한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 4, 805-816, December 2014

실제적 함의에 대한 학생들의 이해

박달원1)

본 연구에서는 형식적 함의에 대한 역사적 발달과정을 살펴보고 형식적 함의에 대하여 대학생들이 어떻게 이해하는지를 분석하였다. 또한 고등학생들과 예비대학생들을 대상으로 카드모임에 대한 실제적 함의에 대하여 조사한 결과 주어진 카드 모음에서 성립하는 패턴을 명제 $p \to q$로 나타낼 때에는 명제 $p \to q$를 $\sim p \vee q$와 동치인 명제로 이해하는 학생들이 가장 많았지만 명제 $p \to q$가 성립하는 카드를 모으는 과정에서는 조건명제 $p \to q$를 $p \wedge q$와 동치인 명제로 이해하는 학생들이 가장 많은 것으로 조사되었다.

주요용어 : 실제적 함의, 형식적 함의, 명제

Ⅰ. 서론

기본적인 수학의 구조와 관계를 학생들이 어떻게 이해하는지에 대한 연구는 그동안 많이 있었지만 논리적 관계의 구조와 논리적 함의에 대한 학생들의 이해에 대한 연구는 비교적 적은 편이라고 볼 수 있다. O′Brien 외(1971)는 가정이 거짓이 되는 함의에 대하여 아동들은 잘 이해하지 못하며 조건명제를 그의 역과 동일하게 생각하는 경향이 많다고 하면서 이러한 현상을 ‘아동의 논리’라고 하였다.

일반적으로 실생활에서의 규칙이나 패턴을 명제 $p \to q$로 표현될 때, p가 참인 경우에 q가 참이면 주어진 명제 $p \to q$를 참으로 판정하고 q가 거짓일 때에는 명제 $p \to q$를 거짓으로 판정하지만 p가 거짓인 경우는 고려하지 않는다. 그러나 논리학자들은 논리적 가능성에 따라 진릿값을 정할 필요성을 인지하였으며, 19세기 말부터 20세기 초까지 Peirce, Russell, Wittgenstein 등의 논리학자들에 의하여 형식적인 진리표에 대하여 논의되었다.

대학에서 진리표를 공부한 학생들은 p가 거짓일 때, 명제 $p \to q$가 참이라는 정의를 접하게 되지만 대부분의 학생들은 이에 대한 충분한 이해없이 기계적인 정의로 수용하는 경우가 많다고 볼 수 있다. 이는 논리적 함의 관계의 구조를 직관적으로 동화하지 못했기 때문이라고 할 수 있다.

고등학교에서는 진리집합을 이용하여 조건명제에 대한 참과 거짓을 정의한다. 2007개정 교육과정의 중학교 2학년에서는 명제 $p \to q$ 를 기호로 표현하는 정도로만 다루고, 고등학교에서는 명제와 조건의 의미는 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다루며, 명제의

1) 공주대학교 수학교육과 (dwpark@kongju.ac.kr)

역, 이, 대우의 참과 거짓을 다루었다. 그러나 2009개정 교육과정에서는 중학교에서 명제를 다루지 않고 고등학교 수학Ⅱ에서 다루며 명제의 ‘이’라는 용어는 삭제된 반면에 대우를 이용한 증명법과 귀류법이 추가되었다.

박달원(2009)은 Wason(1977)의 후속연구를 통하여 p가 거짓일 때, 명제 $p \rightarrow q$에 대하여 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 조사하기 위하여 실생활문제와 형식적인 카드문제를 중학생들에게 제시하여 학생들이 어떻게 응답하는지를 분석하였다. 실생활의 문제에서는 p가 거짓일 때, 명제 $p \rightarrow q$가 참이라고 응답한 중학생들은 설문대상 27명 중에서 17명(45.2%)으로 나타났으며 카드문제에서는 4명(12.9%)으로 조사되어 카드문제 보다 실생활에서 높게 나타났다. 실생활에서의 행동이 규칙에 맞는 것인지 아닌지를 판정할 때에는 주어진 규칙성뿐만 아니라 사회에서 통념적으로 인정되는 상식적인 사고가 작동되었다고 볼 수 있지만 카드에서는 그러한 실생활의 가치적인 인식 보다는 형식적인 사고가 주로 작동 되었기 때문에 발생된 결과로 볼 수 있다. 카드의 규칙을 명제 $p \rightarrow q$로 설명하고 제시된 각각의 카드가 주어진 규칙에 맞는 카드인지 아닌지를 판정하는 문제에서는 87.1%의 중학생들이 p가 거짓일 때, 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 판정하지 못한다는 것이다.

본 연구에서는 p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 정의하게 된 역사적 과정을 살펴보고 이에 대하여 대학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 분석하고 카드모델을 도입하여 고등학생들에게 내재된 조건명제에 대한 인식을 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 조건명제의 형식화

p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$가 참이라는 형식적인 정의에 대하여 본격적으로 연구된 것은 19세기 후반기라고 볼 수 있다. Peirce(1839~1914)는 논리학자로서 전 생애를 통하여 명제에 대하여 연구하였으며 ‘x이면 y이다.’라는 명제를 연결사 ‘$\multimap$’를 이용하여

$$x \prec y$$

로 나타내었다(Peirce, 1880).

Peirce(1885)는 명제가 참일 때, 라틴어 verum의 첫 글자 v로 나타내고, 거짓일 때에는 라틴어 falsum의 첫 글자 f로 나타냈으며, ‘x가 참이면 y가 참이다.’라는 명제를 방정식 $(x-f)(v-y)=0$으로 표현하였다. 이 방정식에서는 $x=v$일 때, $y=v$를 얻게 되지만, $x=f$ 또는 $y=v$가 방정식의 근이 되기 때문에 이 관계는 조건명제 $x \prec y$에 대한 형식적인 정의로 인식하였으며, 조건명제를 나타내는 방정식을 통하여 $x \prec y$이고 $y \prec z$이면 $x \prec z$를 연역적으로 증명할 수 있음을 보였다.

그는 조건명제가 일반적으로 실제로 일어날 수 있는 것에만 제한되는 것이 아니라 모든 가능성을 통하여 불변적으로 참이 되는 것을 나타낸다고 하였다. 그러나 조건명제를 방정식으로 나타내는 것은 식의 값이 0이 될 때, 조건명제가 참이라고 정의해야 하는 단점을 가지고 있다고 판단하고 이러한 단점을 해소하기 위하여 조건명제 $x \prec y$를 아래와 같은 함수로 표현하였다.

$$v - \frac{(x-f)(v-y)}{v-f}.$$

이 함수에서는 $x=v$이고 $y=f$이면 함수는 f가 되지만 $x=f$ 또는 $y=v$이면 주어진 함수는 v가 된다. 이러한 함수의 도입으로 조건명제 $x \prec y$에 대한 형식화가 더욱 촉진되었다고 볼 수 있다.

Peirce(1885)는 조건명제 $x \prec y$가 참이라는 것은 x가 참이 되는 모든 범주에서 y가 참이 되는 것을 의미하고 x가 참이지만 y가 거짓이 되는 실제적인 경우에는 조건명제 $x \prec y$가 거짓이라고 하였다. 만일 가능한 전 범위를 통하여 y가 참일 때, 조건명제 $x \prec y$가 참인 것으로 정의되는 것이 논리적이라고 하였으며, 만일 모든 가능성을 통하여 x가 참이 되는 경우가 없다면 그 것은 큰 의미가 없기 때문에 조건명제 $x \prec y$를 참 또는 거짓으로 정의할지라도 이것은 큰 의미가 없다고 하였다. 그러나 전제가 거짓이 되는 경우가 조건명제 $x \prec y$를 거짓으로 만드는 경우가 없기 때문에 x가 거짓이 되는 조건명제 $x \prec y$를 참으로 분류하는 것이 타당하다고 하였다.

따라서 일반적으로 x가 거짓 또는 y가 참인 경우에 $x \prec y$를 참이라고 하고 x가 참이고 y가 거짓인 경우에 $x \prec y$를 거짓으로 정의하는 것이 논리적이라고 하였다. 이것은 비록 실제적 상태에 국한하여 의미를 찾을 수 있지만 논리적 필요성에 의하여 논리적 범주안의 어떠한 상태에도 적용할 수 있게 된다. 예를 들면, $x \prec y$가 거짓인 것으로부터 $z \prec x$가 참이라는 것을 추론할 수 있다. 이것은 x가 참이고 y가 거짓인 실제적 상태로부터 z가 거짓 또는 x가 참이라는 것을 추론하는 것이 아니고 x가 참이고 y가 거짓이 되는 어떤 상황에서도 z가 거짓 또는 x가 참이라는 것을 의미하는 것이다.

진리표를 처음으로 사용한 학자가 누구인지에 대한 논란이 현재까지 지속되고 있다고 볼 수 있다. Shosky(1997)는 1912년경에 Russell과 Wittgenstein이 진리표에 대하여 토론한 증거가 있으며 1914년 Russell의 하버드 대학 강의에 참석한 Eliot라는 학생의 논리학 노트에서 진리표가 발견되었다고 하였다. 그러나 Anellis(2012)는 발표되지 않은 Peirce의 원고를 분석하여 이미 1893년에 Peirce에 의하여 진리표가 시작되었다고 주장하고 있다.

Russell은 함의(implication)를 실제적 함의(material implication)와 형식적 함의(formal implication)로 구분하였다. '소크라테스가 사람이면 소크라테스는 죽기 마련이다.'와 같은 명제를 실제적 함의라 한다. 이 명제를 변수 x를 사용하여 표현하면 'x가 사람이면 x는 죽기 마련이다.'로 표현할 수 있는데 여기서 x는 사람만을 의미하기 보다는 모든 변수를 나타내는 것으로 이해하였다. 즉, 이 명제는 '모든 x에 대하여 $\phi(x)$이면 $\psi(x)$이다.'로 표현될 수 있다. 이와 같이 변수를 이용하여 표현된 함의를 형식적 함의(formal implication)라고 하였다.

변수가 존재하지 않는 것 같아 보이는 명제도 변수를 이용하여 표현할 수 있다. 명제 $1+1=2$는 어떤 변수도 존재하지 않으며 또한 함의라고도 할 수 없지만 '만일 x가 1이고 y가 1이면, x와 y의 합은 2이다'라는 함의로 나타낼 수 있다. 이와 같이 수학적인 명제는

변수를 포함하는 함의로 표현될 수 있다.

일반적으로 수학에서는 변수의 범위를 제한하여 명제를 나타내는 경우가 많다. 'x,y가 실수이면 $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$이다.'라는 명제에서 x,y가 실수이면 가정과 결론이 모두 참이 되고 x,y가 각각 소크라테스와 플라톤일 때, 명제의 가정과 결론은 모두 거짓이며, x,y가 복소수이면 가정은 거짓이지만 결론은 참이 된다. 이와 같이 변수의 범위를 제한하지 않는 것이 논리적이라고 하였다. 따라서 수학적인 명제는 모든 변수 $x,y,z,\ldots$에 대하여 $\phi(x,y,z,\ldots)$와 $\psi(x,y,z,\ldots)$가 명제일 때, '$x,y,z,\ldots$의 모든 값에 대하여, $\phi(x,y,z,\ldots)$이면 $\psi(x,y,z,\ldots)$이다.'로 나타낼 수 있다(Russell, 1996).

이처럼 조건명제를 명제함수를 이용하여 표현할 때, 즉, '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'에서 $p(x)$가 참이 되는 변수범위를 확장하면서 자연스럽게 $p(x)$를 거짓이 되게 하는 변수가 존재하기 때문에 이러한 경우에 $p(x) \rightarrow q(x)$를 참으로 정의하는 것이 논리적이라는 것이다. 이러한 논리의 연장선에서 러셀은 'p이면 q이다.'가 참이면 p와 q가 동시에 참이든지 거짓이든지 또는 p가 거짓이고 q가 참이지만, p가 참이고 q가 거짓인 경우는 불가능하다고 하였으며 이 명제는 'p가 거짓 또는 q가 참이다.' 라는 명제와 동치가 된다고 하였다.

Ⅲ. 조건명제에 대한 학생들의 인식

1. 연구문제

본 연구에서는 대학에서 집합론을 공부한 학생들을 대상으로 p가 거짓일 때, q의 진릿값에 관계없이 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 정의하는 이유가 무엇인지를 설명하라는 설문지를 통하여 명제 $p \rightarrow q$에 대하여 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 파악하고 카드모델을 도입하여 이 모델에서 나타나는 실제적 함의를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 분석하였다. 카드모음에서 나타나는 패턴을 명제 $p \rightarrow q$로 나타낼 때와 명제 $p \rightarrow q$가 성립하는 카드를 모으는 과정에서 명제 $p \rightarrow q$에 대한 학생들의 이해가 어떻게 나타나는지를 분석하고자 예비 설문지를 작성하여 2012년 12월부터 2013년 4월에 걸쳐 고등학생, 대학생들을 대상으로 설문조사를 실시하였으며, 설문조사를 분석한 결과에 의하면 명제 $p \rightarrow q$에 대한 이해의 유형이 $p \wedge q$, $p \leftrightarrow q$, $\sim p \vee q$ 등으로 구분되었다.

본 연구에서는 2013년 4월에 조사한 설문지의 문제점을 수정·보완하였으며 카드모음에서 성립되는 패턴을 명제 $p \rightarrow q$로 나타낼 때와 명제 $p \rightarrow q$가 성립하는 카드를 최대한 많이 선택하는 과정에서 나타나는 학생들의 사고 유형을 조사하기 위하여 아래와 같은 연구문제를 설정하였다.

【연구문제 1】 p가 거짓인 명제 $p \to q$에 대하여 대학생들은 어떻게 이해하는가?
【연구문제 2】 카드 모음에서 성립하는 패턴을 명제 $p \to q$로 나타낼 때, 명제 $p \to q$에 대하여 고등학생들은 어떻게 이해하는가?
【연구문제 3】 모은 카드에서 명제 $p \to q$가 참이 성립하도록 최대한 많은 카드를 선택할 때, 명제 $p \to q$에 대하여 고등학생들은 어떻게 이해하는가?

2. 설문지의 내용

본 연구에서는 설문지를 A, B형으로 구분하고 A형의 설문지는 집합론을 공부한 대학생들을 대상으로 연구문제 1을 조사하기 위한 것이다.

2013년 3월 예비조사에서는 '진리표에서 p가 거짓일 때, 명제 $p \to q$를 참으로 정의하는 이유를 설명하시오.'라는 설문조사를 K대학교 2학년 38명을 대상으로 실시하였으며 그 조사결과는 아래의 표와 같다.

[표 III-1] p가 거짓인 명제 $p \to q$가 참이 되는 이유

분류	$p \to q \equiv \sim p \vee q$	진리표	$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$	무응답
인원수 (38명)	10(26.3%)	9(23.7%)	4(10.5%)	15(39.5%)

응답자의 39.5%인 15명이 무응답으로 조사되었고 특히 '진리표에서 p가 거짓일 때'라는 문장을 기술했음에도 불구하고 9명(23.7%)의 학생들이 진리표에서 p가 거짓일 때, 명제 $p \to q$를 참으로 정의했기 때문이라고 그 이유를 설명하였다. 따라서 2014년 본 설문지에서는 진리표를 제시하고 '진리표에서 p가 거짓일 때, 명제 $p \to q$를 참으로 정의하는 이유를 설명하라.'는 것으로 수정·보완하여 '진리표'라는 이유를 학생들이 제시하지 못하도록 하였다.

B형의 설문지는 실제적 함의에서 p가 거짓이 되는 경우, 학생들이 명제 $p \to q$를 어떻게 이해하고 있는지를 분석하기 위하여 카드모델을 도입하고 연구문제 2와 연구문제 3을 조사하기 위한 문항으로 구성하였다. 문항 1에서는 네 장의 카드를 제시하고, 이 카드모음에서 성립하는 규칙에는 ○표, 성립하지 않는 규칙에는 ×표 하도록 하였다. 제시된 소문항의 질문 형태는 조건명제 형태로 주어졌으며 전제 p가 참이 되는 카드가 반드시 존재하는 경우로 제한하였다.

【문항 1】 아래와 같이 네 장의 카드가 주어졌다. 네 장의 카드에서 성립하는 규칙을 설명한 것 중 옳은 문장의 괄호 안에는 ○표, 틀린 문장의 괄호 안에는 × 표 하시오.

소나무	호랑이	참새	고양이
4	6	8	7

(1) 새의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 짝수가 적혀 있다. (　　　　)
(2) 홀수가 적혀 있으면 그 카드에는 동물의 이름이 적혀 있다. (　　　　)
(3) 짝수가 적혀 있으면 그 카드에는 새의 이름이 적혀 있다. (　　　　)
(4) 나무의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 홀수가 적혀 있다. (　　　　)

문항 2는 연구문제 3을 조사하기 위한 것이다. 예비조사에서는 ‘모은 카드에서 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 카드를 선택하여라.’라는 질문으로 문항 2를 구성하여 설문조사를 실시하였다. p가 거짓이 되는 카드를 전혀 선택하지 않고 p와 q가 참이 되는 카드만을 선택한 학생들과 p가 거짓 또는 q가 참이 되는 카드를 선택한 학생들은 형식적으로 구분되지만 두 부류의 학생들의 답변이 질문에 모두 부합된 것이기 때문에 이것으로 학생들의 사고 유형을 분류할 수는 없었다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 ‘모은 카드에서 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 최대한 많은 카드를 선택하여라.’라는 의미를 갖는 질문이 되도록 수정·보완하였다.

【문항 2】 아래와 같이 8장의 카드가 있다. 이 카드를 바구니에 담으려고 한다. 바구니에 모은 카드에서

‘도형의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 짝수가 적혀 있다.’

라는 패턴이 성립되도록 카드를 모아오면 카드 한 장 마다 1,000원의 상금을 준다고 한다. 상금을 최대한 많이 받기 위해서는 어떤 카드를 선택하면 되는가? 선택하는 카드에는 ○표, 선택하지 않는 카드에는 ×표 하시오.

(　　)	(　　)	(　　)	(　　)
삼각형	사각형	호랑이	사자
4	7	8	5

(　　)	(　　)	(　　)	(　　)
진달래	원	오각형	참새
3	10	9	10

※ 최대한 많이 받을 수 있는 상금은 (　　　　)원이다.

3. 설문조사 방법 및 결과분석

1) 명제 $p \to q$에 대한 대학생들의 이해

'진리표에서 p가 거짓일 때, q의 참과 거짓에 관계없이 명제 $p \to q$를 참으로 정의한다. 그 이유가 무엇인지를 설명하시오.' 라는 질문으로 K대학교 대학생 44명을 대상으로 2014년 3월에 설문조사를 실시하였으며 그 조사결과는 아래의 표와 같다.

[표 III-2] p가 거짓인 경우에 $p \to q$가 참이 되는 이유

분류	$p \to q \equiv \sim p \vee q$	p가 거짓일 때, p가 q에 영향을 미치지 못함	$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$	진리집합 ($P \subset Q$)	기타	무응답
인원수 (44명)	16(36.4%)	11(25.0%)	7(15.9%)	2(4.5%)	2(4.5%)	6(13.6%)

학생들이 답변한 내용은 [표 III-2]와 같이 여러 가지 유형으로 분류되었다. 16명(36.4%)의 학생들은 명제 $p \to q$와 명제 $\sim p \vee q$가 동치이기 때문에 명제 p가 거짓인 경우에 명제 $p \to q$가 참이 된다고 설명하였으나 이에 대하여 자세하게 이유를 설명한 학생은 없었다.

11명(25.0%)의 학생들은 $p \to q$라는 명제는 p가 참일 때, q를 참이 되게 하는 명제이고 p가 거짓일 때에는 q에 아무런 영향을 미치지 못하기 때문에 p가 거짓일 때, $p \to q$를 참으로 정의해야 한다고 설명하였다.

7명(15.9%)의 학생들은 명제 $p \to q$와 대우명제 $\sim q \to \sim p$가 동치이고 가정 p가 거짓이 되는 명제 $p \to q$를 거짓으로 정의하면 모순이 되기 때문에 명제 $p \to q$를 참이라고 정의해야 한다고 하였다.

2명(4.5%)의 학생들은 명제함수 $p(x), q(x)$의 진리집합을 이용하여 설명하였는데, 한 학생은 배수에 관련된 명제함수를 이용하였다. 명제 $p(x) \to q(x)$를 'x가 4의 배수이면, x는 2의 배수이다.'이라 할 때, $p(x)$의 진리집합을 P이라 하고 $q(x)$의 진리집합을 Q이라 하면 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p(x) \to q(x)$는 참이 된다고 하였다. 그러나 $p(x)$가 거짓일 때, 즉, x가 4의 배수가 아닌 수들 중에는 2의 배수도 있고 아닌 수도 있고, 이것이 $P \subset Q$에 영향을 미치지 않기 때문에 p가 거짓일 때, q의 진릿값에 관계없이 명제 $p \to q$를 참으로 정의해야 한다고 설명하였다.

2) 카드모델에 대한 고등학생들의 이해

2013년 4월에 B고등학교 2학년 학생 73명을 대상으로 조사하였으며, 3월에 실시한 예비조사 대상과 중복되지 않은 학생들을 대상으로 하였다. 2014년 2월에는 K대학에 합격한 예비대학생 32명을 대상으로 동일한 설문지로 조사하였다.

첫 번째 문항은 네 장의 카드 (소나무, 4), (호랑이, 6), (참새, 8), (고양이, 7)에서 성립하는 패턴을 찾는 문제이다.

[표 III-3] 문항1에 대한 고등학교 학생들에 대한 설문조사 결과

소문항	고등학생 정답 인원수 (73명)	예비대학생 정답 인원수 (32명)
(1) 새의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 짝수가 적혀 있다.	67(91.8%)	32(100%)
(2) 홀수가 적혀 있으면 그 카드에는 동물의 이름이 적혀 있다.	56(76.7%)	29(90.6%)
(3) 짝수가 적혀 있으면 그 카드에는 새의 이름이 적혀 있다.	65(89.0%)	32(100%)
(4) 나무의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 홀수가 적혀 있다.	71(97.3%)	32(100%)

설문조사대상 고등학생 73명의 학생 중에서 (1)번의 정답 '○'을 제시한 학생은 67명(91.8%), (2)번의 정답 '○'을 제시한 학생은 56명(76.7%), (3)번의 정답 '×'를 제시한 학생은 65명(89.0%), (4)번의 정답 '×'를 제시한 학생은 71명(97.3%)으로 나타났으며 예비대학생 32명의 학생 중에서 (1), (3), (4)번에 정답을 제시한 학생은 32명(100%)으로 나타났고 (2)번에 정답을 제시한 학생은 29명(90.6%)으로 제일 적었다.

[표 III-4] 문항1의 소문항 정답 수에 따른 학생 수

소문항 정답 수	4	3	2	1
고등학생(73명)	53(72.6%)	10(13.7%)	7명(9.6%)	3명(4.1%)
예비대학생(32명)	29(90.6%)	3(9.4%)	0	0

응답한 고등학생 73명의 학생 중 53명(72.6%)이 소문항 전체에 대한 정답을 제시하였고 10명(13.7%)은 3개의 정답을 제시하였으며 이 중에서 7명은 '홀수가 적혀 있으면 그 카드에는 동물의 이름이 적혀 있다'라는 (2)번을 틀린 것으로 답변하였다.

72.6%의 고등학생과 90.6%의 예비대학생들은 명제 $p \to q$의 진위판정에서 전제 p가 참이 되는 모든 카드에서 q가 참이 되면, 명제 $p \to q$를 참으로 판정하였다. 이때 학생들은 p가 거짓이 되는 카드의 존재가 명제 $p \to q$의 진위판정에 영향을 주지 않는다는 것을 잠재적으로 인식하고 있다고 볼 수 있다.

3) 문항 2에 대한 분석

두 번째 문항은 주어진 8장의 카드 (삼각형, 4), (사각형, 7), (호랑이, 8), (사자, 5), (진달래, 3), (원, 10), (오각형, 9), (참새, 10)에서 모은 카드에서 '도형의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 짝수가 적혀 있다.'라는 명제를 만족하는 카드를 최대한 많은 카드를 선택하는 문제이다.

이 조건명제를 $p \to q$로 나타낼 때, 설문에 응답한 73명의 응답결과를 분석한 결과 학생들이 선택한 방법은 $\sim p \vee q$형, $p \wedge q$형, $p \leftrightarrow q$형으로 분류되었다.

[표 III-5] 문항 2의 $p \rightarrow q$에 대한 이해의 분류

유 형	내 용	고등학생 인원수 (73명)	예비대학생 인원수 (32명)
$\sim p \vee q$	도형의 이름이 없거나 짝수가 적혀 있는 카드 선택 (삼각형, 4), (호랑이, 8), (사자, 5), (진달래, 3), (원, 10), (참새, 10)	8(11.0%)	10(31.3%)
$p \wedge q$	도형의 이름과 짝수가 적혀 있는 카드 선택 (삼각형, 4), (원, 10)	41(56.2%)	16(50.0%)
$p \leftrightarrow q$	도형의 이름과 짝수가 적혀 있는 카드 선택 (삼각형, 4), (원, 10) 도형의 이름과 짝수가 적혀 있지 않은 카드 선택 (사자, 5), (진달래, 3)	23(31.5%)	5(15.6%)
기타	특별한 유형으로 분류할 수 없음	1(1.4%)	1(3.1%)

(1) $\sim p \vee q$형

명제 $p \rightarrow q$를 $\sim p \vee q$로 인식하고 있는 경우이다. 이 유형에 속한 고등학생은 8명(11.0%), 예비대학생은 10명(31.3%)이며, 이 학생들은 도형의 이름이 없는 카드 즉, p가 거짓인 카드 (호랑이, 8), (사자, 5), (진달래, 3), (참새, 10)를 선택하고, q가 참인 카드 즉, 짝수가 적혀 있는 카드 (삼각형, 4), (원, 10)을 선택하여 최대 받을 수 있는 상금을 6,000원으로 판단하였다.

(2) $p \wedge q$형

$p \rightarrow q$를 $p \wedge q$로 인식하고 있는 경우를 말하는데 즉, '도형의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 짝수가 있다.'라는 명제를 '도형의 이름이 적혀 있고 짝수가 적혀 있다.'라는 명제로 이해하는 경우이다.

이 유형에 속한 고등학생은 41명(56.2%), 예비대학생은 16명(50.0%)이며, 가장 많은 학생들이 이 유형에 속한 것으로 나타났다. 이 학생들은 '도형의 이름과 짝수가 적혀 있는 (삼각형, 4), (원, 10)을 선택하여 최대 받을 수 있는 상금을 2,000원으로 판단하였다.

(3) $p \leftrightarrow q$형

$p \rightarrow q$를 $p \leftrightarrow q$로 인식하고 있는 경우를 말하는데 즉, '도형의 이름이 적혀 있으면 그 카드에는 짝수가 있다.'라는 명제를 '도형의 이름이 적혀 있고 짝수가 적혀 있다.' 또는 '도형의 이름과 짝수가 적혀 있지 않다.'라는 명제로 이해하는 경우이다.

이 유형에 속한 고등학생은 23명(31.5%), 예비대학생은 5명(15.6%)이며, 이 학생들은 도형의 이름과 짝수가 적혀 있는 카드 (삼각형, 4), (원, 10)을 선택하고, 도형의 이름과 짝수가 적혀있지 않은 카드 (사자, 5), (진달래, 3)을 선택하여 최대 받을 수 있는 상금을 4,000으로 판단하였다.

주어진 카드에서 성립하는 패턴을 명제 $p \rightarrow q$로 나타내는 문제에서 고등학생 53명(72.6%)과 예비대학생 29명(90.6%)은 전제 p가 거짓이 되는 카드는 고려하지 않고 p가 참이 되는 카드에서 q가 참이 되는지를 확인하여 명제 $p \rightarrow q$의 참과 거짓을 판정하였지만, 카드모음에

서 명제 $p \rightarrow q$가 성립되도록 가능한 많은 카드를 선택하라는 문제에서는 고등학생 8명(11.0%)과 예비대학생 10명(31.3%)만이 정답을 제시하였다.

주어진 대상에서 성립되는 패턴을 조건명제로 표현할 때와 주어진 패턴을 만족하는 대상을 구성하는 과정에서 학생들이 이해하고 있는 실제적 함의에 대한 인식은 큰 차이가 있다고 볼 수 있다. 어떤 대상에서 성립하는 패턴을 명제 $p \rightarrow q$로 나타낼 때, 학생들은 p가 거짓인 되는 경우가 명제 $p \rightarrow q$를 거짓으로 만들지 못한다는 사실을 잠재적으로 인식한다고 볼 수 있지만 패턴을 만족하는 대상을 구성하는 과정에서는 p가 거짓이 되는 명제 $p \rightarrow q$를 거짓으로 판정하는 학생들이 많은 것으로 나타났다.

Ⅳ. 결론

일상생활에서는 p가 참일 때, q가 참이면 명제 $p \rightarrow q$를 참으로, q가 거짓이면 명제 $p \rightarrow q$를 거짓으로 판정한다. 그러나 명제논리의 체계를 갖추기 위해서는 p가 거짓일 때, 명제 $p \rightarrow q$의 진위에 대한 판정이 필요하게 되었다. Peirce는 명제 $p \rightarrow q$는 p가 참인 경우에 의미가 있지만 이를 대수적으로 형식화하는 과정에서 p가 거짓일 때, 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 정의하는 것이 논리적이라고 하였으며 Russell은 명제함수 $p(x)$를 도입하고 변수를 확장하는 과정에서 $p(x)$를 거짓으로 하는 x에 대하여 명제 $p(x) \rightarrow q(x)$를 참이라고 정의하는 논리적이라고 하였다. 이와 같이 Peirce와 Russell 등은 형식적인 논리에 근거하여 p가 거짓일 때, 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 정의해야 한다고 하였으며 이로부터 진리표가 발생되고 이를 통하여 명제에 대한 형식적이고 논리적인 체계가 더욱 발전되었다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 어떤 대상에서 성립하는 패턴을 명제 $p \rightarrow q$나타낼 때와 명제 $p \rightarrow q$를 만족하는 대상을 구성하는 과정에서 p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$를 학생들이 어떻게 인식하는지를 조사하였다.

진리표를 모르는 고등학교 2학년 학생들과 예비대학생들을 조사 대상으로 선정하여 p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 조사하였다. 대상에서 성립하는 패턴을 명제 $p \rightarrow q$로 나타내는 과정에서는 고등학생의 72.6%, 예비대학생의 90.6%가 패턴을 나타내는 명제 $p \rightarrow q$를 모두 선택하였으며, 이 학생들은 p가 거짓이 되는 카드가 존재한다고 하여 명제 $p \rightarrow q$를 거짓으로 판정하지 않고 p가 참인 카드를 선택하여 q가 참이면 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 판정하였다.

명제 $p \rightarrow q$가 참이 되는 대상을 구성하는 과정에서는 명제 $p \rightarrow q$에 대한 이해가 다르게 나타났다. 학생들의 이해는 $\sim p \vee q$, $p \wedge q$, $p \leftrightarrow q$ 형으로 분류되었으며, 고등학생들의 11%, 예비대학생들의 31.3%는 명제 $p \rightarrow q$를 $\sim p \vee q$로 인식하고, 고등학생들의 56.2%, 예비대학생들의 50%는 명제 $p \rightarrow q$를 $p \wedge q$로 인식하였으며, 고등학생의 31.5%, 예비대학생의 15.6%는 명제 $p \rightarrow q$를 $p \leftrightarrow q$로 인식하는 것으로 조사되었다. 특히 $p \wedge q$, $p \leftrightarrow q$형의 학생들은 p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$를 거짓으로 인식하고 있다고 볼 수 있다.

진리표를 공부하지 않은 고등학생들도 주어진 사물에 대한 패턴을 명제 $p \rightarrow q$로 나타내는 과정에서는 p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$를 참으로 인식하지만 이러한 잠재적 인식을 표면화 했을 때에는 이에 대한 학생들의 반응이 다르게 나타난다는 것이다. 즉 p가 거짓인 명제 $p \rightarrow q$를 참인 명제로 인식하지 못한다는 것이다.

이러한 심리적인 인식을 자연스럽게 표면화하여 학생 스스로 p가 거짓일 때, 명제 $p \to q$를 참으로 인식하게 된다면 실제적 함의를 통하여 형식적 함의를 도출하고 추상화하는 과정을 학생들이 스스로 경험하게 될 것이며 명제 $p \to q$에 대한 의미 충실한 동화가 일어날 것으로 본다.

참고문헌

박달원 (2009). 조건추론에 대한 학생들의 이해, 한국학교수학회논문집, 제12권 제3호. 307-317.

Anellis, I. H. (2012). Peirce's Truth-functional Analysis and the Origin of the Truth Table, History and philosophy of logic, 33, 87-97.

John Shosky (1997). Russell's use of truth tables, Russell: the Journal of the Bettrand Russell Archives, McMaster University Library Press, n.s. 17 (summer): Ⅱ-26

O'Brien, T. C., Shapiro, B. J. and Reali, N. C. (1971). Logical thinking-language and context, Educational Studies in Mathematics 4, 201-219.

Peirce, C. S. (1880). On the algebra of logic, American Journal of Mathematics, 3, 15-57; reprinted in W 4.163-209(1989).

Peirce, C. S. (1885). On the algebra of logic, a contribution to the philosophy of nation, American Journal of Mathematics, 7, 180-202; reprinted in CP 4.359-403(1933) and W 5.162-190(1993).

Russell, B. (1903). Principles of Mathematics, Cambridge: at the university press.

Wason, P. C. (1977). 'The theory of formal operations: a critique'. In B. Geber (ed.), Piaget and Knowing, London: Routledge and Kegan Paul.

Students′ understandings of material implication

Park, Dal-Won[2)]

Abstract

In this paper, we survey the development of material implication and we present an analysis of the students′ understanding of formal implication. Most of high school students consider material implication $p \rightarrow q$ as $\sim p \vee q$ when they represent the pattern of a collected cards as material implication $p \rightarrow q$. But when they collect cards in which material implication $p \rightarrow q$ is true, Most of high school students consider $p \rightarrow q$ as $p \wedge q$.

Key Words : material implication, formal implication, statement

Received September 11, 2014
Revised December 22, 2014
Accepted December 25, 2014

2) Kongju National University (dwpark@kongju.ac.kr)