영재교육연구 제 24 권 제 1 호
Journal of Gifted/Talented Education
2014. Vol 24. No 1, pp. 17~43
http://dx.doi.org/10.9722/JGTE.2014.24.1.17

수학의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 수학적 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구 - 분수의 덧셈과 곱셈을 중심으로 -

김 화 수

세한대학교

본 연구에서는 사칙연산과 분수의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년 영재아 3명을 대상으로 분수의 덧셈과 곱셈을 내용으로 하였을 때, 정확한 개념의 인지와 개념의 연결로 분수의 덧셈과 곱셈에 대한 스키마와 변형된 스키마[1]를 어떻게 구성을 하는지에 대해 질적 사례연구를 통하여 알아보았다. 즉 수학의 1차적 개념의 구성으로 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 분수의 덧셈과 곱셈에 대한 관계적 이해를 하는지, 그리고 영재아들이 스스로 형성한 스키마와 변형된 스키마를 어떻게 이용하여 분수의 덧셈과 곱셈의 문제 해결에 접근을 하는지, 또한 연구대상자들의 개념구성과 문제해결력에서의 스키마는 어떻게 변형을 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다. 그 결과 분수의 덧셈에서 분수의 곱셈으로 연결될 때, 정확한 1차적 개념에 대한 인지와 스키마 그리고 변형된 스키마가 중요한 요인으로 작용한다는 것을 알 수 있었고, 이때 수학의 1차적 개념끼리의 연결과 정확한 1차적 개념에 대한 인지로 인해서 만들어지는 스키마와 변형된 스키마의 형성이 분수의 덧셈과 곱셈의 창의적 문제 해결에 무엇보다도 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다.

주제어: 1차적 개념, 2차적 개념, 스키마, 변형된 스키마

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

대부분의 초등학생들은 덧셈은 무엇이고, 뺄셈은 무엇인지, 덧셈과 곱셈은 어떠한 관계가

교신저자: 김화수(hskim@sehan.ac.kr)

* 이 논문은 2014년도 세한대학교 교내연구비 지원을 받아 쓰여진 것임.

1) Skemp(1998)가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양이나 형태가 새롭게 변형된 1차적 개념을 다른 일차적 개념이나 스키마와 연결시켜 형성되는 새로운 스키마를 의미한다(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨).

있으며 뺄셈과 나눗셈은 어떠한 관계가 있는지, 그리고 덧셈과 나눗셈은 어떠한 관계가 있고 '왜' 나눗셈을 할 때 곱셈을 사용하여 몫을 구하고, 나눗셈이 '왜' 피제수÷제수 $=\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$ 와 같은 분수로 표현될 수 있는지 알고 싶어 한다. 또한 분수의 덧셈을 할 때, 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 더하지 않고 '왜' 통분이라는 것을 하는지, 통분을 할 때 '왜' 분모끼리 곱하거나 각각의 분모의 최소공배수로 구하는지, 다른 방법은 없는지 그리고 분모를 통분을 한 후에도 '왜' 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 더하지 않고 분자끼리만 더하는지, 분수의 곱셈에서는 분수의 덧셈과 달리 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하는지에 대해 여러 부분에서 이해하기 어려워하고, 왜 그런지에 대한 이유와 그들의 연결고리가 어떻게 연결되어 있는지에 대해서도 알고 싶어 한다.

이에 본 연구에서는 연구 대상자들을 영재아로 하였는데, 영재아들을 연구대상으로 한 이유는 2002년~현재까지 초등학생들을 대상으로 1차적 개념과 변형된 스키마를 활용한 개념 구성과정을 계속하여 종단적인 연구를 해 오는 과정에서 1차적 개념을 학습한 학습자들(영재아, 평재아, 부진아) 대부분은 연구 초반에는 1차적 개념에 대한 학습이 거의 되어있지 않아서(반복적인 계산에 의한 훈련된 수학에 익숙해져 있어서) 영재아들 조차도 문제를 풀었을 때, 답은 맞아도 그 이유가 왜인지를 설명하는 학생은 거의 없을 뿐만 아니라, 문제를 해결하는 방법 또한 오직 한 가지 밖에 없었다. 하지만 1차적 개념에 대한 학습을 시켰을 때, 영재아, 평재아, 부진아 중에서 영재아들이 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양을 다르게 변화시킨 변형된 1차적 개념을 더욱 다양하게 형성하는 것을 볼 수 있었고, 영재아들이 자신이 스스로 형성한 변형된 1차적 개념들을 여러 가지 형태로 연결하여 더욱더 다양한 변형된 스키마를 형성하여 문제 해결에 접근하는 것을 볼 수 있었기에 영재아들을 연구 대상으로 정하였다. 또한 본 논문의 연구 활동과 같이 수학의 개념을 정의하는 활동은 이미 여러 연구에서 확인된 수학학습에서 중요한 특성인 일반화, 종합화, 추상화 능력을 학생들에게서 확인하고, 또한 학생들에게 경험시킬 수 있는 유용한 활동이다(고은성, 이경화, 송상헌, 2008).

영재교육에서 강조해야 할 세 가지 유형의 기회는 다음과 같다. 첫째, 상위 지식을 학습할 기회(Johnson & Sher, 1997); 둘째, 도전적인 수학문제에 접할 기회(Johnson, 1993); 셋째, 창의적 사고를 발전시키는 기회(Sheffield, 1999)이다. 그러므로 교사는 영재아들이 위와 같은 기회를 가지기 위해서 영재아들에게 정확한 1차적 개념에 대한 내용을 많이 제공해 주어야 하며 제공된 1차적 개념들의 연결로 학습자 스스로가 형성한 스키마와 변형된 스키마에 대하여 많은 의사소통을 해야 한다. 수학 수업 시간에 외형적으로는 교사와 학생, 학생상호간의 수학적 의사소통이 활발한 것으로 보이지만 수학적 사고나 의사소통의 질적 측면이 부족한 경향이 있는 것으로 나타났다(방정숙, 정희진, 2006). 실제로 본 연구자가 연구한 초등학교 3학년 영재아들 또한 전통적인 교사 중심의 환경에서 수학을 배운 학생들이어서 NCTM (1991, 2000), Raymond(1997), 및 Kuhs와 Ball(1986)이 언급한 것처럼 기본적인 규칙과 수학적인 내용, 그리고 문제를 해결하는 방법과 공식은 알아도 '왜', 그렇게 되는지에 대해 언급하는 학생이 거의 없었기에 연구 초반에는 연구자와 연구대상자 사이에 수학적 의사소통이

이루어지지 않았다. 수학적 의사소통 수업의 운영에 있어 그 필요성이나 효율성에 대한 인식은 높은 편이나 교사들이 실제로 수업에서 구현하는 데 어려움을 느끼고 있다(이종희, 김선희, 2002; 이해영, 2005). 이에 대한 해결방법으로 교사가 수학의 개념을 스키마로 구성하여 알고 있으면, 교사는 학습자들과의 수업이 이루어지기 이전에 자신과의 반영적 사고를 통하여 수업을 미리 진행해 볼 수 있고, 그로 인해 교사는 학습자 개개인의 사고 과정을 면밀히 관찰할 수 있으며, 학습자의 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 개선하도록 도와줄 수 있을 뿐만 아니라, 여러 가지 모양의 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 문제해결에 접근을 할 수 있도록 도와줌으로써 수학적 의사소통 수업을 자연스럽게 진행할 수 있게 된다. 이러한 초점을 바탕으로 본 논문에서는 스키마를 구성하기 위해 필요한 일차적 개념에 대한 연구와 이로 인해 형성되는 초등학교 3학년 영재아들의 스키마와 변형된 스키마를 분석하였다. 즉, ① 학생들의 개념형성 과정상의 일차적 개념에서 이차적 개념으로 발전해 나갈 때, 나타나는 현상과 ② 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 상위수준의 수학 내용에 대하여 관계적으로 이해를 할 때, 나타나는 현상을 사칙연산, 분수, 분수의 덧셈, 분수의 곱셈을 중심으로 조사 연구 하였다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제가 설정되었다.

가. 연구대상자들은 사칙연산 각각의 1차적 개념의 이해로 분수의 덧셈에 대하여 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하는가?

나. 연구대상자들은 사칙연산 각각의 1차적 개념과 분수의 덧셈에 대한 스키마와 변형된 스키마를 어떠한 형태로 구성하여 분수의 곱셈에 대한 관계적 이해를 하는가?

3. 용어의 정의

가. 1차적 개념

개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념(수학적 약속이나 정의). 즉, 그 개념이 가지고 있는 본질적인 의미를 뜻한다.

예를 들어, 덧셈의 1차적 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나 병합하는 계산법으로, 더해짐을 당하는 수는 피가수라 하고 더하는 수를 가수라고 하며, 그 결과를 합이라고 한다(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

나. 2차적 개념

1차적 개념들끼리의 연결이나, 변형된 1차적 개념과 다른 1차적 개념의 연결 그리고 변형된 1차적 개념끼리의 연결로 구성된 고차원적인 개념을 의미한다. 예를 들면, 약수는 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)의 스키마와 변형된 스키마의 연결로 만들어진 이차적 개념이다. 그러므로 피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함되거나, 포함된 개수만큼 피제수에서 제수를 뺏을 때, 피제수의 나머지가 없으면[2)] 그때의 제수는 약수가 된다. 그리고 제수를 한

번 또는 여러 번 더하거나, 더한 제수의 개수를 제수에 곱했을 때, 피제수가 나오면 이때의 제수와 곱해진 수(더한 제수의 개수)는 약수가 된다.

다. 변형된 스키마

Skemp(1998)가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양이나 형태가 새롭게 변형된 1차적 개념을 다른 1차적 개념이나 스키마와 연결시켜 형성되는 새로운 스키마를 의미한다(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨).

예를 들면, 덧셈의 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나(포함시키는) 병합하는 계산법을 뜻한다. 이 개념을 바탕으로 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 1의 크기로 한 번 또는 여러 번 세는 계산법[3]과 같은 변형된 스키마를 형성할 수 있다. 예를 들면, 7+8과 같은 덧셈의 경우 7+8을 (7+3)+5와 같은 과정에 의하여 합을 구하는 것으로 형성된다. 그럼에도 불구하고 일부 아동들은 7+8을 7부터 수를 1씩 여덟 번을 세서 더하는 방법(이 방법은 덧셈과정에서 이미 형성되어 있는 스키마이다), 즉 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15와 같이 합을 구한다. 이와 같은 방법으로 덧셈의 합을 구하는 과정을 본 연구에서는 기존의 스키마에 일차적 개념이 연결된 변형된 스키마라고 한다.

II. 이론적 배경

Skemp(1998)에 의하면 직관적 단계에서 우리는 외부에서 얻은 자료를 우리 신체의 시각과 청각을 통해 인식하고 이 자료들은 개념구조에 의해 자동적으로 분류되고 다른 자료들과 연결된다. 또 우리는 말하기와 쓰기를 함으로써 외부 환경에 따라 행동하게 된다. 이런 활동은 주로 활동의 경과와 결과에 대한 추가적인 정보의 피드백에 의해 조정되고 주도되는데, 이런 일은 우리의 감각기관을 통해서 이루어진다. 많은 경우에 이와 같은 활동이 반영적 사고를 거치지 않고도 성공적으로 이루어지는데, 예를 들어 받아쓰기를 한다거나 차를 운전하거나 3×5는 얼마인가에 대해 답하는 경우 등이다.

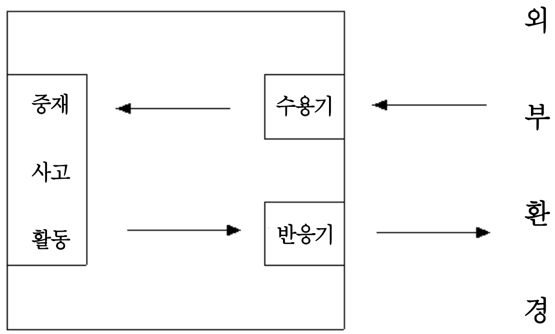
반영적사고 수준에서 아래 [그림 1]에서 보여주는 이런 중재 사고 활동은 자기 반영적 인식의 대상이 된다고 하였다(Skemp, 1998, p. 49).

Skemp(1998)는 스키마를 구성하기 위하여 먼저 수학을 관계적으로 이해해야 한다고 하였다. 즉 학생들이 수학을 관계적으로 이해하기 위해서는 먼저 교사들의 활발한 1차적 개념[4]

2) 6의 약수는 6을 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수이므로 이것을 뺄셈과 연결시키면, 피제수 6에서 제수 1을 6번(6÷1), 제수 2를 3번(6÷2), 제수 3을 2번(6÷3), 제수 6을 한 번(6÷6) 피제수의 나머지가 없이 뺄 수 있다. 그러므로 6의 약수는 1, 2, 3, 6이 된다.

3) 아동들이 덧셈을 행할 때, 기존의 세기(counting) 방법을 덧셈의 개념에 연결하여 형성한 변형된 스키마의 계산법.

4) 개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념, 즉 그 개념이 가지고 있는 본질적인



[그림 1] 반영적 사고 활동(Skemp, 1998, p. 71)

에 대한 연구와 문제 해결을 위한 여러 가지 모양의 스키마를 미리 형성해 보아야 한다는 것이다.

오영열(2002)은 초등학교 교사들의 수업관행과 학생들의 학습환경 인식과의 관계에서 다음과 같이 언급하였다. 전통적인 교사 중심의 수학교육 방법에 대한 변화의 필요성은 그동안 많은 문헌을 통해 제기되어 왔으며 이들 대부분은 수업의 질적인 측면에서 그 이유를 찾고 있다(Fennema, Franke, Carpenter, & Carey, 1993; Lampert, 1990; NRC, 1989; Stein & Brown, 1997). 이들의 연구에 의하면, 전통적인 교사 중심의 수업 모델의 경우 정답 위주의 학습을 강조하고 학생들을 수동적 학습자로 인식함으로써 창의적 사고를 지향하고 있는 사회적 요구를 반영하지 못하고 있음을 지적하고 있다. 따라서 수학 수업의 질을 높이기 위해서는 학생들이 학습에 몰두할 수 있는 수업 모델의 개발이 요구된다(p. 238).

한 초등학생이 우리에게 분모의 통분 방법에 대해서 질문을 한다면, 우리들은 이 학생에게 적절한 수준의 예를 들어 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$인 경우 분모끼리 곱해서 나온 수인 6은 2와 3의 최소공배수가 되기 때문에 분모끼리 곱해서 통분을 한다고 설명을 한다(보통 분수의 통분은 최소공배수를 사용하여 설명한다). 그리고 약수를 구할 때, 왜 곱셈을 이용해서 구하는지 질문을 한다면, 우리들은 어떤 수가 나오기 위해서 곱해진 두 수가 약수이기 때문에 곱셈을 이용해서 구한다고 설명을 한다. Brown, Cooney와 Jones(1990)[5]과 Ma(1999)[6]가 언급한 것처럼 우리들은 가끔씩 개념의 이해로 인한 문제 해결의 접근보다는 공식을 이용한 결과 위주의 접근 방법에 더 초점을 둘 때가 있다. 그러나 그렇게 질문한 초등학생은 푸는 방법에 대한 개념적 얘기들 듣고 싶은 것이 아니라, 그렇게 한 개념의 본질적인 의미에 대한 답을 기대하는 질문이다. 반영적 사고는 이종희와 박선욱(2002)이 언급한 것처럼 학습자와 학습자 그리고

의미를 뜻한다(보는 시각이나 상황에 따라서 일차적 개념의 범위는 유동적일 수 있다).

5) Brown, Cooney와 Jones(1990)은 초등예비 교사들이 초등 수학을 가르치는데 필요한 수학적 이해 수준에 도달하지 못하였다고도 지적하였다.

6) Ma(1999)의 연구에 의하면 미국의 초등학교 수학교사의 기초지식은 풍부하지 않다, 라고 하였다.

학습자와 교사 간의 대화가 이루어지면서 학습자의 머릿속에서 저장되어 있는 내용과 아이디어를 추출하여 그것을 다시 언어로 변형하는 정신적 과정에서 이루어진다. 그러므로 6이 최소공배수가 되기 때문에 분모인 2와 3을 곱했다는 대답보다는 왜, 두 분모인 2와 3을 곱하면 최소공배수가 되고 이 최소공배수가 왜, 통분에 사용되며 최소공배수만이 통분하는 데 사용하는 것인지에 대한 답을 해주고, Curcio(1990)가 언급한 것처럼, 그 답에 대한 교사와 학습자 상호 간의 의사소통이 이루어져야 한다.

최소공배수만이 통분을 하는 데 사용되는 것은 아니다. 모든 공배수는 다 통분을 하는 데 사용할 수 있다. 그 이유를 설명하기 위해서는 Ausubel의 실사성의 원리[7)]처럼 분수의 개념을 바탕으로 여러 형태의 변형된 스키마를 형성해야 한다. 분수의 개념에서 얘기하는 것과 같이 이미 나누어진 조각을 모양은 다르더라도 크기나 양을 똑같이 나누기 위해서는 다시 잘라야 하고 그럼으로써 서로 다르게 나누어진 조각의 개수를 같게 한다면 조각의 크기는 같아진다. 그리고 기존의 나누어진 방향과는 서로 다른 방향[8)]으로 잘라야 각각의 크기가 같게 되면서 나눌 수 있고 서로 다른 방향으로 나누기 때문에 조각의 개수는 자를 때마다 처음 개수의 배수 형태로 늘어나고 서로의 배수 중에서 공통인 배수, 즉 공배수는 서로 같은 개수의 조각, 같은 크기의 조각을 나타내기 때문에 통분을 할 때, 사용할 수 있다. 그리고 그 공배수들 중에서 가장 작은 배수인 최소공배수가 계산하기 편하고 시각적으로 보기 좋기 때문에 통분을 할 때 최소공배수를 주로 사용한다[9)]. 또한 약수를 구할 때 곱셈을 이용해서 구하는 이유는 약수의 개념을 바탕으로 형성된 변형된 스키마를 사용하여 설명할 수 있다. 나누어 떨어진다는 것은 제수를 한 번 또는 여러 번 더하면 피제수가 나오는 것을 뜻하고 이것은 곱셈으로 바꿀 수 있기 때문에 곱해진 수(제수와 제수가 더해진 개수)는 약수가 되는 것이다. 이와 같이 변형된 스키마는 학생들의 반영적인 사고를 하는 데 도움을 줄뿐만 아니라 여러 가지 방향으로 문제 해결에 접근할 수 있는 능력을 가지고 있다. 변형된 스키마를 이용한 반영적 활동이 포함된 예를 하나 더 들어보면, 나눗셈을 분수로 바꿀 때, 대부분의 학생들은 직관적으로 $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$라고 말을 한다. 왜, $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$가 되는지 물어보면 학생들은 아무 말을 하지 못하고 '그냥 학원에서 그렇게 배웠어요'라는 대답을 한다. 이 이유를 설명하기 위해서는 나눗셈의 개념[10)]을 바탕으로 하는 변형된 스키마의 사용이 필요하다. 예를 들어 $3 \div 5$의 경우는 피제수 3이 제수 5보다 작기 때문에 제수 5가 피제수 3에 포함될 수 없는 것처럼 보이지만 제수 5중에서 3은 포함되기 때문에[11)] $\frac{3}{5}$이 되는 것이다. 즉, 3은 피제수이고 5는 제수이

7) 실사성의 원리란 표현을 달리해도 명제의 의미가 변하지 않는 것을 의미한다.

8) 가로로 이미 나누어진 조각을 다시 가로로 나눈다면, 조각의 크기가 서로 달라지기 때문에 나누는 의미가 없어진다. 그러므로 세로로 잘라야 하고 나누어질 때마다, 조각의 개수는 배수 형태로 늘어나는 것을 볼 수 있다.

9) 이 변형된 스키마는 연구자가 주관적으로 형성한 것이기 때문에 일반화하는 데 제한점을 갖는다.

10) 약수의 개념인 포함제와 등분제 중, 피제수에 제수가 얼마만큼 포함되어 있는지는 아는 포함제를 사용

11) 만약 다 성장한 코끼리가 소형 경승용차에 탄다면 코끼리 몸 전체가 경승용차에 다 들어가지는

기 때문에 $\frac{3}{5}$은 $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$가 된다. 이와 같이 변형된 스키마는 새로운 개념을 형성하거나 상위 단계의 개념을 이해하기 위한 반영적 사고를 하는 데 중요한 역할을 할 뿐만 아니라, 기존의 스키마보다 더 세밀하고 강력한 개념의 연결능력을 가지고 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

대전에 있는 K초등학교 3학년 학생 3명(남학생 1명, 여학생 2명)을 대상으로 실시하였다. 실시한 3명은 모두, 전교 석차 10% 안에 포함[12]되고 KAGE 영재학술원에서 지능검사(한국 웩슬러 지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 선발되어 교육을 받는 학생으로 수학적 문제 해결력이 비슷한 성향의 학생들이었다.

2. 연구 방법과 절차

가. 연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에 대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 개념을 습득하고 스키마와 변형된 스키마를 형성해 가면서 나타나는 수학적 사고 발달과정을 조사하는 것이므로 일반 연구 등에서 구할 수 있는 자료 이상으로 충분한 증거 자료, 예를 들면, 관찰, 인터뷰, 학습자 노트, 관찰자 노트 등을 사용할 수 있는 디자인의 장점 때문에 사례연구를 택하였다.

본 연구의 사례는 초등학교(분수)와 중학교(유리수)에서 지도되는 분수의 덧셈과 분수의 곱셈에 대한 내용을 수학의 1차적 개념을 학습한 세 명의 연구대상자들에게 제공했을 때, 나타나는 현상(변형된 스키마)을 중심으로 기록 원고를 작성하여 분석하였다.

나. 연구 절차

본 연구는 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전을 할 때, 어떠한 수학적 개념 구성과정을 거치고 어떠한 변형된 스키마를 형성하는지에 대해 알아보기 위해 연구를 하였다. 두 가지 연구 문제를 통해 학생들에게 1차적 개념에 대한 숙지와 1차적 개념들을 연결하여 만들어 낼 수 있는 간단한 2차적 개념의 구성에 대한 내용과 학습 활동지를 경험하게 하여 학생들

못하지만 앞발 두 개 정도는 태울 수 있는 것과 비슷한 이치

12) 학년 석차 10%안에 포함되는 학생은 송상헌(1998)이 언급한 것처럼 ‘이미 탁월한 성취를 나타내 보인 재능아는 물론, 아직 탁월한 성취를 보이지는 않았지만 그러한 성취를 보일 잠재적 가능성(영재성)을 가지고 있는 자’이기 때문에 영재아의 대상으로 선택하였다.

에 의해서 발견되고 형성된 변형된 스키마의 분석과 기존 개념들과의 연결성 그리고 확장 범위에 대하여 심도 깊은 연구를 하였다.

본 연구자는 학생들에게 새로운 스키마를 형성할 수 있도록 다음과 같은 지도 절차에 따라 스키마 학습을 전개하였다.

이와 같은 절차에 의해 스키마 학습을 수행한 후, 연구자는 학생들과 토의한 내용과 학생들이 발견한 변형된 스키마를 정리하고, 이를 통하여 연구문제를 해결한 분석 결과를 제시하였다.

학생들에게 새로운 스키마를 형성할 수 있도록 다음과 같은 절차에 따라 스키마 학습을 전개하였다.

1) 1차적 개념에 대한 설명을 해 주었다.
2) 1차적 개념을 바탕으로 구성된 연구대상자들의 변형된 스키마에 대해서 토의를 하였다.
3) 토의에 대한 내용을 분석하였다.
4) 토의를 통해 발견된 변형된 스키마를 정리하였다.

예) 곱셈을 예로 들면,
1) 곱셈의 1차적 개념에 대한 설명
2) 연구대상자들이 구성한, 곱셈의 변형된 스키마에 대해서 토의
3) 토의된 내용 분석
4) 토의를 통해 발견된 변형된 스키마의 정리

다. 연구 도구

연구 도구의 전체 구성은 사칙연산들의 연결성에 관한 관계적 이해와 그들의 연결성과 관련된 1차적 개념과 스키마에 관한 내용으로 이루어졌다.

연구 도구에 나타난 개념 단계의 구조는 본 연구자의 주관적인 생각을 바탕으로 하고 있으므로 바라보는 시각이나 상황의 차이에 의해서 다시 바뀔 수 있으며, 1차적 개념의 범위 또한 넓히거나 좁힐 수 있다.[13)]

라. 자료 수집 방법

본 연구의 목적인 1차적 개념의 이해와 이들의 구성으로 형성되는 스키마(개념의 구성체)와 변형된 스키마를 여러 가지 모양으로 개발하기 위하여, 연구에 참여한 세 명의 K초등학교 학생들의 토의 내용과 학습활동지에 씌어진 내용들을 중심으로 자료를 수집하였다.

13) 이차적 개념이나 삼차적 개념을 바라보는 시각이나 상황에 따라서 일차적 개념으로 생각할 수 있고, 일차적 개념 또한, 이차적 개념이나 삼차적 개념으로 생각할 수 있다. 그러므로 각각의 개념에 대한 올바른 인지가 무엇보다도 중요하다.

마. 분석 방법

1차적 개념에 대한 이해와 변형된 스키마의 구성능력은 사례 연구를 통하여 학생들에게서 나타난 현상 그 자체를 기술한 형식, 그 자체를 취한 상태에서 ① 1차적 개념의 숙지, ② 위와 같은 내용을 가진, 연구대상자들의 변형된 스키마 형성, ③ 2개 또는 3개 이상의 1차적 개념들의 연결로 구성된 2차적 개념에 대해서 분석을 하였다.

IV. 연구 결과 및 분석

본 연구자는 위의 연구도구를 학습한 학생들이 스스로 형성한 변형된 스키마를 중심으로 다음의 연구 문제에 대한 접근을 하였다.

1. 연구대상자들은 사칙연산 각각의 일차적 개념의 이해로 분수의 덧셈에 대하여 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하는가?

가. 분수의 1차적 개념에 대한 설명

분수란 ‘모양은 달라도 크기나 양은 똑같이 나눈다.’라는 정의에서 ‘똑같이 나눈다.’는 의미를 이해하기 위해서는 먼저 ‘똑같다’라는 말과 ‘나눈다’란 말속에 함축되어 있는 생각을 알아야 한다. ‘나눈다’라는 말에는 나눌 수 있는 것과 나눌 수 없는 것이 있는데 나눌 수 있는 것만 분수로 나타낼 수 있다는 의미이다. 즉, 어떤 대상이 있을 때, 그 대상을 몇 조각으로 나누어도 물체의 속성은 변하지 않아야 그 대상을 분수로 표현할 수 있다. 또한 분수에서 무엇보다도 중요한 것은 똑같이 나누어야 한다는 것이다(라병소, 1999, p 62).

다음의 [프로토콜 1]은 분수의 개념을 설명하자마자 나온 학생들의 대화이다.

나. 학생과 연구자(교사)의 토의

[프로토콜 1]

S1의 nickname: 빵, S2의 nickname: 삐, S3의 nickname: 별

ⓐ S3: 선생님~ 분수도 나눗셈하고 관계가 있어요!
T: 왜?
ⓑ S3: 모양은 같거나 다르더라도 크기나 양을 똑같이 되도록 나누는 것이 분수라고 하셨잖아요. 그래서 나눗셈하고 관계가 있을 것 같아서요….
T: 음… 그렇구나~
S2: 그럼 이것도 나눗셈처럼 하면 되겠네요?
T: 어떻게?
ⓒ S2: 더하고, 빼고, 곱하고, 나누어서요.
T: 그럼, 선생님이 하나 물어 볼게. 분수로 나타낼 수 있는 것을 말해 볼래?

S1: 빵!
T: 선영이!
ⓓ S1: 피자요~ 피자는 잘라도 피자잖아요. 성질이 변하지 않잖아요.
S2: 삐!
T: 진원이!
ⓔ S2: 식빵이요~ 식빵도 아무리 잘라도 식빵이 돼요. 선영이가 얘기한 것처럼 식빵도 성질이 변하지 않아요.
S3: 별!
T: 선하!
ⓕ S3: 햄이요~ 햄도 마찬가지예요.
T: 그럼, 분수로 나타낼 수 없는 것을 얘기해 볼래?
ⓖ S3: 자동차요~ 자동차는 자르면, 폐차가 되잖아요. 그래서 성질이 변해요.
S1: 빵!
T: 선영이!
ⓗ S1: 강아지요~ 나누기 전에는 애완견인데, 나누면 보신탕이 돼요. 하하하~
T, S1, S2, S3: 하하하~
T: 잔인하다 그치? 그래도 발표 잘했다. 재미있는데~
ⓘ S3: 선생님~ 그럼, 분수는 서로 크기나 양을 똑같이 나누어 가지려고 하다가 만들어진 건가요?
T: 음… 선하가 한 얘기가 맞아. 예전에 이집트에서 공동 경작으로 농사를 짓고 나서 나중에 수확할 때, 서로 불만이 없이 나누어 가지려고 하다가 만들어진 게 분수라는 얘기가 있어.
S1: 저도 책에서 읽은 적 있어요.
T: 그럼, 이미 크기가 다르게 나누어진 것은 어떻게 할까?
S3: 다시 잘라야 할 것 같은데….
S1: 빵!
T: 선영이!
ⓙ S1: 크기가 같게 다시 나누어야죠.
T: 어떻게?
S1: …….
T: 그럼, $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$은 크기가 같니 다르니?
S1: 달라요?
T: 왜?
ⓚ S1: $\frac{1}{2}$은 2개로 나눈 거구요~ $\frac{1}{3}$은 3개로 나눈 거라서 크기가 달라요.
S2: 삐!
T: 진원이!
ⓛ S2: 많이 나눌수록 크기가 작아 지구요~ 적게 나눌수록 크기가 커져요.
T: 그럼, 어떻게 나누었을 때, 크기가 같아지지?

S3: 별!

T: 선하!

ⓜ S3: 같은 개수로 나누어지면 크기가 같아져요. 그러니까, 둘 다 3개로 나누어지면 크기가 같아져요.

S1: 빵!

T: 선영이!

ⓝ S1: 그럼, 두 조각 나있는 거 하구요~ 세 조각 나있는 것을 다시 잘라서요~ 개수를 같게 만들면 돼요.

T: 개수를 같게 나누려면 어떻게 하지?

S2: 삐!

T: 진원이!

ⓞ S2: 원래 나누어진 방향하고는 다른 방향으로 나누면 돼요.

T: 왜?

ⓟ S2: 원래 나누어진 방향으로 나누어 보니까, 처음 나누었던 거하고 크기가 달라져서요.

T: 무슨 말인지 앞에 나와서 그려볼래?

ⓠ S2: 이렇게 처음에 가로로 나누어져 있다면요~ 이것을 다시 가로로 나누면 이렇게 처음 조각하고 크기가 달라져요. 그래서 이것을 다른 방향인 세로로 나누면요 처음 조각하고 크기가 같으면서 나눌 수 있어요.

T: 우와~ 진원이 정말 잘하는 걸~

S3: 별!

T: 선하!

ⓡ S3: 선생님 진원이가 한 것처럼 나누어 보니까요~ 한번 자를 때마다, 처음 수보다 '배'가 늘어나요.

T: 선하도 나와서 그려볼래?

ⓢ S3: $\frac{1}{2}$은 두 조각 나있고, $\frac{1}{3}$은 세 조각 나있잖아요~ 이것을 세로로 나누면, 두 조각은 네 조각이 되고, 세 조각은 여섯 조각이 돼요. 그리고 이렇게 다시 자르면 여섯 조각이 되고, 아홉 조각이 돼요. 그래서 두 조각은 2의 배수로 늘어나구요~ 세 조각은 3의 배수로 늘어나요. 그래서 여섯 조각일 때, 크기가 같아져요.

T: 음! 그래!

S2: 삐!

T: 진원이!

ⓣ S2: 그럼 공배수네요. 그리고 여섯 조각뿐만이 아니라 육의 배수는 다 크기가 똑같아요.

T: 다시 한 번 천천히 설명해 볼래?

ⓤ S2: 저번에 공배수 배울 때, 공배수는 최소공배수의 배수라고 했잖아요. 그리고 선하가 얘기한 것처럼 자를 때마다 배수로 늘어나구요…. 그러니까, 공배수일 때, 크기가 같아져요.

S1: 빵!

T: 선영이!

ⓥ S1: 조각의 개수하고 조각의 크기하고 분모는 서로 같은 뜻을 가지고 있어요.

T: 왜?
ⓦ S1: 조각의 개수가 같아지면요~ 크기가 같아지구요~ 크기가 같아지면요~ 분모가 같아져요.
ⓧ S3: 선생님! 혹시 이게 통분인가요?

다. 토의된 내용 분석

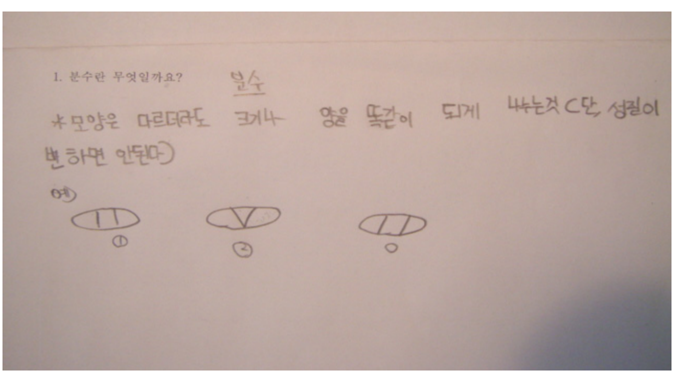
[프로토콜 1]에서 보여준 바와 같이, 학생들은 분수의 개념을 형성할 때, 사칙연산의 개념(ⓐ, ⓑ, ⓒ)과 변형된 스키마 그리고 약수와 배수(ⓒ)의 여러 가지 개념[14)]과 변형된 스키마를 사용하여 분수의 개념에 대한 관계적 이해를 하였고, 분수로 나타낼 수 있는 것(ⓓ, ⓔ, ⓕ)과 없는 것(ⓖ, ⓗ)을 구분하였다. 그리고 분수의 개념을 바탕으로 각각 서로 다른 크기로 나누어진 조각을 같은 크기로 다시 나누기 위해서는 처음에 나누어진 방향의 반대방향(ⓞ, ⓟ, ⓠ)으로 각각 같은 개수의 조각(ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓛ, ⓜ, ⓝ, ⓥ, ⓦ, ⓧ)이 될 때까지 나누어야 한다는 사실을 발견했고, 같은 개수로 나누는 과정에서 공배수(ⓡ, ⓢ, ⓣ, ⓤ)가 조각의 개수(조각의 크기, 분모)를 같게 하는 데 중요한 역할을 한다는 사실을 발견하였다.

라. 발견된 변형된 스키마 정리

1) ⓐ~ⓧ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 1

똑같이 나눈다는 것은 서로 불만이 없이 나누어 가지는 것을 뜻하며, 나눌 때는 모양과 상관이 없이 크기나 양만 같으면 된다. 이 원리를 바탕으로 생각해 보면, 분수에서 분모는 전체의 나누어진 조각의 개수를 말하며, 나누어진 조각의 개수에 따라 조각의 크기가 달라지므로 두 분수를 더하거나 빼거나 나눌 때, 분모가 다르면, 각각의 조각의 개수가 다르고, 크기나 양 또한 달라서 직접 더하거나 빼거나 나눌 수가 없다.

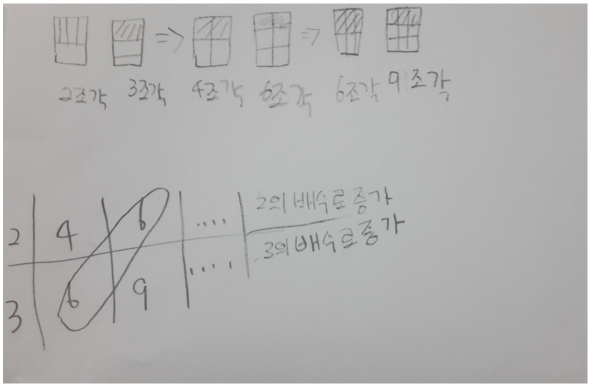
즉, '분모 = 조각의 개수 = 조각의 크기나 양'의 관계가 성립한다.



[그림 2] 분수의 개념(S2)

---

14) 약수, 공약수, 최대 공약수, 배수, 공배수, 최소공배수



[그림 3] 통분의 과정(S3)

나누어진 조각의 개수는 분모를 뜻하고, 분모는 조각의 크기에 영향을 준다. 그러므로 같은 면적을 가진 2개의 직사각형에서 각각 나누어진 조각의 개수가 같다는 것은 분모가 같다는 것을 의미하는 동시에 조각의 크기가 같다는 것을 의미한다. 또한, 나누어진 조각의 개수가 많아지면 많아질수록 조각의 크기는 작아지고, 반면에 나누어진 조각의 개수가 적어지면 적어질수록 조각의 크기는 커진다. 그러므로 조각의 크기가 서로 다를 경우에는 다시 잘라서 각각의 나누어진 조각의 개수를 같게 함으로써 그 크기와 분모를 같게 만들 수 있다. 그리고 이러한 과정을 '통분'이라고 한다.

2. 연구대상자들은 사칙연산 각각의 일차적 개념과 분수의 덧셈에 대한 스키마와 변형된 스키마를 어떠한 형태로 구성하여 분수의 곱셈에 대한 관계적 이해를 하는가?

다음의 [프로토콜 2]는 [프로토콜 1]에서 분수의 개념과 변형된 스키마에 대하여 학습한 후, 교사와 학생들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

나. 학생과 연구자(교사)의 토의

[프로토콜 2]

ⓐ S3: 학원에서 선행 학습으로 분수를 배웠는데, 그냥 공식대로 문제만 풀어서 그때는 무슨 말인지 몰랐어요. 그런데 오늘 그게 무슨 말이었는지 좀 알았어요.
T: 하하하~ 다들 중요한 걸 발견했는걸! 그럼 이번에도 선생님이 하나 질문해 볼까?
S1, S2, S3: 네~

ⓑ T: 너희들이 아까 나눗셈하고 분수가 관계가 있다고 했는데, 관계가 있다면 나눗셈을 분수로 바꿀 수 있지 않을까?
S2: 삐!

T: 진원이!
S2: 바꿀 수 있어요!
T: 어떻게?
ⓒ S2: 제수 분의 피제수로 하면 돼요?
T: 왜 그렇게 되지?
ⓓ S2: 그건…… 잘 모르겠어요…. 그냥 학원에서 그렇게 배웠는데….
T: 혹시 아는 사람 없니?
S3: 별!
T: 선하!
ⓔ S3: 제수 분의 피제수이면, 분모는 나누는 수가 되고, 분자는 나눔을 당하는 수가 되니까…. 음…… 아휴~ 잘 모르겠어요.
S1: 빵!
T: 선영이!
ⓕ S1: 분수는 전체 분의 부분이니까요~ 그러면, 나누는 수가 기준이 되잖아요, 그러니까… 어… 포함되면 몫이 분수가 안 되는데… 잘 모르겠어요.
T: 그럼 이번에는 선생님이 도와줄게. 아까 선영이가 거의 맞췄어.
S1: 에헴! 하하하~
ⓖ T: 나눗셈은 피제수에 제수가 얼만큼 포함되는지 아는 거잖아, 그러니까 예를 들면 3÷5에서 5가 3에 포함되어야 하는데 3에 5가 포함되니?
S1, S2, S3: 아니요!
T: 하지만 5개 중에서 몇 개는 포함될 수 있을까?
S1, S2, S3: 3개요!
S1: 빵!
T: 하하하! 선영이가 뭔가 알아냈구나! 선영이!
ⓗ S1: 5개 중에서 3개가 포함이 되잖아요, 그러니까, 5분의 3이 되구요~ 그리고 5는 제수고 3은 피제수니까요~ 제수 분의 피제수가 돼요.
T: 그래요~ 결국은 선영이가 마무리했네! 하하하~, 그럼 분수의 덧셈을 할 때는 어떻게 하면 될까?
ⓘ S3: 조각의 크기를 같게 하면 돼요!
S1: 조각의 개수를 같게 하면 돼요!
S2: 분모를 같게 하면 돼요!
ⓙ T: 그럼, $\frac{3}{7}$ 더하기 $\frac{2}{5}$를 해볼래? 먼저 해봐~
S1, S2, S3: 네~
S1: 빵!
T: 벌써 풀었어?
S1: 네~ $\frac{5}{12}$예요~
T: 왜, 그렇게 나왔지?

ⓚ S1: 분모끼리 더해서 12가 나오구요~ 분자를 더해서 5가 나왔어요.
S2: 선영아~ 크기가 다르잖아.
S1: 맞다~ 선생님 다시 할게요.
S3: 별!
T: 선하!
S3: $\frac{29}{70}$예요.
T: 왜, 그렇게 나왔지?

ⓛ S3: 아까 얘기한 대로 세로로 다시 잘랐어요. 그래서 조각의 수가 35조각일 때, 개수가 같게 나왔고 그때, 분자도 분모가 늘어난 배수만큼 늘어나서 $\frac{3}{7}$은 $\frac{15}{35}$가 됐고, $\frac{2}{5}$는 $\frac{14}{35}$가 돼서 $\frac{15}{35}$와 $\frac{14}{35}$를 서로 더했더니 $\frac{29}{70}$가 됐어요.
S2: 어! 그럼, 더 작아졌잖아~ $\frac{15}{35}$하고 $\frac{14}{35}$를 더하면 더 커져야 하는데….

ⓜ S1: 선생님! 크기가 같아졌으니까요~ 분모는 더 이상 안 건드리는 것 아니에요?
T: 하하하~ 선영이가 중요한 걸 발견했구나!
S2: 삐!
T: 그래~ 진원이!
S2: 선생님 선영이가 한 얘기가 맞아요!
T: 어떻게 그런 생각을 하게 됐지?
S2: 제가요~ 그림을 그려보니까요~
T: 그럼 진원이가 나와서 칠판에 해 볼래?

ⓝ S1: 그림을 그리면요~ 이렇게 $\frac{15}{35}$하고 $\frac{14}{35}$가 되잖아요. 그리고 색칠해져 있는 조각은 모양은 좀 다르지만 크기가 같으니까요~ 만약 이것이 고무찰흙이라면 전체가 35개로 나누어져 있는 틀 안에 $\frac{14}{35}$의 조각 14개와 $\frac{15}{35}$의 조각 15개를 채워 넣으면 이렇게 $\frac{29}{35}$가 돼요!
T, S1, S2, S3: 와~

ⓞ S3: 그런데 선생님~ 학원에서는요~ 분모를 같게 만들 때, 분모끼리 곱하는데, 왜 그래요?
T: 혹시, 얘기해 볼 사람 있니?

ⓟ S2: 분모를 같게 하려면 조각의 개수가 같아야 하잖아요. 그래서 공배수를 구하는 건데, 분모끼리 곱해서 나온 수가 공배수가 되잖아요.
T: 그래! 진원이가 정확하게 맞췄다! 얘들아~ 이제 분수가 무엇이고 분모, 분자가 무엇을 뜻하는지 잘 알겠지?
S1, S2, S3: 네~

다. 토의된 내용 분석

[프로토콜 1]과 [프로토콜 2]에서 보여준 바와 같이, 학생들은 분수의 개념과 스키마 그리고 변형된 스키마를 바탕으로 학원에서 선행(ⓐ)으로 배웠던 나눗셈을 분수로 바꾸는 방법

(ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ, ⓗ), 분모끼리 서로 곱해서 통분(ⓞ, ⓟ)을 하는 방법, 분수의 덧셈(ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓛ, ⓝ)을 할 때, 분모를 통분한 다음 분모끼리는 더하지 않고(ⓜ) 분자끼리만 더하는 이유를 관계적으로 이해하였고 설명하였다. 위에서 발견된 분수의 변형된 스키마를 정리해 보면, 다음과 같다.

라. 발견된 변형된 스키마 정리

1) ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ, ⓗ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 1

분수는 모양은 다르더라고 크기나 양을 똑같이 나눈다는 뜻을 가지고 있기 때문에 사칙 연산 중 나눗셈과 관계가 깊고, 나눗셈의 의미에서 분수로 유도해 낼 수가 있다. 나눗셈이란 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 얼마만큼 포함되어 있는가를 나타내는 포함제와 피제수를 제수가 나타내는 수로 등분하는 등분제로 얘기할 수 있다. 예를 들어, 10÷2는 나눔을 당하는 수(피제수) 10에 나누는 수(제수) 2가 5번 포함이 되고, 피제수 10은 제수 2에 의해서 5등분이 되므로 몫은 5가 된다. 그리고 7÷9의 경우는 피제수 7이 제수 9보다 작기 때문에 제수 9가 피제수 7에 포함 될 수 없는 것처럼 보이지만(제수 9 전체가 피제수 7에 포함이 되지는 못하지만), 제수 9중에서 7은 포함되기 때문에(만약 다 성장한 코끼리가 소형 경승용차에 탄다면 코끼리 몸 전체가 경승용차에 다 들어가지는 못하지만 앞발 두 개 정도는 태울 수 있는 것과 비슷한 이치) $\frac{7}{9}$이 되는 것이다. 즉, 나눗셈 자체에 분수의 의미를 포함하고 있기 때문에 나눗셈과 분수는 깊은 관계를 가지고 있다.

2) ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓛ, ⓜ, ⓝ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 2

자연수는 한 대상이 하나의 수로 표현되지만, 분수는 한 대상이 여러 개의 수로 표현된다. 이것이 자연수와 근본적으로 다른 점이다. 그래서 자연수는 그 자체로 직접 계산이 가능하지만 분수에서는 계산을 하려고 하는 대상을 똑같은 크기나 양으로 나눈 다음 계산을 해야 한다.

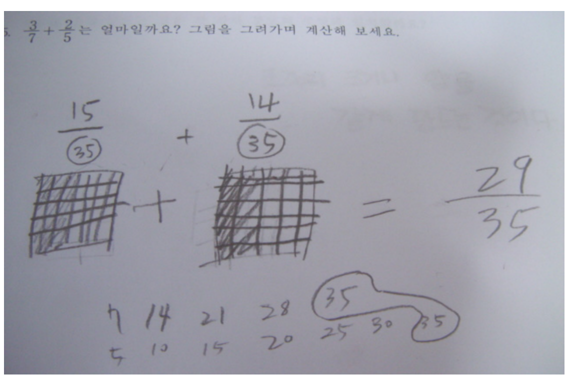
예를 들어 분수의 덧셈을 할 때,

$\frac{7}{3}+\frac{2}{5}$를 분모는 분모끼리 더하고, 분자는 분자끼리 더해서 $\frac{5}{12}$라고 말을 할 수 없다. 왜냐하면 $\frac{3}{7}$은 전체를 7개로 나눈 것 중의 3개이고, $\frac{2}{5}$은 전체를 5개로 나눈 것 중의 2개이기 때문에 $\frac{3}{7}$과 $\frac{2}{5}$는 조각의 크기가 서로 달라서 직접 더할 수가 없는 것이다. 그렇기 때문에 크기나 양을 똑같이 나눈 다음에 더해주어야 한다.

“그렇다면, 크기나 양을 똑같이 나누기 위해서는 어떻게 해야 할까?” 우리들은 수박을 나누어 먹을 때, 각각의 수박조각의 크기가 서로 다르면 칼로 다시 수박을 여러 조각으로 나누어서 같은 크기(양)의 수박조각으로 만들어 나누어 먹는다. 이와 같은 방법으로 $\frac{7}{3}+\frac{2}{5}$의 각

각의 나누어진 조각의 크기를 같게 만들기 위해서는 각각의 조각을 다시 잘라서 크기를 같게 만들어 주어야 한다. 여기에서 눈여겨볼 것은 분모와 나누어진 조각의 개수가 일치한다는 것이다. 즉, 나누어진 개수(분모)가 같다면 크기와 양도 같다는 것이다. 그리고 $\frac{3}{7}$은 처음에 가로로 7조각으로 나누어져있는 상태에서 세로로 한 번씩 더 자르면 조각의 개수가 7, 14, 21, 28, 35, …씩 늘어나고, $\frac{2}{5}$는 처음에 가로로 5조각으로 나누어져있는 상태에서 세로로 한 번씩 더 자르면 조각의 개수가 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, …씩 늘어나서 각각 처음 조각의 배수만큼 늘어나는 것을 볼 수 있고 조각의 개수가 같아지는 부분(크기가 같아지는 부분)은 바로 7과 5의 공통인 배수 즉, 공배수임을 알 수 있게 된다. 그래서 크기가 같아지는 조각의 개수는 35뿐만이 아니라 35, 70, 105, … 등 여러 개가 있음을 알 수 있다. 즉, 모든 공배수는 통분을 할 때, 모두 다 사용할 수 있다. 이러한 과정이 바로 통분이다. 그러나 나누어진 수가 크면 클수록 계산이 복잡해지기 때문에 공배수(조각의 개수가 같아지는 부분)중 가장 작은 공배수(최소공배수)인 35를 택하면 조각의 개수가 적으면서도 조각의 크기를 같게 만들 수 있다. 그래서 통분을 할 때, 최소공배수를 주로 사용한다.

분모를 통분하기 위해서 처음 나누어져 있는 조각을 계속 자르다 보면, 분모뿐만이 아니라 분자 또한 개수가 늘어나는 것을 알 수가 있다. 그리고 그 개수는 분모가 늘어나는 비율과 일치하게 늘어난다. 즉 분모의 개수가 늘어나면서 분자의 개수도 분모가 늘어난 배수의 크기만큼 늘어나기 때문에 $\frac{3}{7}$은 $\frac{15}{35}$로 $\frac{2}{5}$는 $\frac{14}{35}$로 되어 전체 35개 중의 29개이므로 $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$는 $\frac{15}{35}+\frac{14}{35}=\frac{29}{35}$가 되는 것이다.



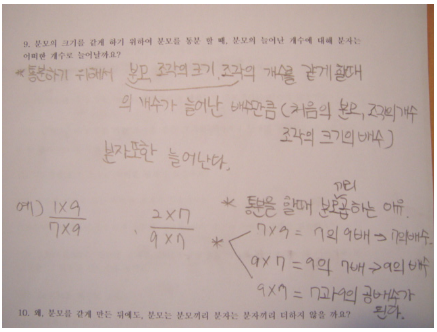
[그림 4] 분수의 덧셈에 대한 변형된 스키마(S3)

3) ⓞ, ⓟ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 3

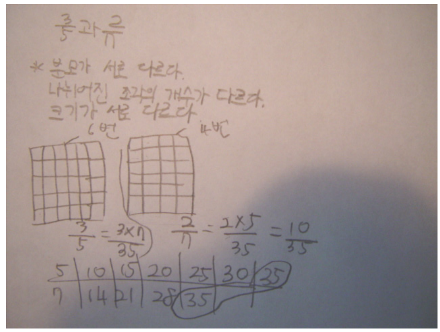
분모를 통분할 때, 분모끼리 곱하면 쉽게 통분을 할 수 있는데, 그 이유를 예를 들어 설명

하면, 분모끼리의 곱 7×9는 7의 9배, 9의 7배를 나타내므로 7×9는 7과 9의 공배수를 나타낸다. 그러므로 두 분모를 곱하면 쉽게 통분을 할 수 있다.

통분은 분수의 일차적 개념을 바탕으로 한 가장 중요한 개념이며, 같은 조각의 개수, 같은 조각의 크기, 같은 분모를 나타낸다.



[그림 5] 통분의 변형된 스키마(S1)



[그림 6] 통분의 스키마(S1)

나. 학생과 연구자(교사)의 토의

[프로토콜 3]

T: $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}$는 어떤 뜻을 가지고 있을까?

S1: 빵!

T: 선영이!

S1: $\frac{3}{7}$을 $\frac{2}{6}$번 더한 거예요.

T: 그런데 $\frac{2}{6}$번 더한다는 것을 어떻게 나타내지?

S1: 어! 그러네… 그럼 $\frac{3}{7}$의 $\frac{2}{6}$배인가… 그것도 좀 이상하고….

S2: 삐!

T: 진원이!

S2: $\frac{3}{7}$의 $\frac{2}{6}$요~

T: 좀 더 자세하게 얘기해 볼래?

ⓐ S2: $\frac{3}{7}$한 것의 $\frac{2}{6}$를 뜻하는 것 같은데… 아니에요?

T: 선생님은 무슨 뜻인지 알았는데, 다른 친구들을 위해서 좀 더 쉽게 얘기해 볼래?

ⓑ S2: 먼저 $\frac{3}{7}$을 하구요~ $\frac{3}{7}$한 조각을 다시 여섯 조각으로 나눈 것 중의 두 갠 것 같은데….

T: 진원이가 하는 얘기가 뭔지 이해한 사람?

S1, S2: 저요!

T: 그래, 진원이가 정확하게 얘기했구나! 보통 사람들은 그냥 분모는 분모끼리 곱하고 분자는 분자끼리 곱한다는 얘기만 하는데….

ⓒ S3: 저도 학원에서 그렇게만 배웠어요.

T: 그럼 우리 $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}$를 그림을 그려가면서 해볼까?

S1, S2, S3: 네!

ⓓ T: 그럼, 아까 진원이가 얘기한 대로 한 번 해보자. 먼저 $\frac{3}{7}$을 하고 다시 이렇게 세로로 6등분을 하면, 전체가 몇 조각이 되지?

ⓔ S1, S2, S3: 마흔 두 조각이요~

ⓕ T: 그럼, 색칠한 부분이 겹쳐진 것은 몇 조각이지?

ⓖ S1, S2, S3: 여섯 조각이요~

T: 분수로 나타내면?

ⓗ S1, S2, S3: $\frac{6}{42}$이요~

ⓘ T: 그렇지! 그런데 이렇게 숫자가 작으면 그림을 그려가면서 하기 편하지만, 나누어지는 숫자가 커지면 그리기가 힘들잖아~ 그러니까 여기에서 생각을 해야 해~ 여기에서 발견할 수 있는 건 다 말해 보자!

S2: 삐!

T: 진원이~

ⓙ S2: 선생님 같은 크기의 사각형으로 나누어져 있잖아요. 그러니까 꼭 사각형 넓이 구하는 것 같아요!

S1: 빵!

T: 선영이!

ⓚ S1: 진원이가 발표하는 것보고 생각났는데요…. 단위사각형 개수 구하는 것 같아요.

S3: 별!

T: 선하!

ⓛ S3: 사각형 넓이 구하는 것처럼요~ 전체 나누어진 개수도 (가로)×(세로)로 구하구요~ 겹쳐진 부분의 개수도 (가로)×(세로)로 구하면 돼요!

S2: 삐~ 삐~ 삐~

T: 그래, 진원이!

S2: 선생님! 분수의 곱셈에서요~ 왜, 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하는지 알았어요!

T: 한 번 나와서 얘기해 볼래?

ⓜ S2: 전체 나누어진 개수는 7×6이 되구요~ 겹쳐진 부분의 개수는 3×2가 돼요. 그리고 이것을 분수로 나타내면요~ $\frac{3\times2}{7\times6}$가 되서요~ $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}$가 $\frac{3\times2}{7\times6}$이 돼서, 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하는 것과 같아요.

T: 우리 진원이한테 박수 쳐주자~
T, S1, S2, S3: 짝! 짝! 짝!
S1: 선생님! 너무 재밌어요~
S2, S3: 저두요~
T: 정말? 하하하~
S1, S2, S3: 네~

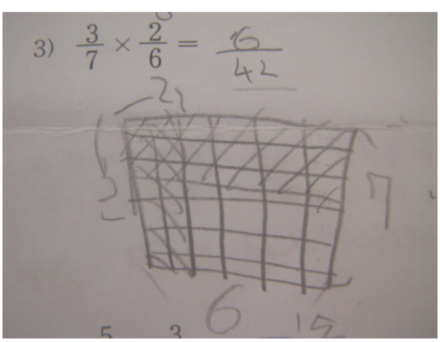
다. 토의된 내용 분석

[프로토콜 3]은 분수의 곱셈을 이전에 배웠던, 사칙 연산의 1차적 개념과 분수의 1차적 개념 그리고 사각형의 넓이에 대한 1차적 개념을 바탕으로, 연구 대상자들은 스스로 여러 가지 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 문제 해결에 접근하였다. 그리고 학원에서 암기식으로 선행 학습된 분수의 곱셈(ⓒ)에 대하여 분수의 스키마(ⓐ, ⓑ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ, ⓗ)와 사각형 넓이의 변형된 스키마(ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓛ. ⓜ)로 문제를 해결에 접근하였다. 상위 단계의 개념으로 올라갈수록 더 많은 개념과 스키마 그리고 변형된 스키마를 필요로 하였고, 이로 인해 학생들은 더욱더 다양한 접근 방법을 생각할 수 있었다. 위에서 발견된 변형된 스키마를 정리해 보면 다음과 같다.

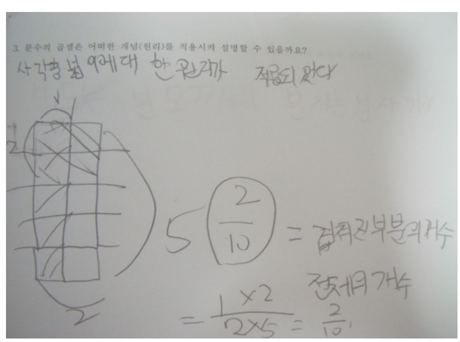
라. 발견된 변형된 스키마 정리

1) 분수의 스키마(ⓐ, ⓑ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ, ⓗ)와 사각형 넓이의 변형된 스키마(ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓛ. ⓜ)의 내용을 바탕으로 한, 분수의 곱셈에 대한 변형된 스키마 1

$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}$는 “$\frac{3}{7}$의 $\frac{2}{6}$는 얼마일까요?”라는 의미를 나타낸다. 이것은 전체를 7개로 나눈 것 중의 3개를 색칠한 후, 그것을 또다시 6개로 나눈 것 중의 2개를 색칠하여 색칠이 겹쳐진 부분을 구하는 것이므로 아래의 [그림 7]과 같이 보여줄 수 있다.



[그림 7] 분수의 곱셈에 대한 변형된 스키마(S3)



[그림 8] 분수의 곱셈에 대한 변형된 스키마(S3)

[그림 7]과 같이 전체의 나누어진 개수 42개중의 겹쳐진 부분의 개수가 6개이므로 $\frac{6}{42}$이 되고, 이것을 식으로 나타내면, $\frac{\text{겹쳐진 부분의 개수}}{\text{전체의 나누어진 개수}}$가 된다. 이 때, 전체의 나누어진 개수와 겹쳐진 부분의 개수를 빨리 세기 위해서 사각형의 넓이 원리인 (가로)×(세로)를 이용하면, $\frac{3\times2\ (\text{겹쳐진 부분의 개수})}{7\times6\ (\text{전체의 나누어진 개수})}$가 된다. 그래서 분수의 곱셈은 분모는 분모끼리 곱하고 분자는 분자끼리 곱하여 답을 구할 수 있는 것이다($\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{6}{42}$).

V. 결 론

본 연구에서는 초등학교 3학년 영재아들을 대상으로 4학년과 5학년에서 배우는 분수의 덧셈과 곱셈을 내용으로 하였을 때, 정확한 1차적 개념의 인지와 1차적 개념들의 연결로 스스로 형성한 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 어떻게 문제를 해결해 나가는지, 그리고 연구 대상자들(영재아)의 스키마와 변형된 스키마가 어떻게 상위 수준으로 발전해 나가는지, 또한 연구 대상자들(영재아)의 개념구성과 문제해결력에서의 스키마는 어떻게 변형을 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다. 예비연구에서는 스키마를 이용한 학습을 경험하지 않은 영재아들이 어떻게 개념을 이해하고 구성해 나가는지, 문제 해결력에서 어떤 양상이 나타나는지를 알아보았고, 이를 바탕으로 본 연구를 위한 연구 도구를 개발하였다. 이렇게 확정된 연구도구를 바탕으로 크게 두 가지 방향으로 연구 문제를 구분하였다. 첫째, 사칙연산 각각의 1차적 개념의 이해로 분수의 덧셈에 대하여 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하는가? 둘째, 사칙연산 각각의 1차적 개념과 분수의 덧셈에 대한 스키마와 변형된 스키마를 어떠한 형태로 구성하여 분수의 곱셈에 대한 관계적 이해를 하는가?

위 연구문제를 해결하기 위하여 본 연구자는 대전에 위치한 K초등학교 3학년 영재아 세 명을 대상으로 질적 연구 방법 중 사례연구[15]를 사용하였다. 연구 기간 동안 학생들이 스키마와 변형된 스키마를 어떻게 형성하고 적용하는지를 알아보기 위해 활동지와 학생들 간의 토의 내용을 중심으로 연구 분석 하였다. 그 결과 첫째, 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발달할 때, 정확한 1차적 개념에 대한 인지와 1차적 개념들의 연결로 스스로 형성한 스키마와 변형된 스키마가 중요한 요인으로 작용을 한다는 것을 알 수 있었다. 둘째, 1차적 개념끼리의 연결에 의한 2차적 개념의 형성보다는 정확한 1차적 개념에 대한 인지로 인해서 만들어지는 변형된 1차적 개념이 2차적 개념으로 발달할 때, 무엇보다도 중요한 역할을 하는 것을 볼 수 있었다. 또한 아직 배우지 않은 상위수준의 수학 내용에 접근해 나갈 때, 스스로가 형성한 변형된 스키마를 사용하여 상위수준의 문제들을 여러 가지 창의적인 방법으로 해결해

15) 특정 개인의 부적응의 원인을 발견하고 이를 제거하기 위한 조치를 취하고자 검사, 관찰, 면접, 질문지법을 통하여 그 개인의 특성과 여러 가지 상황을 조사 연구하는 일(동아출판사, 1985, p. 1040).

나가는 것을 볼 수 있었다. 이와 같이 스키마와 변형된 스키마는 Vygotsky의 ZPD(근접발달 영역)이론처럼 영재아들의 수학에 대한 잠재적 발달 수준을 발전시킬 수 있을 뿐만 아니라, 기존의 스키마에 대한 관계적 이해와 스키마의 재구성을 가능하게 함으로써 영재아들로 하여금 수학에 대한 흥미와 창의적인 문제해결 능력 그리고 수학의 필요성을 스스로 깨닫게 하는 데 중요한 역할을 하였다. 주장의 원인을 찾고 근거를 논리적으로 설명해 나가는 힘은 어려서부터 길러져야 한다(King, 1973; Reid, 2000; Russell, 1999). 스키마와 변형된 스키마를 이용한 수업은 영재아들로 하여금 조직화되고 추상화된 수학을 능동적으로 구성하게 함으로써 수학에 대하여 논리적으로 설명해 나갈 수 있는 힘을 가지게 할 수 있을 뿐만 아니라 고학년의 수학적 내용과 문제에 대해서도 관계적으로 이해를 하고 여러 가지 창의적인 방법으로 해결해 나갈 수 있는 힘 또한 가지게 하는 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다. Vygotsky의 입장은 성인의 도움을 통하여 학생들의 발달 수준을 향상시킬 수 있다는 점에서 교사의 지도에 의한 학교교육의 중요성을 뒷받침한다고 볼 수 있다(황혜정 외, 2007). 따라서 교사들의 1차적 개념에 대한 연구와 스키마 그리고 변형된 스키마에 대한 수학적 연구들이 보다 다양하고 폭넓게 이루어져야 한다고 생각한다.

참 고 문 헌

고정일 외 백과사전 편찬부 (2003). **파스칼 세계대백과사전**. 서울: 동서문화사.

고은성, 이경화, 송상헌 (2008). 수학영재 학생들의 정다면체 정의 구성 활동 분석. **영재교육연구, 18**(1), 53-77.

동아출판사 (1985). **동아 新크라운 국어사전**. 서울: 동아출판사.

라병소 (1999). **수학 학습에서의 관계적 이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구**. 박사학위논문. 단국대학교.

방정숙, 정희진 (2006). 학습자중심 교수법에 대한 초등교사의 이해와 실행 형태: 수학적 의사소통을 중심으로. **학습자중심교과교육연구, 6**(1), 297-321.

송상헌 (1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 박사학위논문. 서울대학교.

오영열 (2002). 초등학교 교사들의 수업관행과 학생들의 학습환경 인식과의 관계. **학교수학, 4**(2), 237-246.

이종희, 김선희 (2002). 수학적 의사소통의 지도에 관한 실태조사. **학교수학, 4**(1), 63-78.

이종희, 박선욱 (2002). 정보처리 양식에 따른 수학적 의사소통 능력과 문장제 해결능력과의 관계. **학교수학, 4**(2), 147-160.

이해영 (2005). **초등학교 5, 6학년 교사들의 수학적 의사소통 수업에 대한 인식과 교수실제**. 석사학위논문. 한국교원대학교.

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2007). **수학교육학 신론**. 서울: 문음사.

Brown, S. I., Cooney, T. J., & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on eacher education* (pp. 639-656). New York:

Macmillan.

Curio, F. R. (1990). Mathematics as communication: Using a language-experience approach in the elementary grade. In T. Cooney, & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s. 1990 yearbook* (pp. 69-75). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Fennema, E., Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Carey, D. A. (1993). Using children`s mathematical knowledge in education. *American Educational Research Journal, 30*(3), 555-583.

Johnson, D. T., & Sher, B. T. (1997). *Resource Guide to Mathematics Curriculum Materials for High-ability Learners in Grades K-8. Williamsburg*, VA: Centre for Gifted Education, College of William and Mary.

Johnson, D. T. (1993). Mathematical Curriculum for the Gifted. In J. VanTassel-Baska (Ed.), *Comprehensive Curriculum for Gifted Learners* (pp. 231-261). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

King, I. K. (1973). A Formative Development of an Elementary School Unit on Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*(1), 57-63.

Kuhs, T. M., & Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of Knowledge, Skills, and dispositions*. Center on Teacher Education, Michigan State University.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics teacher`s understanding of fundamental mathematics in China and the United states*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

NCTM (1991). *Professional standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

National Research Council (1989). *Everyday counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a begging elementary teacher` mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 550-576.

Reid, D. A. (2000). *The Psychology of Student's Reasoning in School Mathematics: Grade2 Research Report*. Acadia University Wolfville, Nova scotia, Canada.

Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L.V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp.22-36). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sheffield, L. J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. R. (1998). 수학학습심리학 [황우형 역]. 서울: 민음사. (원본출간년도: 1987).

Stein, M. K., & Brown, C. (1997). Teacher learning in a social context: Integrating collaborative and institutional processes with the study of teacher change. In E. Fennema, & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 155-192). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

= Abstract =

A Case Study about Influence of Primary Mathematic Concepts on the Composition of Mathematic Concepts in 3rd grade Prodigies of Elementary Schools - Focusing on Addition and Multiplication of Fractions -

Kim, Hwa Soo

Sehan University

On the subjects of elementary 3rd grade three child prodigies who had learned the four fundamental arithmetic operations and primary concepts of fraction, this study conducted a qualitative case research to examine how they composed schema of addition and multiplication of fractions and transformed schema through recognition of precise concepts and linking of concepts with addition and multiplication of fractions as the contents. That is to say, this study investigates what schema and transformed schema child prodigies form through composition of primary mathematic concepts to succeed in relational understanding of addition and multiplication of fractions, how they use their own formed schema and transformed schema for themselves to approach solutions to problems with addition and multiplication of fractions, and how the subjects'concept formation and schema in their problem solving competence proceed to carry out transformations. As a result, we can tell that precise recognition of primary concepts, schema, and transformed schema work as crucial factors when addition of fractions is associated with multiplication of fractions, and then that the schema and transformed schema that result from the connection among primary mathematic concepts and the precise recognition of the primary concepts play more important roles than any other factors in creative problem solving with respect to addition and multiplication of fractions.

Key Words: Primary concepts, Secondary concepts, Schema, Transformed schema

1차 원고접수: 2014년 1월 8일
수정원고접수: 2014년 2월 20일
최종게재결정: 2014년 2월 21일

<부록>

학습 내용(1)

3학년 **분수**

1. 분수란 무엇일까요?
2. 분수는 무엇이 바탕이 되어서 만들어졌을까요?
3. 분수를 계산하기 위해서 제일 먼저 해야 할 일은 무엇일까요?
4. 분수와 자연수는 무엇이 다를까요?
5. 분수에서 분모는 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?
6. 분수의 덧셈을 할 때, 분모를 같게 만드는 것은 왜일까요?
7. 분수에서 분모를 같게 만드는 과정을 무엇이라고 할까요?
8. 분수에서 분모를 같게 만든다는 것은 수학적으로 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?

학습 내용(2)

3학년 **같은 크기의 분수 만들기**

1. 분수와 배수는 어떤 관계가 있을까요?
2. 분수와 약수는 어떤 관계가 있을까요?
3. 분수와 배수와 약수의 관계는 분수에서 무엇에 영향을 줄까요?
4. 똑같은 크기로 나누어진 조각을 다시 한 번 나누면 전체의 조각은 얼마나 늘어날까요?
5. $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$와 크기가 같은 분수 5개만 써 보세요.
6. $\frac{3}{5}$과 $\frac{2}{7}$의 크기를 가진 조각을 같은 크기의 조각으로 만들기 위해서는 각각의 조각을 어떻게 몇 번씩 자르면 될까요?
7. $\frac{3}{5}$과 $\frac{2}{7}$의 조각의 크기를 같게 할 때, 분수의 무엇을 같게 하는 것과 같을까요? 그리고 이때, 같이 변하는 것은 무엇이며 어떤 규칙으로 변할까요?

학습 내용(3)

3학년 **분수의 덧셈**

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$은 직접 서로 더할 수 있을까요? 더할 수 있다면 더할 수 있는 이유를 쓰고, 더할 수 없다면 더할 수 없는 이유를 써 보세요.

2. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$은 얼마일까요? 그림을 그려가며 계산해 보세요.
3. 분수의 덧셈에서 분모를 같게 한 후에 계산할 때에도 분모끼리 더할까요? 분모끼리 더 한다면 그 이유를 설명하고, 분모끼리 더하지 않는다면 그 이유를 설명해 보세요.
4. 분모를 같게 할 때, 왜, 분모끼리 곱할까요?
5. $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$는 얼마일까요? 그림을 그려가며 계산해 보세요.
6. 분수에서 조각의 크기를 같게 하는 것은 무엇을 같게 만드는 것과 같을까요?
7. 개수를 같게 만드는 것은 각각의 분모의 무엇과 일치할까요?
8. 분모의 수를 같게 만들 때 분모의 수가 클 때 계산이 편할까요? 작을 때 계산이 편할까요? 그리고 각각의 분모의 수가 같은 것 중에서 가장 작은 수를 무엇이라고 부를까요?
9. 다음을 계산해 보세요.

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=$	2) $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$	3) $\frac{3}{6}+\frac{2}{5}=$	4) $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=$	5) $\frac{1}{7}+\frac{3}{4}=$

학습 내용(4)

3학년 **분수의 곱셈**

1. $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$는 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?
2. 1번 문제를 그림을 그려가며 계산해 보세요.
3. 분수의 곱셈은 어떠한 개념(원리)을 적용시켜 설명할 수 있을까요?
4. 두 수의 곱셈은 서로의 위치를 바꾸어 곱하여도 그 결과는 같습니다. 이와 같은 법칙을 무엇이라고 할까요? 그리고 곱셈과 같이 이러한 법칙이 성립하는 것에는 무엇이 있을까요?
5. 분수의 곱셈에 대한 공식을 위의 1~4번까지의 내용을 근거로 하여 유추해 보세요.
6. $\frac{3\times4}{5\times7}$는 다른 모양으로 어떻게 표현할 수 있을까요? 아는 대로 많이 표현해 보세요.
7. 다음 식을 그림을 그려가며 계산해 보세요.

1) $\frac{5}{6}\times\frac{3}{8}=$	2) $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=$	3) $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=$	4) $\frac{5}{10}\times\frac{3}{5}=$	5) $\frac{7}{9}\times\frac{2}{3}=$