가 없음을 보이고 있다는 점을 확인하였으며, 이는 우리의 알고리즘이 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오 중에서 최대효율을 주는 포트폴리오의 가중치를 안정적으로 찾을 수 있음을 보여준다는 점에서 고무적이라고 하겠다.

마지막으로 세 종류의 시작점에 대해서 위의 표에서 다른 항목 이외의 특성들을 비교해 보면 <표 6>과 같다. '# of Iterations'는 이 알고리즘의 총 반복횟수를, '% of  $f(w)$ 's iterations'는  $f(w)$  최대화과정의 반복횟수가 전체 반복횟수[ $f(w)$  최대화과정의 반복횟수 +  $g(w)$  최소화과정의 반복횟수]에서 차지하는 비중(%)을, 'CPU(seconds)'는 우리의 알고리즘을 IBM PC [Intel(R) Core(TM) i5-3570 CPU, 3.40 GHz, 8GB RAM, Windows 7 64비트 운영체제]에서 FORTRAN을 이용했을 때의 CPU time(초)을 나타내며, 물론 이 숫자들은 각 그룹별 10개 데이터의 평균을 나타내고 있다. 먼저 반복횟수는 평균적으로 (c)-(a)-(b)순으로 작아지고,  $f(w)$  최대화과정의 반복횟수 비중도 (c)-(b)-(a)순으로 작아지지만 세 시작점에 대한 차이에 큰 의미를 부여할 수는 없으며, CPU time의 경우는 (a)와 (b)는 큰 차이가 없는 것으로 보이나, (c)는 다른 두 경우보다는 작은 것으로 보인다. 그리고 전체적으로 볼 때 반복횟수의 85%가  $g(w)$  최소화과정에 쓰이고 나머지 15%가  $f(w)$  최대화과정에 쓰이고 있는데, 이는 실행가능 영역으로부터 멀리 벗어나지 않도록 하기 위해서 보폭(step size)을 작게 조정하여  $f(w)$ 를 최대화하고 있어서 상대적으로 이 과정에서의 반복횟수가 작아진 데에 기인한 것으로 보

인다.

아울러 최대수익률을 가지는 1차 확률적 지배 포트폴리오의 경우와 비슷하게 최대효율을 가지는 1차 확률적 지배 포트폴리오의 경우에서도, 주식의 수가 증가하더라도 CPU time은 전체적으로 크게 증가하지 않음을 보여주고 있다는 점에서, 최대수익률을 가지는 2차 확률적 지배 포트폴리오를 선형계획법으로 구하는 경우에서와 같이 데이터 숫자의 크기에 영향을 많이 받는 Dentcheva and Ruszczyński[15]의 알고리즘과는 달리 본 논문이 제시한 알고리즘은 데이터 숫자의 크기가 변하더라도 CPU time이 급격히 증가하지 않아서 안정성이 크다고 할 수 있을 것이다.

그리고 최대수익률을 가지는 1차 확률적 지배 포트폴리오의 경우[2]에서는 최대수익률을 모르기 때문에, 최대수익률을 가지는 2차 확률적 지배 포트폴리오의 경우에서 구한 최대수익률이 상한이라는 점을 이용하여 그것을 최대수익률의 추정값으로 사용하기 때문에 자체 알고리즘이 아닌 선형계획법으로 구한 값을 이용한다는 한계점이 있지만, 본 논문에서는 최대효율을 나타내는 목적함수가  $w$ 의 2차 함수라는 점을 이용하여 최댓값을 구할 수 있기 때문에 외부로부터 어떠한 값도 가져오지 않고 알고리즘이 자체적으로 그 값을 계산하여 사용함으로써 알고리즘의 독립성을 강화했다는 장점이 있다고 하겠다.

이상에서 살펴본 바와 같이 본 논문이 제시한 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오의 평균과 분산으로 구성된 효율을 최대로 하는 가중치를 구하는 알고리즘을 실제 주식시장의 데이터에 대해 적용해 본 결과 효율성이 좋은 것으로 나타났다.

## 6. 결론 및 향후 연구방향

이상에서 우리는 확률변수들의 실증분포(empirical distribution)로부터 KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오 중 평균과 분산의 조합으로 이루어진 효용을 최대로 하는 가중치를 구하는 알고리즘을 개발하여, 실제 주식시장의 데이터를 가지고 알고리즘의 효율성을 실험해 보았다. 그 결과 이 알고리즘이 구한 최종해의 효용이 초기 실행가능해의 효용에 비해 많이 좋아지고 있고, 주식의 숫자가 커지더라도 이 알고리즘이 필요로 하는 CPU time이 선형계획법[15]의 경우와 비교해 볼 때 그렇게 크게 증가하지 않으며, 최대 수익률을 가지는 1차 확률적 지배 포트폴리오의 경우에는 외부로부터 최대수익률의 상한값을 가져와야 하지만 이 알고리즘은 필요한 모든 정보를 자체적으로 계산하여 사용한다는 의미 있는 결과를 얻었다.

이 알고리즘은 주식투자 분야에는 물론이고, 확률변수들의 실증분포를 가지고 1차 확률적 지배(통상적인 확률적 지배)를 하는 가중치를 구하고자 하는 곳에도 이 알고리즘이 그대로 적용될 수 있을 것이라는 점에서 그 활용가능성도 기대해 볼 수가 있으며, 1차 확률적 지배는 위험회피성향을 가정하고 있는 2차 확률적 지배와는 달리 위험성향과 무관하게 선호되는 포트폴리오를 구성할 수 있다는 점에서 볼 때 실제 적용가능성을 더 높여준다고 할 수가 있다.

하지만 본 논문의 알고리즘은, 일정한 반복횟수가 지나도 함수값이 개선되지 않으면 보폭을 줄이도록 하는 최대허용 반복횟수 등과 같은 파라미터의 선택에 따라 목적함수값(효용)이 미약하긴 하지만 달라지기 때문에, 최대의 효용을 구하기 위해서는 최선의 파라미터를 찾는 시도를 여러 번 해 봐야 한다는 한계점이 있다.

이 논문의 확장으로서, 알고리즘 측면에서 다양한 자료에 대해서 이 알고리즘을 실험해 보면서 파라미터의 선택 방법 등에 대한 개선을 모색할 필요가 있다. 그리고 본 논문에서는 벤치마크 포트폴리오를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오 중에서 최대 효용을 가지는 포트폴리오의 가중치를 구하였

으나, 제약식의 조건을 바꿔서 벤치마크 포트폴리오의 효용보다 작지 않은 효용을 가지는 포트폴리오 중에서 최대 효용을 가지는 포트폴리오의 가중치를 구하는 문제에 대해서도 이 알고리즘을 원용할 수 있는지를 검토할 필요가 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] 김진호, “평균-분산 모형과 평균-VaR 모형 간 최적위험자산배분 전략 비교”, 『재무연구』, 제15권, 제2호(2002), pp.143-172.
- [2] 류춘호, “1차 확률적 지배를 하는 최대수익 포트폴리오 가중치의 탐색에 관한 연구”, 『한국경영과학회지』, 제34권, 제4호(2009), pp.153-163.
- [3] 류춘호, “1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오 가중치의 탐색에 관한 연구”, 『한국경영과학회지』, 제28권, 제1호(2003), pp.25-36.
- [4] 류춘호, “2차 확률적 지배를 하는 가중치의 탐색에 관한 연구: 주식투자의 경우를 중심으로”, 『경영학연구』, 제28권, 제1호(1999), pp.223-239.
- [5] 류춘호, 신성환, “최적 포트폴리오 구성에 관한 연구”, 『경영연구』, 홍익대학교 경영연구소, 제22권(1997), pp.363-378.
- [6] 박강희, 신현정, “포트폴리오 최적화와 주가예측을 이용한 투자 모형”, 『대한산업공학회지』, 제39권, 제6호(2013), pp.535-545.
- [7] 박경찬, 정중빈, 김성문, “지수가중 이동평균법과 결합된 마코위츠 포트폴리오 선정 모형 기반 투자 프레임워크 개발: 글로벌 금융위기 상황 하 한국 주식시장을 중심으로”, 『한국경영과학회지』, 제38권, 제2호(2013), pp.75-93.
- [8] 변진호, 최문섭, “사례연구: 해외 프로젝트 파이낸스 투자 사례와 실물옵션기반 투자 의사결정”, 『대한산업공학회지』, 제39권, 제5호(2013), pp.429-439.
- [9] 전훈, 이학연, “DEA 기반 온라인 게임 성과 관리 포트폴리오 모형”, 『대한산업공학회지』, 제39권, 제4호(2013), pp.260-270.

- [10] 최재호, 정종빈, 김성문, “마코위츠 포트폴리오 선정 모형을 기반으로 한 투자 알고리즘 개발 및 성과평가 : 미국 및 홍콩 주식시장을 중심으로,” 『경영과학』, 제30권, 제1호(2013), pp.73-89.
- [11] Bodie, Z., A. Kane, and A.J. Marcus, *Investments*, the 9th ed., Irwin/McGraw Hill, 2010.
- [12] Bulmus, T. and S. Ozekici, “Portfolio Selection with Hyperexponential Utility Functions,” *OR Spectrum*, Vol.36, No.1(2014), pp.73-93.
- [13] Canakolu, E. and S. Ozekici, “Portfolio Selection in Stochastic Markets with Exponential Utility Functions,” *Annals of Operations Research*, Vol.166, No.1(2009), pp.281-297.
- [14] Carrion, M., U. Gotzes, and R. Schultz, “Risk Aversion for an Electricity Retailer with Second-order Stochastic Dominance Constraints,” *Computational Management Science*, Vol.6, No.2(2009), pp.233-250.
- [15] Castellano, R. and R. Cerqueti, “Roots and Effects of Financial Misperception in a Stochastic Dominance Framework,” *Qual Quant*, Vol.47(2013), pp.3371-3389.
- [16] Dentcheva, D. and A. Ruszczyński, “Optimality and Duality Theory for Stochastic Optimization Problems with Nonlinear Dominance Constraints,” *Mathematical Programming*, Vol.99, No.2(2004), pp.329-350.
- [17] Dentcheva, D. and A. Ruszczyński, “Optimization with Stochastic Dominance Constraints,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol.14, No.2(2003), pp.548-566.
- [18] Falk, C.L. and D.S. Tilley, “Packing Facility Management : Stochastic Dominance Analysis of Cost Allocation and Revenue Distribution,” *Agribusiness*, Vol.6, No.4(1990), pp.355-369.
- [19] Gordon, D., “The Role of Stochastic Dominance in Determining Discount Rates in Tort Cases,” *The Journal of Business and Economic Research*, Vol.8, No.3(2010), pp.131-135.
- [20] Gotoh, J. and H. Konno, “Third Degree Stochastic Dominance and Mean-Risk Analysis,” *Management Science*, Vol.46, No.2 (2000), pp.289-301.
- [21] Huang, C. and R. H. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc., 1988.
- [22] Kuosmanen, T., “Efficient Diversification According To Stochastic Dominance Criteria,” *Management Science*, Vol.50(2004), pp.1390-1406.
- [23] Leshno, M. and H. Levy, “Stochastic Dominance and Medical Decision Making,” *Health Care Management Science*, Vol.7(2004), pp.207-215.
- [24] Levy, H., “Stochastic Dominance and Expected Utility : Survey and Analysis,” *Management Science*, Vol.38, No.4(1992), pp.555-591.
- [25] Markowitz, H., “Portfolio Selection,” *The Journal of Finance*, Vol.7(1952), pp.77-91.
- [26] Mathews, T., “Portfolio Selection with Quadratic Utility Revisited,” *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, Vol.29(2004), pp.137-144.
- [27] Matsumoto, K., “Optimal Portfolio of Low Liquid Assets with a Log-utility Function,” *Finance and Stochastics*, Vol.10(2006), pp.121-145.
- [28] McNamara, J.R., “Portfolio Selection Using Stochastic Dominance Criteria,” *Decision Sciences*, Vol.29, No.4(1998), pp.785-801.
- [29] Meyer, T.O., X.-M. Li, and L.C. Rose, “Comparing Mean-Variance Test with Stochastic Dominance Tests When Assessing International Portfolio Diversification Benefits,” *Financial Services Review*, Vol.14(2005), pp.149-168.
- [30] Minoux, M., *Mathematical Programming :*

- Theory and Algorithms*, New York, NY, John Wiley & Sons, Ltd., 1986.
- [31] Noyan, N. and A. Ruszczyński, “Valid Inequalities and Restrictions for Stochastic Programming Problems with First Order Stochastic Dominance Constraints,” *Mathematical Programming*, Vol.114, No.2(2008), pp.249-275.
- [32] Ogryczak, W. and A. Ruszczyński, “Dual Stochastic Dominance and Related Mean-Risk Models,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol.13, No.1(2002), pp.60-78.
- [33] Patindol, R.A., C.D. Predo, and R.G. de Guzman, “Risk-efficient Planting Schedules for Corn in Matalom, Leyte, Philippines,” *Philippine Journal of Development*, Vol.36, No.1(2009), pp.65-84.
- [34] Ruszczyński, A. and R.J. Vanderbei, “Frontiers of Stochastically Nondominated Portfolios,” *Econometrica*, Vol.71, No.4(2003), pp.1287-1297.
- [35] Tao, M., “The Stochastic Dominance Efficiency of the Mean-Variance Frontier,” the master thesis, Concordia University, 2006.
- [36] Wilson, W., C. Gustafson, and B. Dahl, “Crop Insurance in Malting Barley : A Stochastic Dominance Analysis,” *Agricultural Finance Review*, Vol.69, No.1(2009), pp.98-112.