

# 복합소재 적층구조 이론 (II)

-일차전단변형 판이론-

## Theory of Laminated Composite Structures (II)

-First Shear Deformation Plate Theory-



김규동 (Gyu-Dong Kim) 학생회원 | 안동대학교 토목공학과 박사과정 | kkd1514@naver.com

이상열 (Sang-Youl Lee) 이사 | 안동대학교 토목공학과 교수 | lsy@anu.ac.kr

### 1. 서론

전 호에서 기술한 바와 같이 복합소재를 적용한 적층 구조의 이론은 크게 고전적 이론 (CLT: Classical Laminated Theory), 일차전단변형 이론 (FSDT: First Shear Deformation Theory), 그리고 고차항 이론 (HST: Higher-order Shear Deformation theory)로 나눌 수 있다. 지난기사에서는 고전적 이론을 소개하고 요약 정리하였다. 본 기사에서는 Reddy의 일차전단변형 판 이론을 소개하고 정적 해석 예를 통하여 고전적 판이론과의 차이점을 분석하여 검증하기로 한다.

### 2. 복합 적층 기본 개념

일차전단변형 판이론은 그림 1에서 보는바와 같이 중립축에서의 휨 변형에 의한 추가 전단변형의 선형(1차항)이 고려되어 총 5개의 독립된 자유도가 존재하게 된다 (식 (1) 참조). 고전적 판이론 (CLPT)에서는 이 부분을 고려하지 않는다. 상용프로그램을 비롯한 대부분의 해석에 적용되고 있으나, 5/6라는 전단보정계수의 사용으로 오차가 발생하는 경우가 종종 발생한다.

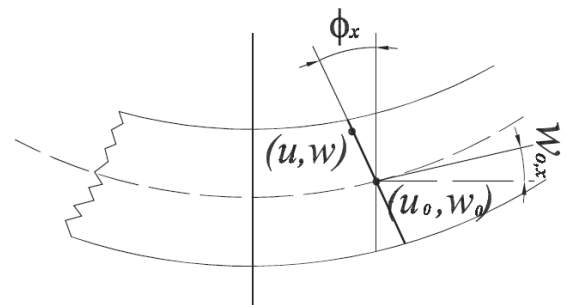


그림 1 1차 전단변형 이론(FSDT)

Reddy의 일차전단변형 판이론은 다음 식과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \quad (1)$$

1차항 판 이론에 기반하여 단면력과 변형률과의 관계를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_x \\ Q_y \end{cases} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases} \quad (2)$$

여기서,  $\{N\}, \{M\}$ , 그리고  $\{Q\}$ 는 면내력, 모멘트, 그리고 전단력을,  $K_s$ 는 1차 전단변형 판이론에서 가정된 전단보정계수를 각각 의미한다. 식 (2)를 Euler-Lagrange 방정식에 대입하면 다음과 같은 5개의 자유도에 대한 평형방정식을 유도할 수 있다.

### 3. FSDT에 대한 Navier 해법

Navier의 해법을 적용하여 일차전단변형 판이론에 기반한 적층판의 처짐을 구하는 과정을 소개한다. 그림 2와 같은 4변 단순지지인 비대칭 적층된 앵글-플라이 판구조에 대한 처짐을 구하는 Navier 해는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] - \left( \frac{\partial N_{xx}^T}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] - \left( \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^T}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ KA_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) + KA_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ KA_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + KA_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] + \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 \hat{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{16} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] - \left[ KA_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) + KA_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] - \left( \frac{\partial M_{xx}^T}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^T}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{26} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] - \left[ KA_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) + KA_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] - \left( \frac{\partial M_{xy}^T}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^T}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

〈경계조건 산정〉

$$\begin{aligned}
 &u_0(0, y, t) = 0, \quad u_0(a, y, t) = 0, \quad v_0(x, 0, t) = 0, \quad v_0(x, b, t) = 0 \\
 &w_0(x, 0, t) = 0, \quad w_0(x, b, t) = 0, \quad w_0(0, y, t) = 0, \quad w_0(a, y, t) = 0 \\
 &\phi_x(x, 0, t) = 0, \quad \phi_x(x, b, t) = 0, \quad \phi_y(0, y, t) = 0, \quad \phi_y(a, y, t) = 0 \\
 &N_{xy}(0, y, t) = 0, \quad N_{xy}(a, y, t) = 0, \quad N_{xy}(x, 0, t) = 0, \quad N_{xy}(x, b, t) = 0 \\
 &M_{xy}(0, y, t) = 0, \quad M_{xx}(a, y, t) = 0, \quad M_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad M_{yy}(x, b, t) = 0 \\
 &\text{at } x=0 \text{ and } x=a, \quad u_0 = w_0 = \phi_y = 0, \quad N_{xy} = M_{xx} = 0 \\
 &\text{at } y=0 \text{ and } y=b, \quad v_0 = w_0 = \phi_x = 0, \quad N_{xy} = M_{yy} = 0
 \end{aligned}$$

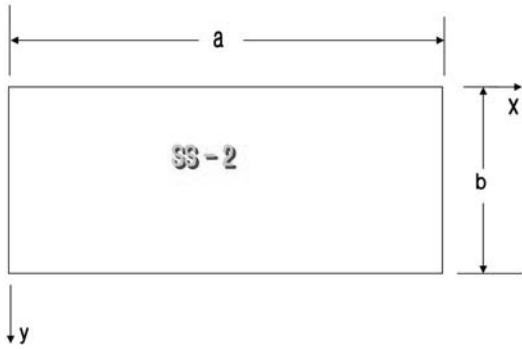


그림 2 단순지지 경계조건을 갖는 적층판 모델

Navier 해는 다음과 같이 가정으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \quad (8) \\
 \phi_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\
 \phi_y(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned}$$

여기서,  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ 이다. 식 (8)을 식 (3)~(7)에 대입하여 매트릭스로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & 0 & \hat{s}_{14} & \hat{s}_{15} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} & 0 & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{25} \\ 0 & 0 & \hat{s}_{33} + \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{35} \\ \hat{s}_{14} & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{44} & \hat{s}_{45} \\ \hat{s}_{15} & \hat{s}_{25} & \hat{s}_{35} & \hat{s}_{45} & \hat{s}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{m}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{m}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\beta N_{mn}^6 \\ -\alpha N_{mn}^6 \\ 0 \\ -\alpha M_{mn}^1 \\ -\beta M_{mn}^2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서,  $\hat{s}_{ij}$  와  $\hat{m}_{ij}$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_{11} &= (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad \hat{s}_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
 \hat{s}_{13} &= 0, \quad \hat{s}_{14} = 2B_{16}\alpha\beta, \quad \hat{s}_{15} = (B_{16}\alpha^2 + B_{26}\beta^2) \\
 \hat{s}_{22} &= (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad \hat{s}_{23} = 0 \\
 \hat{s}_{24} &= \hat{s}_{15}, \quad \hat{s}_{25} = 2B_{26}\alpha\beta \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_{33} &= K(A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2), \quad \hat{s}_{34} = KA_{55}\alpha \\
 \hat{s}_{35} &= KA_{44}\beta, \quad \hat{s}_{44} = (D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + KA_{55}) \\
 \hat{s}_{45} &= (D_{12} + D_{66})\alpha\beta, \quad \hat{s}_{55} = (D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + KA_{44})
 \end{aligned}$$

식 (9)의 역행렬을 구하면 5개 미지 자유도에 대한 값을 산출할 수 있다.

#### 4. 해석 예제

본 기술기사에서는 전술한 Navier의 해를 적용하여 적층판의 처짐 해석에 대한 2가지 예제를 통하여 고전적 판이론과 일차전단변형 판이론에 의한 결과를 비교하기로 한다.

〈예제 1: 샌드위치 적층형태〉

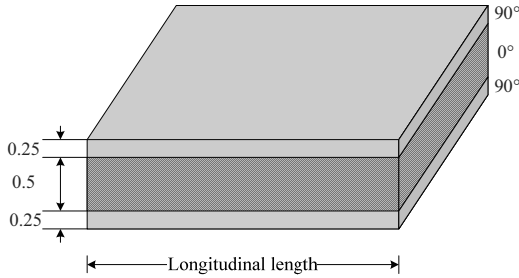


그림 3 예제 1에 대한 해석 모델

그림 3의 모델에 대한 사용재료는 다음과 같다.

$$E_1 = 100GPa, \quad E_2 = E_1 / 4,$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.5E_T, \quad \nu_{12} = 0.25$$

여기서,  $E_1$ 과  $E_2$ 는 종방향과 횡방향 탄성계수이며,  $G_{12}$ 와  $G_{13}$ 는 전단탄성계수,  $\nu_{12}$ 는 프와송비를 의미한다. 적층판은 [90/0/90]으로 샌드위치로 적층된 형태이다.

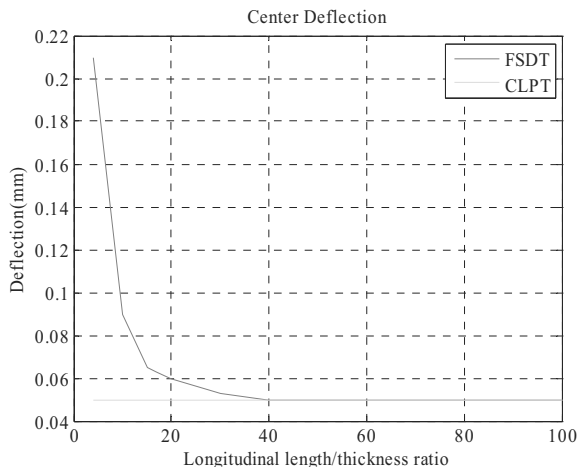


그림 4 길이-두께비 변화에 대한 CLPT와 FSDT의 중앙처짐 결과 비교

그림 4는 길이-두께비 변화에 대한 CLPT와 FSDT의 중앙 처짐 결과를 비교한 것이다. 길이-두께비가 39이 후부터는 두 이론에 의한 처짐결과는 차이가 거의 없으

나, 길이두께비가 그이하인 경우에는 차이가 증가하고 있음을 보여준다. 특히 20이하 부터는 큰 차이를 보이고 있으며, 이는 판의 두께가 두꺼워질수록 두 이론에 의한 차이가 크게 발생함을 의미한다.

〈예제 2: 비대칭 앵글-플라이〉

Material 2

$$E_1 = 200GPa, \quad E_2 = E_1 / 4,$$

$$G_2 = G_3 = 0.5E_T, \quad \nu_{12} = 0.25$$

여기서 판의 두께는 1이며, 그림 5에서 보는 바와 같이 비대칭으로 적층된 모델이다.

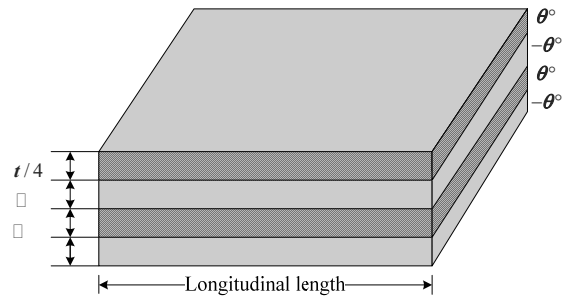


그림 5 예제 2에 대한 해석 모델

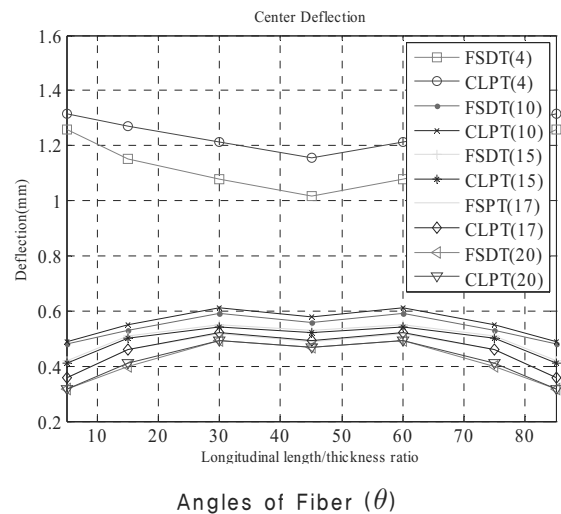


그림 6 보강각도 변화에 대한 CLPT와 FSDT의 중앙 처짐 결과 비교

그림 6은 보강각도 변화에 대한 CLPT와 FSDT의 중앙 처짐 결과 비교한 것이다. 그림에서 ( )는 길이-두께비를 의미한다. 그림에서 보는 바와 같이 판의 두께가 두꺼워질수록 두 이론에 의한 차이는 보강각도의 변화와 관계없이 큰 것으로 나타났다. 그러나 보강각도와 길이-두께비의 변화가 복합적으로 중앙 처짐에 영향을 미치고 있음에 유의해야 한다.

### 〈예제 3: 비대칭 크로스-플라이 적층 형태〉

사용재료는 예제 2와 동일하며, 그림 7과 같이 크로스 플라이 (90/-90/90/-90) 적층에 대하여 두 이론에 의한 중앙처짐을 비교하였다. 그림에서 보는 바와 같이 길이-두께비가 20이후부터는 두 이론에 의한 처짐결과는 차이가 거의 없으나, 길이두께비가 그 이하인 경우에는 차이가 증가하고 있음을 보여준다. 특히 10이하부터는 큰 차이를 보이고 있으며, 이는 판의 두께가 두꺼워질수록 두 이론에 의한 차이가 크게 발생함을 의미한다. 이러한 두 이론에 의한 결과 차이는 예제 1의 샌드위치 형태보다 더 큰 것으로 나타났다.

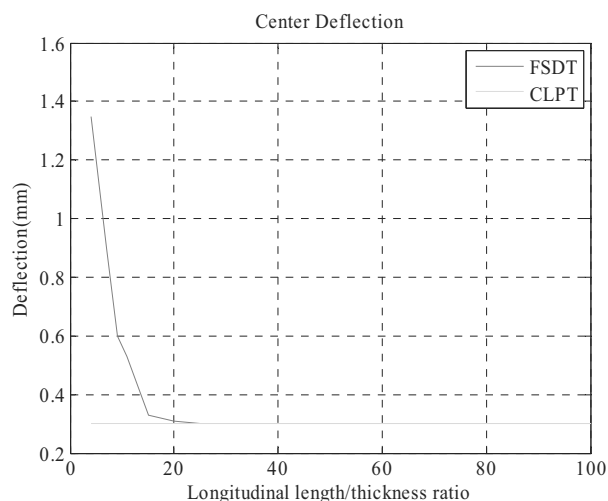


그림 7 길이-두께비 변화에 대한 CLPT와 FSDT의 중앙처짐 결과 비교 (크로스 플라이 적층)

## 5. 요약 및 결론

본 기사에서는 전 호에 이어서 복합소재 적층구조 이론 중에서 Reddy의 일차전단변형 판이론을 중심으로 상세하게 소개하였다. 일차전단변형 판이론은 중립축에서의 휨 변형에 의한 추가 전단변형에 대한 추가 자유도가 고려되어 고전적 판이론보다 판의 두께 변화에 따른 정확한 해석값을 제공한다. 따라서, 상용프로그램을 비롯한 대부분의 해석에 적용하고 있는 이론이다.

본 기사에서는 몇가지 해석 예를 통하여 고전적 판이론에 의한 결과와 비교하였다. 판의 두께가 두꺼워질수록 두 이론에 의한 차이가 증가함을 확인할 수 있다. 적층 각도와 의 복합적인 영향과 함께 판의 재료 및 기하학적 형상에 따라 두 이론의 차이는 변화하게 되므로, 정확한 구조 해석을 위해서는 일차전단변형 판이론의 적용이 필수적임을 알 수 있다. 그러나 일차전단변형 이론의 경우 5/6라는 전단보정계수의 사용으로 오차가 발생하는 경우가 종종 발생한다. 다음호에는 고차전단변형 이론(TSDT)을 중심으로 기존 이론과 비교하여 특징을 기술하고자 한다.

### 참고문헌

1. Jones, R.M. (1998) *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis, PA.
2. Timoshenko SP, Krieger SW. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill; 1984.
3. Reddy JN. (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. New York: CRC Press.