한국초등수학교육학회지 *18*(2) 319-339. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *18*(2) 319-339.
2014. 08. 31 *August 31. 2014.*

초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰[1)]

강흥규[2)]

최근의 우리나라 교육과정 문서 안에는 분수의 포함제와 등분제에 관한 논의가 증가하고 있다. 포함제와 등분제 두 가지 모두 성립이 불가능하다는 주장에서부터 두 가지 모두 성립이 가능하다는 주장까지 다양한 의견이 제시되고 있다. 이 논문에서는 분수 나눗셈에서 포함제와 등분제 정의의 성립 가능성에 대해서 탐색하였다. 그 결과, 분수 나눗셈에서의 포함제와 등분제는 자연수의 그것을 적절히 확장시킴으로써 타당하게 정의될 수 있음이 드러났다. 나아가 이렇게 정의된 분수의 포함제와 등분제는, 문장제로부터 나눗셈식을 만들어내는 활동, 분수 나눗셈의 알고리즘을 증명하는 활동에서 효과적으로 활용될 수 있다.

주제어: 분수의 포함제와 등분제, 측정, 비(比), 이산량, 연속량

Ⅰ. 서 론

최근 들어, 포함제와 등분제는 초등수학 교육과정에서 논의가 크게 증가된 소재중의 하나이다. 제 7차 교육과정 수학과 해설서와 교사용 지도서, 2007 개정 교육과정 수학과 해설서와 교사용 지도서, 초등교사 임용고사(한국교육과정평가원, 2011, 2014), 2009 개정 교육과정 교사용 해설서가 그것이다. 그러나 포함제와 등분제의 정확한 정의가 무엇인가에 관해서는 여러 혼동과 모호함이 존재한다. 우선, 자연수에서의 포함제와 등분제 정의의 타당성에 관한 논쟁이 있다(강문봉, 2011). 분수의 경우는 상황이 더 복잡한데, 분수에서는 포함제만 성립하고 등분제는 성립하지 않는다는 주장이 있는 반면(교육인적자원부, 2008b; 교육과학기술부, 2011b; 배종수, 2008), 등분제는 물론 포함제도 성립할 수 없다는 주장도 있으며(한국과학창의재단, 2011; 한국교육과정평가원, 2014), 정의하기에 따라서는 등분제가 성립할 수 있다는 주장도 있다(임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원 외, 2010; 이영주, 이광호, 이효진, 2012).

초등수학교육이나 초등교사교육의 측면에서 볼 때 이러한 혼란스러운 상황이 바람직스럽지 않은 것은 당연하다. 특히 분수 등분제 관련 내용이 초등교사 임용고사에 여러 차례 출제되는 상황에서는 더욱 그러하다(한국교육과정평가원, 2011, 2014). 이와 같은 난맥상은 초등수학교육 연구자 사이에서 포함제와 등분제에 관한 통일된 정의가 수립되어 있지 못

1) 이 논문은 2013년 공주교육대학교 자유연구과제 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 공주교육대학교 수학교육과

한 것에 기인한다. 교육과정 문서 각각의 저자마다 포함제와 등분제에 관한 서로 다른 정의를 마음에 품고 있다. 이 논문에서는 먼저, 자연수 범위에서 포함제와 등분제의 정확한 정의를 수립하고, 다음으로 자연수와 분수를 아우르는 포괄적인 차원에서 포함제와 등분제의 정의에 관한 논의를 체계적으로 정리함으로써, 분수에서의 등분제의 성립 가능성에 대해서 모색할 것이며, 이를 토대로 분수 지도와 관련된 몇몇 교육적 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅱ. 자연수에서 포함제와 등분제의 정의

얼핏 보기에 자연수에서 포함제와 등분제를 명확히 정의하는 것은 어렵지 않을 것으로 여겨진다. 하지만, 실제로 정의를 내리다 보면 예상했던 것보다는 사용되는 용어가 다양하고 모호한 성격이 강하다는 것을 깨닫게 된다. 이 장에서는 수학교육관련 여러 문서에 등장하는 자연수의 포함제와 등분제에 관한 여러 정의를 종합적으로 검토하여 유형별로 분류하고 각각의 특징을 분석하는 것이다. 먼저 최근의 우리나라 교육과정 도서에서 가장 널리 채용되고 있는 정의부터 살펴보자.

1. ‘포함’과 ‘등분’이라는 글자 그대로의 의미를 강조한 정의

제 7차 교육과정 수학과 해설서와 2007년 개정 교육과정 수학과 해설서에서는 포함제와 등분제를 다음과 같이 말하고 있다.

> 생활 장면에서 나눗셈이 이루어지는 경우는, 포함제와 등분제로 구분할 수 있다. 포함제는 기준이 되는 양으로 어떤 양을 측정하였을 때 ‘기준이 되는 양이 몇 번 포함되는지를 구하는 경우’이고, 등분제는 ‘어떤 양을 몇으로 똑같이 나누었을 때 한 몫의 크기’를 구하는 경우이다. 포함제와 등분제는 서로 다른 의미를 가지고 있지만, 계산이라는 측면에서 같은 나눗셈으로 통합된다(교육인적자원부, 1999, p.54; 교육과학기술부, 2009, p.86).

여기서 핵심이 되는 표현은 ‘몇 번 포함되는가’와 ‘똑같이 나누었을 때 한 몫의 크기’이다. 이 표현은 이후 여러 문서에서 지속적으로 사용된다. 다음은 제 7차 교육과정 수학과 교사용 지도서의 내용이다.

> 구체물을 통하여 같은 양이 ‘몇 번 들어 있는지’ 알 수 있다.
> 8에는 2가 ‘몇 번 들어있는지’의 의미와 8을 2로 ‘나누면 한 부분의 크기가 얼마인지’의 의미가 있다(교육인적자원부, 2008a, p.138).

이와 같은 내용을 요약하면 자연수의 포함제와 등분제를 다음과 같은 정의를 얻을 수 있다.

정의 A
포함제: 기준이 되는 양이 '몇 번 들어있는가'(포함)를 구하는 것 등분제: '몇으로 똑같이 나누었을 때'(등분) 한 몫(부분)의 크기를 구하는 것

박성택, 신택균, 양인환, 손용규, 이정재(1993, p.118-119)도 이와 유사하게 정의하고 있다.

> 등분제는 a를 b등분하면 그 하나치는 얼마나 되는가를 알아보는 나눗셈
> 포함제는 a에는 b가 몇 번 포함되어 있는가를 알아보는 나눗셈

최근의 2009 개정 교육과정 교사용 지도서에 나오는 다음 정의도 위의 정의 A와 유사한 것으로 볼 수 있다.

> 똑같이 나누어 주는 나눗셈을 이해할 수 있다. 구체물 조작활동을 통하여 수를 똑같이 나누어 한 부분의 크기를 알 수 있다.
> 같은 양이 몇 번 들어 있는 나눗셈을 이해할 수 있다. 구체물 조작활동을 통하여 수를 똑같이 나누는 횟수를 알 수 있다(교육부, 2014, p.230-232)

정의 A는 최근의 여러 교육과정 문서와 교과용 도서에서 가장 널리 사용되고 있는 정의로서, '포함(들어있음)'과 '등분(똑같이 나눔)'의 표현이 핵심을 이룬다. 이 정의의 제한점으로는, 제수와 결과값을 지칭하는 용어가 모호하거나 지나치게 다양하다는 점을 지적할 수 있다. 나눗셈 결과값을 지칭함에 있어서 포함제의 경우는 '번'과 '횟수'가 대부분 사용되지만, 등분제의 경우는 '한 몫의 크기', '한 부분의 크기', '하나치가 얼마인가' 등으로 다양하다. 특히 등분제에서의 제수를 지칭하는 특별한 용어가 없다는 점도 큰 특징이다. 예를 들어 사과12개÷4를 진술할 경우, 사과 12개를 '4로 나눈다'고 할 뿐, '4모둠'으로 나눈다던지, '4부분'으로 나눈다고 진술하지 않는다. 다음 절에서 다룰 정의 B에서는 이 문제점은 개선되었다. 다음 정의를 살펴보자.

2. 동누누감을 통한 정의

2007 개정 교사용 지도서에서는 나눗셈을 다음과 같이 둘로 구분하고 있다.

> 동수누감 나눗셈: 같은 수를 반복해서 뺄 때 몇 번 뺄 수 있는가?
> 6÷2=3 → 6에서 2씩 묶어 덜어내면 3번 뺄 수 있다.
> 등분 나눗셈: 여러 곳으로 똑같이 나누면 한곳에 몇 개씩인가?
> 6÷2=3 → 6을 2곳으로 똑같게 나누면 한 곳에 3개씩이다(교육과학기술부, 2011a, p.188).

이 관점의 핵심은 포함제와 등분제의 구분하는 기준을 동수누감 즉 뺄셈에서 찾았다는 점에 있다. 이 견해에 따르면, 포함제는 동수누감으로 수행이 가능하지만 등분제는 그렇지 못하며, 따라서 동수누감 나눗셈을 포함제와 같은 나눗셈으로 보면서, 종전까지의 포함제

와 등분제라고 구분하는 대신 동수누감 나눗셈과 등분 나눗셈으로 새롭게 구분하였다.[3]

이 관점에서 주장하는 포함제와 등분제의 정의는 다음과 같이 요약할 수 있다.

정의 B
동수누감 나눗셈(포함제): 같은 수를 몇 번 빼낼 수 있는가? 등분 나눗셈: 여러 곳으로 똑같이 나누면 한 곳에 몇 개인가?

그러나 강문봉(2011)은 나눗셈을 수행하는 아동의 심리학적 과정의 분석을 통하여 포함제뿐만 아니라 등분제도 동수누감으로 수행가능하다는 것을 드러냄으로써, 정의 B는 불합리한 것이라고 주장한다. 예를 들어 사과 12개를 4개의 모둠으로 나누어 한 모둠의 크기를 구하는 등분제 나눗셈 상황을 생각해보자. 먼저 12에서 4을 빼서(12-4) 각 모둠에 한 개씩 분배하고, 다음으로 또 4를 빼서(12-4-4) 각 모둠에 한 개씩 분배하고, 마지막으로 또 4을 빼서(12-4-4-4) 각 모둠에 한 개씩 분배한다. 그러면 각 모둠에는 사과가 모두 3개씩 분배되었다. 이 과정은 동수누감을 통해서 등분제를 수행한 과정이다.

동수누감으로 포함제와 등분제를 구분 짓는 것이 부적절한 또 다른 이유가 있다. 동수누감은 나눗셈 개념의 초보적인 것으로서 완전한 나눗셈 개념은 아니다. 이는 마치 동수누가가 곱셈 개념의 초보인 것과 마찬가지이다. 곱셈과 나눗셈의 완전한 발달, 덧셈이나 뺄셈과는 다르게 곱셈과 나눗셈을 그들답게 만들어주는 것은 배(倍) 개념(혹은 비(比) 개념)이다. 곱셈과 나눗셈의 완전한 발달은 배 개념에 있으며, 이 배 개념은 동수누가(덧셈)나 동수누감(뺄셈) 단계와 구별되는 차원의 수 개념으로서, 이전까지의 이산량에 기초한 기수 개념을 넘어선 것이다. 예를 들어 사과4개×3=사과12개에서 사과4개의 4는 기수 개념이지만 3은 배 개념이다. 여기서 나눗셈은 4를 결과값으로 할 수도 있고, 3을 결과값으로 할 수도 있는데, 4와 3의 성격이 크게 다르기 때문에 나눗셈의 성격이 달라진다. 즉 나눗셈이 동수누감을 넘어서 배 개념으로 발전했을 때 비로소 포함제와 등분제의 구분이 생기게 된다.

여기서 다음과 같은 의문이 생길 수 있다. 동수누감에서도 두 가지 나눗셈이 생겨날 수 있지 않은가? 먼저 4를 3번 더해서 12가 되는 동수누가를 생각해보자. 이로부터 나눗셈을 만들면, ‘더하는 수 4’를 구하는 경우와 ‘더하는 횟수 3’을 구하는 두 경우로 나뉘지 않겠는가? 즉 12에서 ‘4를 몇 번 빼낼 수 있는가’를 구하는 나눗셈(포함제)과, 12에서 ‘3번 빼낼 수 있는 수’를 구하는 나눗셈(등분제)이 그것이다. 만약에 동수누감으로 포함제와 등분제를 구분하는 것이 가능하다면, 위와 같은 구분이 타당할 것이며, 유독 포함제만 동수누감으로 정의될 수 있다고 볼 수는 없을 것이다.[4]

포함제는 동수누감이 되지만 등분제는 그렇지 않다는 생각이 Dewey 시대에도 있었던 듯하다. 다음은 그런 생각에 대한 Dewey의 지적이다.

---

3) 동수누감을 기준으로 포함제와 등분제를 구분하는 견해는 외국의 저서에서도 종종 나타난다. Bennett(p.88)에서는 포함제를 측정 혹은 감법적 접근(measurement or subtractive approach), 등분제를 분배 혹은 분할적 접근(sharing or partitive approach)으로 구분한다.

4) 나눗셈을 동수누감으로 정의했을 경우에 이 같은 두 종류의 나눗셈이 생겨나지 않는 이유는, 예를 들어 12에서 ‘4’를 ‘3번’ 빼는 과정에서 4와 3의 성격이, 앞서 말했던 측정에서 단위량과 측정값처럼 확연하게 구분되는 수 개념이 아니기 때문일 것이다.

> 포함제(Division)처럼 등분제(partition)도 뺄셈에 의존한다: 어떤 사람들은 말하기를, 등분제는, 주어진 개수만큼의 서로 동등한 여러 부분량들이 모여서 하나의 전체량을 이룰 때, 그중 한 부분량의 수 값을 구하는 것이고, 하지만 양으로부터 수를 빼는 것은 불가능하므로, 등분제는 나눗셈으로는 해결될 수 없다고 한다. … 등분제주의자들(partitionists)에 따르면, 20feet÷5feet는 실제로 가능한 지적인 조작을 표현하지만 20feet÷5는 '등분'이라는 내재된 조작을 사용할 때만 실제로 가능한 지적인 조작이 되므로, 20feet÷5는 간단히 20feet의 5분의 1로 해결해야 하며, 따라서 4feet 가 된다. … 그러나 그들이 말하는 이 과정에 주의를 기울여 보면, '나눗셈'이 뺄셈의 과정이기 때문에 20feet÷5가 불가능하다면, '등분제'도 똑같이 뺄셈의 과정이기 때문에 20feet의 $\frac{1}{5}$이라는 과정도 또한 불가능하다는 것을 보일 수 있다 (Dewey & McLellan, 1895).

이용률(2001) 또한 등분제와 포함제는 구체적인 조작 자체는 달라 보여도 같은 나눗셈이 적용된다는 것을 지도해야 한다고 주장한다. 박성택 외(1993, p.119)도 제법연산의 지도에서는 포함제냐 등분제냐 하는 것을 지도할 것이 아니라, 구체적인 조작에서 제법의 개념을 바르게 형성시키는 것이 중요하다고 말한다.

3. 측정을 통한 정의

일반적인 측정과정은 전체량, 단위량, 측정값의 삼요소로 이루어진다. 예를 들어 사과 4개를 단위로 하여 사과 12개를 측정하면 측정값은 3이 되며, 이 같은 측정과정은 곱셈 사과4개×3=사과12개로 나타낼 수 있다.[5] 여기서 중요한 것은 승수와 피승수, 즉 단위량과 측정값 사이의 수 개념상의 불일치이다. 사과 4개에서의 4는 ●●●● 와 같이 형상화할 수 있는 기수개념이지만, 3은 ●●●로 형상화할 수 없다. 왜냐하면 3은 사과 4개와 사과 12개 사이의 관계를 나타내는 것, 즉 기수개념을 토대로 하여 그 위에 건설된 것이기 때문이다. 측정값은 배(倍) 혹은 비(比) 개념이다.

자연수의 곱셈에 대한 측정모델에서의 승수와 피승수의 수 개념상의 불일치는, 자연수 나눗셈에서의 피젯수와 제수의 불일치로 이어지고, 그것은 포함제와 등분제라는 두 가지 해석을 유발한다. 포함제는 측정값을 구하는 것이고, 등분제는 단위량을 구하는 것이다. 다음은 측정을 통한 포함제와 등분제의 정의이다.

정의 C
포함제: 전체량과 단위량이 주어지고 측정값을 구하는 것 등분제: 전체량과 측정값이 주어지고 단위량을 구하는 것

이 정의를 앞서의 정의와 구별 짓는 특징은 첫째, 포함제와 등분제에서 구하는 대상이 수 개념적인 차원에서 서로 다르다는 점을 두드러지게 부각시킨다는 점에 있다. 포함제에

5) 사과 1개를 일차단위, 사과 4개를 2차 단위라고 한다. 사과 12개의 일차단위에 의한 측정값은 12이지만, 이차단위에 의한 측정값은 3이다.

서는 피승수와 승수가 같은 성격이고 배 값을 구하는 것이며, 등분제에서는 피승수와 결과값이 같은 성격이고 승수가 다른 성격이다. 앞의 정의 A와 정의 B에서도 비록 이 같은 차이가 내재되어 있기는 하지만, 측정이라는 관점에서 측정량, 단위량, 측정값으로 명시적으로 구별한 것 보다는 덜하다.

둘째 특징은 포함제와 등분제가 정의가 서로 무관한 별개의 형태가 아니라 대칭성을 이루는 짝으로 되어 있다는 점이다. 포함제에서 구하는 것이 등분제에서는 주어져 있고, 등분제서 구하는 것이 포함제에서는 주어져 있다.

일반적으로 측정과정은 연속량에 적용됨으로써 분수 측정값을 갖게 되지만, 이산량에 한정시킨다면, 단위량은 모둠 형태가 되고, 측정값은 자연수가 된다. 이같이 측정모델을 이산량에 한정시킨 것을 묶음모델이라고 한다(강홍규, 2009). 묶음 모델에서 단위량은 ‘모둠의 크기’가 되고 측정값은 ‘모둠의 개수’가 된다. 사과4개×3=사과12개에서 4는 모둠의 크기이고 3은 모둠의 개수이다.

정의C를 묶음모델의 관점으로 축소시켜서 재진술하면 다음과 같이 된다.

정의 C-1

포함제: 여러 개의 물건을 정해진 크기의 모둠으로 묶었을 때, 모둠의 개수를 구하는 것
등분제: 여러 개의 물건을 정해진 개수의 모둠으로 묶었을 때, 한 모둠의 크기를 구하는 것

이 정의가 장점은, 이산량의 측정에 관한 모든 문장제에 적용될 수 있는 일반적인 특징이 있다는 장점이 있다. 하지만, 나눗셈의 해석임에도 불구하고 ‘나눈다’는 용어가 포함되지 않았다는 단점이 있다. 이 단점을 개선하기 위해서 나눈다는 용어를 포함시켜서 다음과 같이 바꿀 수 있다. 이산량에서는 모둠으로 묶는다는 것은 나눈다는 것이고, 나눈다는 것은 결국 여러 모둠으로 묶는 것과 같기 때문이다.

정의 C-2

포함제: 여러 개의 물건을 정해진 크기의 모둠으로 공평하게 나누었을 때, 모둠의 개수를 구하는 것
등분제: 여러 개의 물건을 정해진 개수의 모둠으로 공평하게 나누었을 때, 한 모둠의 크기를 구하는 것

교육과정 문서 중에서 이 정의와 가장 유사한 것을 사용하고 있는 문서는 2009개정 교육과정 수학과 교사용 지도서이다. 그곳의 내용은 다음과 같다.

> 등분제는 주어진 대상을 몇 묶음으로 똑같이 나누었을 때 한 묶음의 크기가 얼마인지를 묻는 상황이다. 포함제란 주어진 양을 일정한 단위로 묶으면 몇 묶음이나 되는지, 몇 묶음이 포함되는지, 묶음의 수를 묻는 상황이다(교육부, 2014, p.223).

이 정의는 위의 정의 C-1과 정의 C-2가 섞여 있는 형태이며, 모둠이 아닌 묶음이라는 용어를 사용했기 때문에 명료성에서 정의 C-2에 미치지 못한다. 이 정의는 '나눈다'는 용어를 포함시켰다는 장점이 있다. 사소한 것 같지만 '나누는 조작'과 '묶는 조작'은 큰 차이가 있다. 이산량에서는 나누는 것이 묶는 것이고 묶는 것이 나누는 것이지만, 연속량에서는 그렇지 않다. 나누는 조작은 연속량에까지 적용가능하고, 따라서 분수 영역까지 확대 적용될 가능성이 열려있다. 정의 C-2를 분수 영역으로 확장시키는 문제에 관해서는 다음 장에서 고찰하였다.

Ⅲ. 분수에서의 포함제와 등분제의 정의

지금까지는 자연수에서의 포함제와 등분제의 정의에 관하여 논의하였다. 그럼 분수의 나눗셈에서는 어떻게 될 것인가? 분수에서는 포함제와 등분제 둘 모두가 성립이 불가능하다는 주장에서부터, 포함제는 가능하지만 등분제는 불가능하다는 주장, 그리고 적절히 정의를 변경하면 등분제도 가능하다는 주장까지 다양하다. 이 장에서는 앞에서 다룬 자연수에서의 포함제와 등분제의 정의를 어떻게 분수 영역으로 확장시킬 수 있는지에 대해서 고찰하고자 한다.

1. 정의 A에 따른 분수의 포함제와 등분제의 정의

정의 A에 따르면, 포함제는 '기준이 되는 양이 몇 번 들어가는가'를 구하는 것이고 등분제는 '몇으로 똑같이 나누었을 때 한 몫(부분)의 크기를 구하는 것'이었다. 이 정의를 바탕으로 제 7차 교육과정 수학과 교사용 지도서에서는 다음과 같이 말하고 있다.

> 자연수의 나눗셈은 포함제와 등분제를 생각할 수 있다. 그러나 분수의 나눗셈에서는 포함제와 등분제를 동시에 생각할 수 없다. $\frac{7}{8} \div \frac{3}{8}$과 같이 나누는 수가 분수인 경우에는 등분제를 생각할 수 없다. 즉 $\frac{7}{8}$을 $\frac{3}{8}$으로 똑같이 나누는 상황을 생각할 수 없기 때문이다. 그러므로 $\frac{7}{8} \div \frac{3}{8}$의 경우에는 포함제만 생각하여야 한다(교육인적자원부, 2008b, p.69).

이 진술의 첫째 요지는 자연수에서의 포함제 개념은 분수로 확장 가능하다는 것이다. 그 근거는 아마도 $\frac{7}{8}$안에 $\frac{3}{8}$이 몇 번 들어가는가를 따질 수 있다고 보기 때문인 것 같다. 그러나 그것은 실제로는 잘되지 않는다. 우선 $\frac{7}{8}$안에는 $\frac{3}{8}$이 2번 들어가고 $\frac{1}{8}$이 남게 되고, 이렇게 남은 $\frac{1}{8}$안에 $\frac{3}{8}$이 몇 번 들어가는가를 재차 따져야 하는데, 이것은 '작은 것 안에 큰 것이 몇 번 들어가는가를 따지는 것이므로' 부조리하게 된다. 처음에는 승수가 피승수보다 작은 유형에서부터 출발한다 하더라도, 자투리가 생길 경우 승수가 더 커지므로, 몇 번 들어가는가를 따지는 것이 무의미해지게 된다.

둘째 요지는 분수에서의 등분제가 성립할 수 없으며, 그 이유는 '$\frac{3}{8}$으로 똑같이 나누는 것' 이 불가능하기 때문이다. 실제로, 자연수의 경우 2로 나누거나 3으로 나누는 것을 2모둠 혹은 3모둠으로 나누는 것으로 이해 가능하지만, $\frac{3}{8}$으로 나누는 것은 '$\frac{3}{8}$모둠으로 나누는 것' 으로 의미부여가 불가능하다.

분수에서는 포함제와 등분제 모두가 불가능하다는 주장은 2014 초등교사 임용고사에서 다루어졌다[그림 1].

8. (가)는 분수 나눗셈에 대한 학생들의 대화 내용이고, (나)는 (가)의 은정의 질문에 대한 두 예비교사의 대화이다. [3점]

(가)

주원 : 분수 나눗셈의 계산 원리를 모르겠어. $\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$는 $\frac{4}{5}$의 역수인 $\frac{5}{4}$를 $\frac{3}{7}$에 곱해서 $\frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$로 계산하는 거잖아. 그런데 왜 나누는 수의 역수를 곱하는 거지?

은정 : 두 분수의 분모를 같게 해보면 알 수 있어.

성호 : ㉠ 곱셈과 나눗셈의 관계를 생각해도 알 수 있어. $\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \square$ 라고 하면 ……

은정 : 그것도 좋은 생각이네. 그런데 난 이 분수 나눗셈의 답이 이해되지 않아. ㉡ 나누었는데, 나누어지는 수인 $\frac{3}{7}$보다 더 큰 $\frac{15}{28}$가 어떻게 답이 될 수 있어?

(나)

예비교사 A : 은정의 질문(㉡)에 실생활 예를 사용하여 답해 주면 좋을 것 같아. 나눗셈을 설명하는 방법에는 '포함제'와 '등분제'가 있으니 그 예를 찾아볼까?

예비교사 B : ㉢ 분수 나눗셈에는 '등분제'가 적절하지 않아. 그리고 ㉣ 이 문제에는 '포함제'도 적절하지 않아. 그 이유는 ……

예비교사 A : 그렇구나. 그럼 '비(ratio)' 개념을 이용해볼까?

1) ㉠에서 성호의 설명을 완성하시오. [1점]

• __________

2) ㉢과 ㉣의 이유를 각각 쓰시오. [2점]

• ㉢의 이유 : __________

• ㉣의 이유 : __________

[그림 1] 2014 초등교사 임용고사 수학 문항

이 주장에 따르면 등분제가 분수에서 성립하지 않는 핵심 원인은 무엇인가? 그것은 '$\frac{4}{5}$번' 이나 '$\frac{4}{5}$모둠' 과 같은 표현이 무의미하기 때문이다. 그 이유는 '~번' 이나 '~모둠' 은 자연수에만 적용될 수 있는, 더 이산 분할이 불가능한 이산량 단위이기 때문이다. 그렇다면 이것을 분수에 적용 가능한 단위, 즉 '$\frac{4}{5}$배' 나 '$\frac{4}{5}$m' 로 등과 같이 분수에 적합한 단위로 바꾸면 분수 등분제가 성립할 수 있지 않을까? 이에 관해서는 본 장의 제 3절에서 살펴볼 것이다.

2. 정의 B에 따른 분수의 포함제와 등분제의 정의

정의 B의 핵심은 포함제는 '몇 번 빼낼 수 있는가' 이고 등분제는 '여러 곳으로 똑같이 나누면 한 곳에 몇 개인가' 이다. 이 정의를 바탕으로 2007개정 교사용 지도서에서 분수의 포함제와 등분제에 대해서 다음과 같이 말하고 있다.

> 동수누감의 경우는 나머지가 나타날 경우에도 확대 적용이 가능하지만 등분제의 경우는 나머지가 생길 경우, 자연수의 범위에서는 의미를 갖지 못한다. 즉 나누는 수가 분수인 분수의 나눗셈의 경우에는 등분제를 생각할 수 없다. 분수로 똑같이 나눈다는 관점으로는 지도할 수 없으며 주어진 수에서 분수를 몇 번 뺄 것인가라는 동수누감의 원리로 지도해야 한다(교육과학기술

부, 2011b, p.90).

> 현수는 길이가 3m인 철사를 $\frac{1}{2}$m씩 잘라 친구들에게 나누어주려고 한다. 나눗셈을 하는 방법은 일반적으로 포함제(동수누감)와 등분제 두 가지를 생각할 수 있다. 주어진 상황은 나누는 수가 분수로서 등분제를 생각할 수 없다. 따라서 포함제 즉 동수누감의 상황으로 3m에서 $\frac{1}{2}$m를 여러 번 뺌으로써 문제를 해결할 수 있는 상황이다(교육과학기술부, 2011b, p.92).

이 주장의 요지는, 분수에서, 포함제는 성립하지만 등분제는 불가능하다는 것이다. 먼저 포함제부터 살펴보자. 이 사례 3m$\div\frac{1}{2}$m에서는 3m에서 $\frac{1}{2}$m를 6번 빼는 것이 가능한 것이 사실이다. 하지만, $\frac{1}{3}$m$\div\frac{1}{2}$m 라면, $\frac{2}{3}$번 빼내는 것이 되어 무의미하게 된다. 결과값이 자연수가 나오는 특수한 분수 사례를 바탕으로 성립 여부를 판단하는 것은 부적절하다고 보인다.

등분제의 경우는 3m$\div\frac{1}{2}$를 3m를 $\frac{1}{2}$곳으로 똑같이 나누는 것으로 해석되어야 하지만, '$\frac{1}{2}$곳'이 무의미하므로 역시 성립하지 않는다고 본다.

지금까지 구체적인 분석을 통한 불가능성을 고찰했다. 하지만, 이 정의 B를 통한 분수로의 확장의 불가능성에 대한 판단은 이러한 구체적인 분석 없이 일반적인 고찰만으로도 가능하다. 그것은 동수누감으로 분수의 나눗셈을(포함제든 등분제든) 정의하려는 시도가 가진 근본적인 제한점 때문이다. 동수누감은 자연수에서조차 나눗셈의 완성된 개념이 아니다. 물론 자연수 나눗셈 지도의 초기 단계에 동수누감으로 나눗셈 개념을 형성할 수 있다. 하지만 자연수 나눗셈의 본질은 비 개념이다. 자연수의 덧셈과 뺄셈은 이산량을 기초로 한 기수개념 범위 안에서 작동하지만, 나눗셈은 그 위에 형성된 비 개념을 필요로 한다. 초기에는 동수누감으로 도입했다 하더라도, 발달이 이어지면 비 개념으로 상승해야만 한다. 자연수의 나눗셈에서도 그럴진대, 하물며 분수는 그 개념의 본질 자체가 비 개념이므로 분수의 나눗셈을 동수누감으로 이해하려는 접근은 성공하기 어렵다. 분수의 나눗셈을 동수누감으로 다루려는 시도는, 마치 분수의 곱셈을 동수누가로 해결하려는 시도와 동일하다. $4\div\frac{2}{3}$를 4에서 $\frac{2}{3}$를 몇 번 뺄 수 있는가로 지도할 수 있다면, $4\times\frac{2}{3}$를 4를 $\frac{2}{3}$번 더하는 것으로 지도하려는 것이 부조리한 이유가 없을 것이다.

3. 정의 C에 따른 분수의 포함제와 등분제의 정의

정의 C는 그 형태 그대로 분수에 적용가능하다. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$은 다음과 같이 해석된다. 즉, 전체량 $\frac{8}{15}$m를 단위량 $\frac{2}{3}$m로 측정했을 때 측정값은 $\frac{4}{5}$이다(Dewey & McLellan, 1895).[6] 여기서 $\frac{4}{5}$가 의미하는 것은 $\frac{2}{3}$m를 $\frac{4}{5}$배하면 $\frac{8}{15}$m가 되는 것 혹은 $\frac{2}{3}$m에 대한

$\frac{8}{15}$m의 비가 $\frac{4}{5}$이다. 정의 C의 장점은 일반적인 측정상황을 통하여 정의하기 때문에 자연수에서의 정의와 분수에서의 정의가 동일하다는 것이다. 하지만 지나치게 일반적인 것도 효율성을 저해하므로, 분수에 더 적합토록 한 수준 낮춰서 더 구체화시켜보자. 단위량이라는 일반적 용어가 배제되고, 대신 배 개념이 사용된다.

정의 C-3

포함제: 두 양 사이의 배 값을 구하는 것
등분제: 어떤 양이 주어진 배 값을 가질 때, 1배에 대한 양을 구하는 것

$\frac{8}{15} \div \frac{2}{3}$을 예로 들어 정의 C와 정의 C-3을 비교하면 다음과 같다<표 1>.

<표 1> 정의 C와 정의 C-3을 비교

	정의 C	정의 C-3
포함제	$\frac{8}{15}$m를 단위량 $\frac{2}{3}$m로 측정했을 때, 측정값은?	$\frac{8}{15}$m은 $\frac{2}{3}$m의 몇 배인가?
등분제	$\frac{8}{15}$m을 측정한 측정값이 $\frac{2}{3}$일 때, 단위량은?	$\frac{8}{15}$m가 $\frac{2}{3}$배라면, 1배는 얼마인가?

정의 C-3은 측정을 통한 일반적 정의로부터 구성한 것이라는 점에서 연역적인 접근이라고 말할 수 있다. 이와는 다른 방향에서 할 수도 있다. 즉 앞서 제시한 정의 C-1과 C-2로부터 그것을 분수로 확장시킴으로써 분수의 포함제와 등분제 정의를 구성을 시도해보자. 이는 귀납적 접근에 해당한다.

먼저 정의 C-1은 분수로의 확장이 어렵다. 왜냐하면 그것은 묶는 조작이 핵심을 이루는데, 그것은 자연수에서만 가능하고 분수에서는 효용이 없기 때문이다.

이제 정의 C-2를 분수로 확장하는 것을 생각해보자. 우선, 자연수에만 적용가능한 단위인 '모둠'을 분수에 적합한 것으로 바꿔보자. 이것은 ~명, ~개, ~번, ~회와 같이 자연수에만 한정되는 이산량 단위이다. 자연수에도 적용될 뿐만 아니라, 분수에도 적용 가능한, 즉 분할이 가능한 단위는 무엇일까? '접시'라는 단위를 생각해보자. 만약 원형의 접시가 정교한 간격의 부챗살로 구획되어 있다면, 그것은 자연수적인 모둠의 의미뿐만 아니라 분수도 적용가능하다. 이러한 '정교한 부챗살 눈금이 그려진 접시'를 써서 분수의 포함제와 등분제를 정의해보자.

6) 1m는 일차단위, $\frac{2}{3}$m는 이차단위이다. 측정량의 일차단위 1m에 대한 측정값 $\frac{8}{15}$이지만, 이차단위 $\frac{2}{3}$m에 대한 측정값은 $\frac{4}{5}$이다.

정의 C-2-1
포함제: 어떤 양을 한 접시당 정해진 양만큼씩 공평하게 나누어 줄 때 접시의 수를 구하는 것 등분제: 어떤 양을 정해진 수의 접시에 공평하게 나누어 줄 때, 한 접시가 받는 양을 구하는 것

예를 들면 다음과 같다.

- 분수 포함제: (고기$\frac{8}{15}$kg)÷(고기$\frac{2}{3}$kg) = ($\frac{4}{5}$접시)
- 분수 등분제: (고기$\frac{8}{15}$kg)÷($\frac{2}{3}$접시) = ($\frac{4}{5}$kg)

여기서 $\frac{2}{3}$접시에 나누어 준다는 것을 어떻게 이해할 수 있는가 하는 문제가 제기될 수 있다. 한 접시에 나누어 주는 것은 전체를 한 접시에 모두 주는 것으로 보고 ($\frac{8}{15}$kg)÷1=($\frac{8}{15}$kg)으로 하는 것처럼, 그것을 전체를 접시의 $\frac{2}{3}$에 모두 주는 것으로 해석할 수 있을 것이다.

이처럼 C-2-1은 접시라는 단위를 사용함으로써 자연수에서의 모둠의 의미를 그대로 유지하면서 분수로 확장시켰다는 장점이 있다. 하지만, 접시라는 용어가 가지는 특수성 때문에 모든 문장제를 포괄하기는 어렵다. 이 문제를 해소하기 위해서는 '나누어준다'는 분배의 의미만 남긴 채 '접시' 조차도 '일반적인 단위'로 대체하는 것이다. 그렇다면 '접시에게 나누어 준다'는 표현이 '몇 m에게 나누어 준다', '몇 kg에 나누어 준다'와 같이 바뀌게 된다. 일상 언어에서 $\frac{2}{3}$m에게 나누어준다는 것은 무의미하지만, 수학에서의 '대응', '비례'의 의미로 비유적으로 해석한다면 의미부여가 불가능한 것만도 아닐 것이다. 다음 문장제를 생각해보자.

- 포함제: 옷감 1m의 길이가 $\frac{2}{3}$kg이다. 옷감 $\frac{8}{15}$kg은 몇 m인가?
- 등분제: 옷감 $\frac{8}{15}$kg의 길이가 $\frac{2}{3}$m이다. 옷감 1m의 무게는?[7)]

이것을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

7) 박교식, 송상헌, 임재훈(2004)은 이 같은 문장제를 '단위비율 결정'이라고 정의하였으며, 이와는 별도로 등분제는, 제수가 자연수인 경우로만 한정시켜서 $\frac{3}{2}$L÷6 처럼 '자연수만큼의 모둠으로 분할하는' 경우로 정의하였다. 그러나 분수의 나눗셈의 문장제의 유형을 분류하면서, 제수가 자연수인 경우에만 한정된 극히 특수한 경우를 '등분제'라는 별도의 이름을 주는 것이, 과연 분수 나눗셈의 분류에 도움이 되는지 의문이다. 그들이 인정했듯이 "1 단위에 해당하는 양을 구하는 것을 등분제의 본질로 볼 수 있고 또한, 1 단위에 해당하는 양을 구하는 것은 제수가 자연수일 때뿐만 아니라 분수인 경우에도 그대로 확장되고 적용될 수 있기 때문에(박교식 외, 2004)", 본 연구자는 등분제와 단위비율결정을 통합하여 등분제라고 분류하는 것이 효과적이라고 생각한다.

- 포함제: 옷감 1m당 $\frac{2}{3}$kg씩 나누어주었다. 옷감 $\frac{8}{15}$kg은 몇 m에게 나누어줄 수 있는가?
- 등분제: 옷감 $\frac{8}{15}$kg을 $\frac{2}{3}$m에 나누어줄 때, 1m는 몇 kg을 받는가?

'나누어 준다'는 표현은 정확히는 사람에게만 적용되는 것이지만, 약간 넓게 해석하면 접시에게도 적용시킬 수 있고, 더 넓게 비유적으로 말한다면, 길이의 단위 m나 시간의 단위 분에도 쓸 수 있다. 나누어준다는 표현을 중심으로 분수에 적합한 단위를 사용하기만 한다면, 자연수의 등분제로부터 분수의 등분제로 연속적으로 변환 가능하다. 결국 분배의(분할에 그치는 것이 아니라 다른 대상에게 주기까지 하는)뜻을 가진, '나누어 준다'라는 표현은 자연수의 등분제와 분수의 등분제를 연속적으로 이어줄 수 있는 핵심 조작인 셈이다.

Ⅳ. 포함제와 등분제의 정의에 관한 고찰이 주는 교육적 시사점

1. 분수는 정확하게 규정된 단위에 사용되어야 한다.

분수는, 그가 가진 비라는 본질에 적합하도록, 분할이 가능한 연속량 단위 다시 말하면 정확하게 규정된 단위에 적용되어야만 한다(Dewey & McLellan, 1895). 예를 들어 $\frac{2}{3}$m에서는 m가 정확하게 규정된 단위이기 때문에, m를 3등분한 $\frac{1}{3}$m가 가능하게 되고 다시 그것을 2배하는 것이 가능하게 되고, 1m에 대한 이것의 비는 정확히 $\frac{2}{3}$가 된다. 그러나 '$\frac{2}{3}$번'에서의 '번'이란, 더 이상 분할이 불가능한 이산량 단위이기 때문에, 다시 말하면 정확하게 규정된 단위가 아니기 때문에 여기서의 분수 $\frac{2}{3}$는 의미를 갖지 못한다. 종을 $\frac{2}{3}$번 치는 것이 가능한가? 상징적인 의미를 부여하는 것은 가능할 수도 있지만, 그것이 비 개념이 아니라면 분수로서의 정당한 해석이 될 수 없을 것이다. $\frac{2}{3}$명, $\frac{2}{3}$상자 등이 무의미한 것도 마찬가지이다. 등분제가 성립할 수 없다고 주장하는 사례들을 살펴보면, 그 이유가 분수의 나눗셈 자체에 있는 것이 아니라 분수의 부당한 사용에 기인함을 알 수 있다 [그림 2].

16. 다음은 '분모가 다른 분수끼리의 나눗셈' 수업에서 나타난 학생들의 대화이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

학생 A: $\frac{5}{2}\div\frac{1}{3}$은 어떻게 계산하지? 지난 번 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$을 계산할 때 $\frac{5}{6}$m의 색 테이프를 $\frac{1}{6}$m씩 잘라 봤었는데…….

학생 B: 그런데 예전에 배웠던 $\frac{5}{2}\div 3$은 $\frac{5}{2}$조각의 빵을 3명에게 똑같이 나누어주는 거잖아. 그러면 $\frac{5}{2}\div\frac{1}{3}$도 $\frac{5}{2}$조각의 빵을 $\frac{1}{3}$명에게 똑같이 나누어 주는 거야.

학생 C: 말도 안돼. 사람이 $\frac{1}{3}$명이라니……. 왜 그러는지는 모르겠지만 그냥 나누는 분수를 뒤집어서 곱하면 돼. 그러니까 $\frac{5}{2}\div\frac{1}{3}=\frac{5}{2}\times 3=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$이야.

학생 D: 내가 $\frac{5}{2}\div\frac{1}{3}$에 대한 문장제를 한번 만들어 볼까? 상자 1개를 묶는 데 리본 $\frac{1}{3}$m가 필요하다면 리본 $\frac{5}{2}$m로는 상자를 몇 개 묶을 수 있을까?

학생 E: 7상자를 묶고 $\frac{1}{2}$m의 리본이 남겠지.

[그림 2] 2011 초등교사 임용고사 수학 문항(한국교육과정평가원, 2011)

분수 학습에서는 근본 문제 중의 하나는, 초기에 도입한 등분할이나 측정값과 같은 직관적인 분수로부터 비 개념이나 알고리즘적인 분수로의 자연스러운 이행의 어려움이다(우정호, 1998, p.194). 분수의 나눗셈을 다루는 상황은 어찌 보면 분수 학습의 가장 상위 단계임에도 불구하고, 분할이 불가능한 이산량이라든가 동수누감과 같은 분수 도입 초기에 유효했던 방식을 유지하는 것은, 비 개념이라는 추상적인 분수로의 상승을 저해하는 원인이 될 것이다.

2. 포함제와 등분제의 구분은 나눗셈 자체의 구분이 아니라 나눗셈을 측정모델이라는 특수한 하나의 모델 안에서 해석했을 때의 구분이다.

나눗셈이라는 계산의 개념적인 수준과 그것이 적용된 모델 혹은 문장제 수준을 구별하지 않는다면 혼동이 발생할 수 있다. 마치 수와 양을 구별하지 않았을 때 생기는 혼동과 유사하다. 2007 개정 교육과정의 교사용 지도서에서 나눗셈을 동수누감 나눗셈과 등분 나눗셈으로 구분한 것이 그 사례에 해당한다. 엄밀하게 말해서 계산의 대상은 수이며 양은 계산의 대상이 될 수 없다. 동수누감은 순수한 수의 계산을 개념적인 수준에서 규정하는 것이고, 포함제와 등분제는 순수한 수의 나눗셈이 양의 측정에 적용되었을 때 발생하는 문제이다. 포함제와 등분제는 양의 측정과 관련된 수준이고 동수누감은 보다 높은 순수한 수 개념을 다루는 수준이라는 것을 고려하는 것만으로도, 동수누감이 유독 포함제에만 관계될 리가 없다는 추론을 할 수 있게 된다.

분수의 나눗셈의 두 종류의 해석이 생기는 이유는, 보다 근원적으로는, 분수의 곱셈을 측정모델에서 해석했을 때, 승수와 피승수가 비대칭이 되기 때문이다. 예를 들어, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$를 측정모델로 해석하면 $\frac{2}{3}\mathrm{m}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\mathrm{m}$가 된다. 즉 피승수는 측정량이고 승수는 순수한 분수(비)로서 그 둘의 성격이 다르다. 이로부터 구하고자 하는 결과값의 성격이 다른 두 경우, 즉 비 개념인 경우와 단위량인 경우가 생긴다. $\frac{8}{15}\mathrm{m}\div\frac{2}{3}\mathrm{m}=\frac{4}{5}$와 $\frac{8}{15}\mathrm{m}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\mathrm{m}$.

분수의 곱셈을 측정모델이 아닌 다른 모델로 해석해보면 상황은 더욱 분명해진다. 측정모델과 함께 분수 곱셈의 중요한 모델은 직사각형 넓이 모델이다.[8] 예를 들어 분수의 곱셈 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$의 경우 가로가 $\frac{2}{3}$m이고 세로가 $\frac{4}{5}$m인 직사각형의 넓이가 $\frac{8}{15}\mathrm{m}^2$로 해석된다. 즉 $\frac{2}{3}\mathrm{m}\times\frac{4}{5}\mathrm{m}=\frac{8}{15}\mathrm{m}^2$이다. 여기서는 승수와 피승수의 성격이 같기 때문에 나눗셈으로 바꾸어도, 넓이와 한 변의 길이가 주어졌을 때 나머지 다른 한 변을 구하는 한 종류의 해석만이 생길 뿐이다.

제 7차 교육과정 수학과 해설서와 2007년 개정 교육과정 수학과 해설서에서도 다음과 같이 말하고 있다.

> 생활 장면에서 나눗셈이 이루어지는 경우는, 포함제와 등분제로 구분할 수 있다. 포함제는 기준이 되는 양으로 어떤 양을 측정하였을 때 '기준이 되는 양이 몇 번 포함되는지를 구하는 경우' 이고, 등분제는 '어떤 양을 몇으로 똑같이 나누었을 때 한 몫의 크기' 를 구하는 경우이다. 포함제와 등분제는 서로 다른 의미를 가지고 있지만, 계산이라는 측면에서 같은 나눗셈으로 통합된다(교육인적자원부, 1999; 교육과학기술부, 2009).

2009개정 교사용 지도서에서도 다음과 같이 말하고 있다.

> 나눗셈이 사용되는 두 가지 경우인 등분제와 포함제는 구체적인 조작 활동은 다르지만 같은 나눗셈이 적용된다는 것을 알도록 해야 한다(교육부, 2014, p.224).

> 요컨대 포함제와 등분제의 구분은 순수한 분수의 계산으로서의 나눗셈의 문제가 아니라, 측정모델의 문제이다. Dewey가 말했듯이 포함제와 등분제라는 두 종류의 나눗셈이 있는 것이 아니라 나눗셈은 하나이며, 두 가지의 해석이 있을 뿐이다(Dewey & McLellan, 1895).

3. 등분제는 분수의 나눗셈 지도의 각 단계, 즉 나눗셈 개념의 도입, 나눗셈 알고리즘 증명, 나눗셈 응용의 각 단계에서 효과적으로 사용될 수 있다.

현재 우리나라교과서에서 나눗셈 개념의 도입 단계나 알고리즘 증명 단계에서 등분제 해석은 사용되고 있지 않다. 아마도 이는 분수 나눗셈에서는 등분제 자체가 불가능하다는 판단에 기초한 듯하다. 하지만 이미 논증했듯이, 분수의 등분제도 충분히 성립 가능하므로, 분수에 이산량 단위를 붙여 사용하지만 않는다면, 이미 배운 자연수 등분제를 바탕으로 그것을 확장하는 방식으로 지도할 수 있다.

---

8) 직사각형 넓이 모델은 카테시안 곱 모델로 불리기도 한다(임재훈, 2007). 넓이도 측정량의 일종이라는 사실에 기초해서 직사각형 넓이모델을 측정모델에 속하는 한 사례로 보아서는 안된다. 그 둘은 전적으로 다른 모델이다.

■ 분수 나눗셈의 개념 지도 단계에서 등분제의 활용(김수환 외, 2010, p.110)

<문제> 옷감이 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{4}{5}$kg이다. m당 몇 kg인가?

만약 4m에 $\frac{4}{5}$kg 이라면 m당 $\frac{4}{5} \div 4$

만약 2m에 $\frac{4}{5}$kg 이라면 m당 $\frac{4}{5} \div 2$

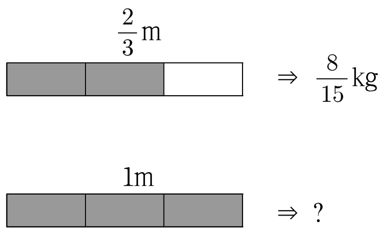
만약 1m에 $\frac{4}{5}$kg 이라면 m당 $\frac{4}{5} \div 2$

따라서 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{4}{5}$kg 이라면 m당 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$

■ 분수 나눗셈 알고리즘 증명 단계에서 등분제의 활용

<문제> 옷감이 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{8}{15}$kg이다. m당 몇 kg인가?[9)]

그림으로 나타내보자.



빗금친 $\frac{2}{3}$m를 1m 로 만들려면, 2로 나눈 다음에 3배해야 한다. 즉 $\times\frac{3}{2}$이다. $\frac{8}{15}$kg에도 동일하게 해야 하므로 $\frac{8}{15}\text{kg}\times\frac{8}{15}$이다. 즉 1m당 무게는 $\frac{8}{15}\text{kg}\div\frac{2}{3}=\frac{8}{15}\text{kg}\times\frac{8}{15}$ 이다.

■ 분수 나눗셈 응용 단계에서의 등분제 지도

분수 등분제의 문장제 지도에서는 계산 과정에서의 분수의 개념과 문장제 속에서의 개념의 차이에 주의해야 한다.

<문제> 옷감이 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{4}{5}$kg이다. m당 몇 kg인가?

이 문제에서 분수 $\frac{2}{3}$는 처음에는 m단위에 적용된 측정값으로 제시되지만, $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}$과 같은 계산과정에서는 m라는 측정값이 도외시된 채 비율로서 기능하고 있으며, 최종 결과값 $\frac{12}{10}$은 문장제 상황에 적합하도록 측정값 $\frac{12}{10}$kg으로 해석되어야 한다. 이러한 측정량과 비 사이의 상호 전환 과정에 주의해야 한다.

9) 임재훈(2005, p.105)은 이와 같은 문장제를 '단위비율 결정 맥락' 이라고 부르면서, 여기에서 제수를 1로 만드는 과정을 통하여 분수의 나눗셈 알고리즘을 증명하는 방법을 제시하고 있다.

이상으로 분수 나눗셈의 등분제를 분수의 나눗셈 개념 도입, 알고리즘 증명, 응용의 세 가지 장면에서 활용 방안을 간략하게 구상해 보았다. 그 결과는 예상했던 것보다 훨씬 풍부하였기에, 분수 나눗셈의 등분제 해석은 포함제 해석을 보완해주는 정도가 아니라 분수 나눗셈의 완전한 의미를 이해하는데 있어서 필수적이라고 주장할 수 있을 정도이다. 이에 관한 보다 상세한 활용 방안의 연구가 필요하다고 여겨진다.

V. 결 론

최근의 우리나라 수학과 교육과정의 여러 문서를 살펴본 결과, 자연수에서의 포함제와 등분제에 관한 통일된 정의가 없이 다양한 것을 알 수 있었다. 포함제의 경우, 구하는 것을 지칭하는 표현은 '몇 번 들어가는지', '몇 번 뺄 수 있는지', '들어가는 횟수' 처럼, '번' 과 '횟수' 라는 핵심 용어를 중심으로 다른 술어로 보충되었다.

이런 정의는 오류는 없으나, 문장제마다 제 나름의 정의를 하나씩 갖고 있는 것과 같아서, 정의는 일반성이 있어야만 한다는 측면에서 볼 때 바람직하지 않다. 포함제의 경우를 생각해보면, 빼내는 상황, 여러 모둠으로 묶은 다음 모둠을 세는 상황, 몇 사람에게 나누어 주는 상황 등의 여러 문장제 유형을 모두 포괄할 수 있도록 정의해야 한다. 현재 포함제의 정의에서는 '몇 번' 이라는 용어가 핵심으로 사용되고 있는데, 이 용어가 이러한 통합적 역할을 하기에는 부적합하다고 보인다.

다음으로 등분제를 살펴보자. 등분제의 경우 구하는 것을 지칭하는 용어가 포함제의경우보다도 더 통일성이 없어서, '한 몫의 크기', '한 부분의 크기', '한 곳에 몇 개', '하나치는 얼마' 등 다양하였다.

이를 극복하기 위한 대안은 측정관점에서 포함제와 등분제를 규정하는 방법이다. 즉 포함제는 측정값을 구하는 것, 등분제는 단위량을 구하는 것으로 정의한다. 하지만 이 정의는 분수까지도 포괄할 수 있는 정의이기 때문에 자연수 입장에서는 지나치게 일반적이라고 본다면, 한 단계 구체화시킬 수 있다. 묶음 모델이 그것이다. 묶음모델에서 단위량의 크기는 모둠의 크기이고, 측정값은 모둠의 개수이다. 예를 들어 사과 12개를 4개씩 묶어서 3개의 모둠으로 만들었다면, 단위량의 크기는 4이고, 측정값은 3이다.

현재 우리나라 여러 교육과정 문서를 살펴보면, 분수 나눗셈에서 포함제는 성립이 가능하지만 등분제는 성립이 불가능하다는 주장이 다수를 이루고 있다. 이 논문을 통하여 그 근거를 살펴본 결과, 분수 등분제가 불가능한 것은 나눗셈 자체라기보다는, 분수에 부적합한 단위를 사용한데 기인하였다. $\frac{7}{8}$m안에 $\frac{2}{3}$m가 몇 번 들어가는가 하는 문제는 가능하지만, $\frac{7}{8}$m를 $\frac{2}{3}$모둠으로 똑같이 나누는 것은 불가능한 것은, 나눗셈 자체에 문제라기보다는, 더 이상 분할이 불가능한 이산량 단위인 모둠에 분수 $\frac{2}{3}$를 붙인 '$\frac{2}{3}$모둠' 이라는 표현 때문이다. 분수는 번, 명, 개, 도막, 상자 등과 같은 이산량 단위에 적용되어서는 안되며, 반드시 분할이 가능한 연속량 단위 혹은 명확하게 규정된 단위에 적용되어야만 한다 (Dewey & McLellan, 1895).

포함제만 가능하고 등분제는 불가능하다는 주장 이외에도 다른 주장 또한 존재한다. 본 연구자가 이 주장의 근거를 분석한 결과, 그들은 포함제와 등분제가 무엇인가하는 점, 즉

정확한 정의의 차원에서 불분명하거나 혹은 불일치하고 있었다. 특히 분수 나눗셈의 등분제의 의미는 그 스스로 분명한 것이 아니며 다양하게 정의될 수 있는 것이기 때문에, 어떤 정의를 택하느냐에 따라 등분제의 성립 여부가 달라진다.

분수 포함제와 등분제의 가장 완전한 정의는 측정을 통한 정의이다. 측정모델에서 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$은 다음과 같이 해석된다. 전체량 $\frac{8}{15}$m를 단위량 $\frac{2}{3}$m로 측정했을 때 측정값은 $\frac{4}{5}$이다. 여기서 $\frac{4}{5}$가 의미하는 것은 $\frac{2}{3}$m를 $\frac{4}{5}$배하면 $\frac{8}{15}$m가 되는 것 혹은 $\frac{2}{3}$m에 대한 $\frac{8}{15}$m의 비가 $\frac{4}{5}$라는 뜻이다. 측정모델에서 볼 때, 포함제란 측정량과 단위량이 주어졌을 때 측정값을 구하는 것이며(예를 들면 $\frac{8}{15}\mathrm{m}\div\frac{2}{3}\mathrm{m}=\frac{4}{5}$), 등분제란 측정량과 측정값이 주어졌을 때 단위량을 구하는 것이다(예를 들면 $\frac{8}{15}\mathrm{m}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\mathrm{m}$). 특히 포함제와 등분제의 구별은 나눗셈 자체의 구분이 아니라, 나눗셈을 측정모델이라는 특수한 모델을 통하여 해석했을 때의 구분임에 주의해야 한다. 분수의 곱셈 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$을 직사각형 넓이모델에서 해석한다면 $\frac{2}{3}\mathrm{m}\times\frac{4}{5}\mathrm{m}=\frac{8}{15}\mathrm{m}^2$ 이 되어 승수와 피승수의 성격이 동일하기 때문에 두 종류의 나눗셈 해석이 생겨나지 않는다.

분수 나눗셈에서의 포함제와 등분제의 위치를 정당하게 확보했다고 한다면, 이제 남은 것은 그 둘을 어떻게 활용하는가 하는 문제일 것이다. 등분제와는 달리 현재 우리나라 교재에서 포함제는 이미 분수 나눗셈의 개념 도입과 알고리즘 지도에서도 중심 소재로 사용되고 있다. 그렇다면 등분제를 어떻게 활용할 것인가?

포함제와 등분제가 모두 성립 가능하다는 점이 받아들여진다고 해도, 학생들에게 여전히 등분제는 포함제에 비해서 이해하기 어려움 점이 있다. 등분제 상황(옷감이 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{8}{15}$kg일때 m당 무게를 구하는 것)은 포함제 상황(옷감 $\frac{2}{3}$kg이 1m일 때 $\frac{8}{15}$kg의 길이를 구하는 것)보다 나눗셈식으로 변환시키기 어렵게 느껴지는 것이 사실이다. 이 어려움의 근원은 측정량으로서의 분수와 순수한 비 개념으로서의 분수의 차이에 있다. 전자를 직관적인 분수, 후자를 알고리즘적인 분수로 구분한다면, 이 문제는 직관적인 분수에서 알고리즘적인 분수에로의 이행과정의 어려움으로 볼 수 있다(우정호, 학교수학, p.194). 초등수학에서 분수 도입한 이후 덧셈과 곱셈을 거치는 오랫동안 학생들은 측정량을 나타내는 직관적인 분수에 고착되게 되고, 그 결과 순수한 분수 혹은 알고리즘적인 분수의 사용이 요구되는 분수의 나눗셈 학습 시기에 이르러서는 직관적인 분수를 벗어나는 것에 인식론적으로 저항하게 된다.

이러한 어려움을 극복하는 교육적인 방안 중의 하나는 귀납적 확장 혹은 형식불역의 원리가 될 수 있다. 자연수 나눗셈의 등분제에서 몫을 점점 줄여서 1까지 가져온 후, 다시 분수로 가져가는 것이다. 예를 들어 옷감의 무게가 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{4}{5}$kg일 때 m당 무게는 얼마인가라는 등분제 상황을 나눗셈식 $\frac{4}{5}\mathrm{kg}\div\frac{2}{3}$으로 변환하는 데 어려움을 겪는다면, 만약 4m에

$\frac{4}{5}$kg 이라면 $\frac{4}{5}$kg÷4, 2m에 $\frac{4}{5}$kg 이라면 $\frac{4}{5}$kg÷2, 1m에 $\frac{4}{5}$kg이라면 $\frac{4}{5}$kg÷1이 될 것이기 때문에, $\frac{2}{3}$m에 $\frac{4}{5}$kg 이라면 $\frac{4}{5}$kg÷$\frac{2}{3}$가 될 것이다. 이러한 귀납적 외삽법 혹은 형식불역의 원리는 자연수에서 분수, 자연수에서 음수로 수를 확장하는 과정에서 작용하는 원리이므로, 그것이 자연수에서의 등분제를 분수에서의 등분제로 확장하는 과정에 중용되는 것은 우연이 아닐 것이다.

또한 분수 나눗셈 알고리즘을 증명하는 상황에서도 등분제는 적절히 사용될 수 있다. 예를 들어 옷감이 $\frac{2}{3}$m에 $\frac{8}{15}$kg일 때 1m당 무게를 구하는 문제가 주어졌을 때, 이 문제는 나눗셈식 $\frac{8}{15}$kg÷$\frac{2}{3}$에 해당한다. $\frac{2}{3}$m에 $\frac{8}{15}$kg이 할당되었다고 비유적으로 이해하면, $\frac{2}{3}$m를 1m로 만들려면 $\frac{3}{2}$을 곱해야 하므로, $\frac{8}{15}$kg에도 $\frac{3}{2}$를 곱하면 된다. 즉 $\frac{8}{15}$kg÷$\frac{2}{3}$ = $\frac{8}{15}$kg×$\frac{3}{2}$이 된다.

결론적으로, 분수의 나눗셈에서의 등분제는 자연수의 등분제를 바탕으로 그것을 적절히 확장시킴으로써 타당하게 정의될 수 있으며, 문장제로부터 나눗셈식을 만들어내는 과정에서는 귀납적 외삽법과 형식불역의 원리에 따른 지도가 가능하고, 분수 나눗셈 알고리즘을 증명하는 과정에서도 효과적으로 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

강문봉 (2011), 자연수 나눗셈 지도에 대한 고찰- 2007 개정 교육과정의 초등수학 교과서와 지도서를 중심으로-, **수학교육학연구, 21**(1), 1-16.

강흥규 (2009), 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안, **학교수학, 11**(1), 17-37.

교육과학기술부 (2009), **초등학교 교육과정 해설(IV)- 수학, 과학, 실과**, 서울: 미래앤컬쳐그룹(주).

교육과학기술부 (2011a), **수학 3-1, 초등학교 교사용지도서**, 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부 (2011b), **수학 6-1, 초등학교 교사용지도서**, 서울: 두산동아(주).

교육부 (2014), **수학 3-1, 초등학교 교사용 지도서**, 서울: 천재교육(주).

교육인적자원부 (1999), **초등학교 교육과정 해설(IV)- 수학, 과학, 실과**, 서울: 대한교과서(주).

교육인적자원부 (2008a), **수학 3-가, 초등학교 교사용 지도서**, 서울: 두산(주).

교육인적자원부 (2008b), **수학 6-나, 초등학교 교사용 지도서**, 서울: 두산(주).

김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실 (2010), **초등학교 수학과 교재연구**, 서울: 동명사.

박교식, 송상헌, 임재훈 (2004), 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구, **학교수학, 6**(3), 235-249.

박성택, 신택균, 양인환, 손용규, 이정재 (1993), **수학교육**, 동명사.

배종수 (2008), **초등수학교육 내용지도법- 제7차 교육과정을 중심으로**, 서울: 경문사.

우정호 (1998), **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부.

이영주, 이광호, 이효진 (2012), 분수의 나눗셈에 대한 학습자의 인지구조, **한국초등수학교육학회지, 16**(2), 295-320.

이용률 (2001), **지도내용의 핵심과제 99**, 서울: 경문사.

임재훈 (2007), 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈, **학교수학, 9**(1), 13-28.

임재훈 (2011), 포함제와 등분제 맥락에서 자연수 나눗셈 계산법 지도의 문제, **한국초등수학교육학회지, 17**(3), 395-411.

임재훈, 김수미, 박교식 (2005), 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로, **학교수학, 7**(2), 103-121.

한국과학창의재단 (2011), **2009개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구**, 한국과학창의재단 정책연구.

한국교육과정평가원 (2011), **2011학년도 공립초등학교교사 임용후보자선정 경쟁시험(초등학교교육과정)**.

한국교육과정평가원 (2014), **2014학년도 공립초등학교교사 임용후보자선정 경쟁시험(초등학**

교교육과정).

Bennett A. B., Burton L. J., Nelson L. T.(2004), Mathematics for elementary teachers: An activity approach-7th edition. McGraw Hill Higher Education. 강흥규, 권성룡, 진선숙, 조영미 (2012), **초등교사를 위한 수학: 활동적 접근**, 서울: 경문사.

Dewey, J. & McLellan, J. A.(1895), *The Psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic.* New York: D. Appleton company.

<Abstract>

A Study on a Definition regarding the Division and Partition of Fraction in Elementary Mathematics

Kang, Heung Kyu[10)]

Recently, the discussion about division and partition of fraction increases in Korea’s national curriculum documents. There are varieties of assertions arranging from the opinion that both interpretations are unintelligible to the opinion that both interpretations are intelligible. In this paper, we investigated a possibility that division and partition interpretation of fraction become valid. As a result, it is appeared that division and partition interpretation of fraction can be defined reasonably through expansion of interpretation of natural number. Besides, division and partition interpretation of fraction can be work in activity, such as constructing equation from sentence problem, or such as proving algorithm of fraction division.

Key words: Division and Partition of Fraction, measurement, ratio, discrete quantity, continuous quantity.

논문접수: 2014. 07. 12
논문심사: 2014. 08. 11
게재확정: 2014. 08. 22

10) natin@gjue.ac.kr