한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 4, 697-716, December 2014

GeoGebra를 활용한 극한 지도가 고등학생들의 수학 학습에 미치는 영향

공민숙[1] · 강윤수[2]

이 연구에서는 GeoGebra를 활용한 극한 학습과정에서 나타나는 고등학생들의 학습 특성을 확인하고자 한다. 또한, GeoGebra를 활용한 극한 지도가 고등학생들의 정의적 특성에 어떤 영향을 미치는지를 분석하고자 한다. 이를 위해, 세 명의 고등학생들을 연구참여자로 선정하여 GeoGebra를 활용한 극한 학습을 수행하게 하고 그들의 문제해결 과정을 관찰하였다. 연구참여자들의 문제해결 과정을 그들이 수행한 활동지와 연계하여 분석함으로써 다음을 확인하였다.

첫째, 학생들은 함수의 극한을 구할 때 수학적 성질이나 주어진 자료에 근거하여 논리적으로 접근하기보다는 직관적이고 자의적으로 판단하는 경향이 있다.

둘째, 고등학생들의 학습에서 전 단계의 추론이 다음 단계의 추론을 방해할 수 있다.

셋째, GeoGebra를 활용한 삼각함수의 극한 학습은 학생들의 극한 학습과 관련된 오류를 확인하고 교정하는데 도움을 준다.

넷째, GeoGebra를 활용한 삼각함수 극한 학습은 학생들의 정의적 영역에 긍정적인 영향을 미친다.

주요용어: 문제해결, 추론 특성, GeoGebra, 삼각함수 극한

Ⅰ. 서론

우리나라 2009개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서는 “수학에 대한 흥미와 호기심, 수학 학습에 대한 자신감과 긍정적인 태도 등 정의적 영역의 개선”을 강조하였다. 또한, “미래 사회에서 사회 구성원에게 필요한 핵심역량은 창의적 사고 능력, 문제해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등”이라고 규정하고 이들은 주로 “수학적 추론, 수학적 문제해결, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수・학습을 통해 증진된다”고 명시하였다. 이와 더불어, 수학 교수・학습 방법에 공학적 도구를 적극 활용하도록 권장하고 있다. 새 교육과정에서 이처럼 수학적 과정과 교수・학습에서의 공학적 도구 활용을 강조하는 이유는 세계적인 수학교육의 흐름을 반영한 결과이다.

NCTM(2000)에서 발표한 ‘학교수학을 위한 원리와 규준’의 10개 공통규준에도 추론과 증

1) 순천대학교 교육대학원(cchorok94@naver.com)
2) 순천대학교(yskang@sunchon.ac.kr), 교신저자

명, 문제해결, 의사소통이 포함되어 있다. NCTM(2000)은 이들 규준 외에도 공정성, 교육과정, 교수, 학습, 평가, 공학의 원리 등 6개의 원리를 발표했는데, 학습의 원리에서는 "기존의 지식이나 경험으로부터 새로운 지식을 적극적으로 구축하는, 이해를 통한 학습이 되어야 한다"고 강조하였다. 또한, 공학의 원리에서는 "공학은 수학을 가르치고 배우는데 필수적인 것으로 가르쳐지는 수학에 영향을 미칠 뿐만 아니라 학생들의 학습을 촉진한다"고 했다.

수학교육에서 공학적 도구의 활용이나 학생들의 이해를 통한 학습을 강조하는 이러한 흐름은 이와 관련된 연구가 많이 진행되는 상황에서도 확인된다.

수학교육에서 많이 활용되는 공학적 도구로는 GSP, GrafEq, Cabri, LiveMath와 같은 컴퓨터 소프트웨어와 교육용 계산기와 같은 휴대형 공학 도구가 있다. 이들 중 수학교육 연구에 가장 많이 등장하는 공학 도구는 GSP와 교육용 계산기일 것이다. GSP는 학생들이 수학적 대상을 자기주도적으로 탐구하는데 도움을 주지만 대수적으로 접근하는 데에는 한계를 갖는 측면이 있다. 교육용 계산기도 휴대가 편리한 장점이 있지만 수학적 대상을 기하적으로 취급하는데 용이하지 않은 측면이 있다.

이런 점을 보완해주는 프로그램이 GeoGebra인데, GeoGebra는 기하와 대수적 대상을 쉽게 연결시켜 학생들로 하여금 수학적 연결성 능력을 향상시키는데 도움을 주도록 설계된 수학교육용 소프트웨어이다. GeoGebra는 다른 수학교육용 소프트웨어와 달리 누구나 무료로 다운로드하여 사용할 수 있고 별도의 교육이나 사용설명서 없이도 손쉽게 다룰 수 있는 장점이 있다.

최근 들어 GeoGebra를 활용한 수학 교수・학습 방법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다(양성훈, 2013; 양성현・강옥기, 2011; Aktümen & Kabaca, 2012; Phan-Yamada et al., 2012 등). 이러한 연구들이 주로 함수그래프와 관련하여 진행되었지만, 고등학교 수학에서 가장 중요한 개념 중의 하나인 극한 개념과 관련된 연구는 찾아보기 어렵다.

극한 개념은 학교수학과 학문으로서의 수학을 연결시켜 주는 미적분학의 토대가 되는 중요한 수학적 개념이다. 하지만 무한 개념을 바탕으로 하고 있어 그것의 교수・학습 과정에서 학생들로 하여금 많은 어려움을 겪게 한다. 이는 학생들의 극한 학습과 관련된 연구가 지속적으로 진행될 필요가 있음을 말해준다. 특히, 이해를 통한 학습이 강조되는 세계적인 수학교육 흐름을 감안하면 극한과 같은 주요한 수학적 개념을 학습하는 과정에서 학생들이 어떻게 추론하며 어떤 어려움을 겪는지를 구체적으로 확인하는 연구가 필요하다.

이런 입장을 바탕으로, 본 연구에서는 GeoGebra를 활용한 삼각함수의 극한 학습과정에서 보이는 고등학생들의 학습 특성[3]이 무엇인지 알아보고자 한다. 또한, GeoGebra를 활용한 극한 지도가 고등학생들의 정의적 특성[4]에 어떤 영향을 미치는지 살펴보고자 한다. 이를 위해, 중소도시에 위치한 G고등학교에 재학 중인 세 명의 학생을 선정하여 GeoGebra를 활용한 삼각함수의 극한 관련 탐구학습을 수행하게 하고 그 과정에서 수집된 자료를 분석하여 이 연구의 결론을 도출하고자 한다.

3) 이 논문에서는 Bloom이 인간의 능력을 인지적 영역, 정의적 영역, 운동·기능 영역 등으로 분류한 것에 근거하여 학생들의 학습과정에서 나타나는 인지적 영역과 관련된 특성을 '학습 특성'이라고 명명하기로 한다.

4) 이 논문에서 언급된 '정의적 특성'은 학생들의 수학 또는 수학학습에 대한 태도, 흥미, 자신감, 적극성 등 정의적 영역과 관련된 그들의 행동 특성을 의미한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학교육에서의 극한 지도

극한 개념은 BC 5세기경 Zeno이 역설을 제기한 이래 많은 수학자들에게 의해 연구되었다. 그리스 수학자 Archimedes가 BC 3세기 경 원에 내접, 외접하는 정다각형을 만들어 그 변의 수를 2배씩 증가시켜 가면서 원주율(π)의 근삿값을 구한 것은 체계적인 접근의 시작이었다. 좀 더 명시적인 극한 개념은 미적분학의 창시자인 Newton에 의해 도입되었으며, Euler, Lagrange, Cauchy 등에 의하여 좀 더 체계적으로 탐구되었다. 특히, Cauchy는 수열의 극한과 무한급수의 수렴에 대한 수학적인 엄밀성을 확보하여 극한 개념을 체계화하였다.

19세기 후반에는 Weierstrass의 공리적 방법과 Dedekind의 절단을 통하여 실수계가 구성되었다. 그 결과 극한의 수렴성에 대한 폭넓은 조건이 통일적 견지에서 정리되어 오늘날과 같은 극한 개념이 완성되었다.

발생에서 개념화까지 2500여 년이 필요했던 이와 같은 극한 개념의 역사는 그것이 쉽게 개념화되거나 형식적으로 체계화되기 어려운 측면이 있음을 단적으로 보여준다. 극한 개념의 이런 특성은 극한을 가르치고 배우는 교사와 학생들을 힘들게 하는 요인이 되고 있다.

학교수학의 정점에 위치한 미적분학을 배우기 위해서 필수적으로 익혀야 하는 극한 개념은 그 중요성만큼이나 개념을 익히는데 어려움이 따른다. 그래서 극한 개념 학습과정에서 학생들은 여러 가지 오개념을 형성하게 된다. 2009개정 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서는 극한 단원의 지도 목표를 '함수의 극한의 뜻을 알고 함수의 극한에 대한 성질을 이해하여 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.'로 정하고 교수·학습상의 유의점의 하나로 '함수의 극한에 대한 정의와 성질은 직관적으로 이해하게 하고, 이때 공학적 도구를 활용할 수 있다.'를 제시하였다. 이에 따라, 교과서에서는 함수의 극한($\lim_{x \to a} f(x) = L$)을 'x가 a에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워진다'와 같이 직관적으로 정의하고 있는데, 이러한 개념 도입은 학생들이 이해하기는 쉬우나 함수의 극한값에 대한 의미가 모호한 측면이 있다. 이와 관련하여, 박선화(1998)는 '한없이 가까워진다'라는 일상생활 용어를 사용하여 함수의 극한을 직관적으로 정의한 결과 학생들이 학습과정에서 지속적인 오개념과 계산 과정에서 오류가 나타날 수 있음을 지적하면서 극한 개념의 인지적 장애를 최소화하기 위한 교수학적 방안으로 다음을 제시하였다. 첫째, 학생들이 직관적으로 쉽게 이해할 수 있는 다양한 자료를 제시하여 극한 개념에 대한 심상을 형성하여 극한 개념으로 조직하도록 지도하는 것이 필요하다. 둘째, 극한의 직관적 정의의 한계를 보완하기 위해 '한없이 가까워진다'는 일상적 표현을 '수열과 극한값 사이의 차가 원하는 만큼 얼마든지 작아질 수 있다'등과 같은 수학적 의미로 생각할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다. 셋째, 무한 개념의 이해 개선을 위한 학습지도가 필요하다. 순환소수 등으로 무한히 많은 수를 더한다고 해도 반드시 무한히 커지는 것이 아님을 보여줄 수 있다. 넷째, 절차적 지식이 개념적 지식과 밀접하게 관련을 맺으면서 지도되어야 한다.

한편, 고상숙· 양필숙(2001)은 Brousseau(1997)의 교수학적 상황론에 근거하여 교사와 학생간의 상호작용에 따른 교수-학습의 중요성에 초점을 두고 Freudenthal의 역사발생적 원리에 따른 극한의 정의와 학습자의 오류 수정을 위한 교수학습 전략으로 Lakatos의 발견술을 제안하였다. 그러면서 극한 개념에 대해 실생활에서 학습자에게 쉽게 동화·조절이 일어날

수 있는 학습 방법을 제안하였다. 이정선(1995)은 수학적 개념을 이해하고 활용함으로써 분석 종합할 수 있는 능력을 함양하기 보다는 단순히 계산에만 치중되어 있는 현행 극한 교육의 문제점을 해결하고 수학교육의 질을 향상시키기 위한 방법으로 수학사 활용, $\epsilon-\delta$논법 교과서, 컴퓨터를 활용한 방법 등을 제시하였다. 윤홍제 · 김동화(2008)는 극한 개념의 발달 과정과 테크놀로지를 활용한 수학적 개념의 시각화 및 WBI의 교수학적 의의를 고찰하면서, 테크놀로지를 활용한 경험적 학습으로부터 점차 추상적이고 형식적인 학습 단계로 진행시키는 방법을 구현하고자 하였다.

2. GeoGebra를 활용한 수학교육

NCTM(2000)은 교실, 학교, 교육 체제 안에서 수학교육을 계속 개선시키기 위해 교육자들을 안내하는 비전을 조명하면서 여섯 가지의 원리를 발표했는데, 이 중 '테크놀로지의 원리'가 포함되어 있다. 이처럼, 테크놀로지는 이제 수학을 가르치고, 배우고 실행하는데 필수적인 도구가 되었다. 테크놀로지가 자료의 정리나 복잡한 계산을 수행해주므로 학습자는 의사소통, 추론, 문제해결과 같은 수학적 과정의 학습에 더 집중할 수 있게 되었다.

우리나라 2009 개정 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서도 수학 교수 · 학습 방법에 공학적 도구를 활용해야 한다고 제안했는데, '계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다' 등이 그것으로 수학 교육에 있어 공학적 도구를 적극 활용하도록 권장하고 있다.

우리나라 수학교육에서 많이 활용되고 있는 공학적 도구는 주로 GSP나 교육용계산기 등이지만 최근에는 GeoGebra라는 소프트웨어에 많은 수학교사들이 관심을 가지고 있다. 수학교육에서 공학적 도구를 활용하고 싶어도 구입비용이 만만치 않아 주저하는 교사들이 많은데 GeoGebra는 교육적 목적으로 사용한 경우에는 무료로 제공되기 때문에 교사와 학생들이 많은 관심을 갖게 된 것이다.

GeoGebra는 기하, 대수, 미적분학과 통계적 대상을 쉽게 다룰 수 있도록 돕는 '역동적인 수학 소프트웨어(Dynamic Mathematics Software)'로서 DGS(Dynamic Geometry Software; 움직이는 기하)와 CAS(Computer Algebra System; 컴퓨터 대수 시스템)가 결합된 기능을 갖는 소프트웨어이다. 현재 GeoGebra는 190개 나라에서 수백만 교사와 학생들에 의해 사용되고 매달 30만회 이상 다운로드 되고 있으며, 여러 나라에서 GeoGebra를 사용한 수학교과서가 집필되고 있다.

GeoGebra를 활용한 수학교육 연구에서 언급된 장점들로는 무상 제공, 자동 업데이트, 간단한 사용법, 편리한 도움말, 대수와 기하의 연결성, 커뮤니티를 통한 소통, 관련 자료에 대한 손쉬운 접근 등이 있다. 이러한 여러 장점들로 인해 GeoGebra를 활용하여 수학교육을 개선하고자 하는 연구가 국내외에서 많이 진행되고 있다.

Little(2008)은 GeoGebra가 해석기하, 함수, 미적분의 학습에 유용할 뿐 아니라 학습 내용의 범위를 넓히는 데에도 기여할 수 있다고 하였다. Herceg & Dragolav(2010)는 한 단계의 조작으로 제시된 기존의 애플릿을 이용해서 정적분을 학습한 그룹과 여러 단계로 제시된 GeoGebra 활동을 통해 학습한 그룹으로 나누어 수업을 진행한 결과 후자의 성취도가 높게 나타났다고 하였다. 최경식(2009)은 GeoGebra를 활용하여 정리(Theorem) 만들기, 수학적

개념 형성하기, 문제해결의 도구로 활용하기, 스스로 작품을 구성하고 탐구하기와 같은 4가지 유형으로 활용 방법을 분류하고 구체적인 활동을 제시하였다. 양성현・강옥기(2011)는 GeoGebra를 활용한 이차곡선의 지도는 대수적 접근에 편향된 현재의 이차곡선의 지도를 보완할 수 있고 이차곡선의 작도와 성질을 연결시켜 지도하는 데 매우 용이하다고 하였다. 이소라(2011)는 삼각함수 단원의 학습지도에 GeoGebra를 활용한 결과 수학적 직관력을 길러주고 흥미를 불러일으키며 결과적으로 학업성취도를 높일 수 있다고 예상하였다. 이정곤(2012)은 이 소프트웨어를 활용하면 학생들은 정적분을 이용한 자연로그의 그래프를 보다 구체적으로 인식하거나 이해할 수 있고 개념이미지를 효과적으로 형성할 수 있다는 것을 확인하였다. 정자욱(2012)은 이 소프트웨어를 활용한 미적분 수업이 학생들의 미적분 개념 이해에 역동적, 시각적으로 도움을 주었고, 학생들의 정의적 영역에 긍정적인 영향을 미친다고 주장하였다. 김형준(2014)은 GeoGebra를 활용한 수업 환경이 학생들로 하여금 수열의 일반항에 대한 기하적 변화 관찰, 수렴·발산에 대한 직관적 접근, 무한등비수열의 수렴 조건의 시각적 접근이 가능하게 한다고 주장했다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구방법

본 연구는 GeoGebra를 활용하여 삼각함수의 극한을 학습할 때 고등학생들에게 나타나는 학습 특성을 분석하는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 삼각함수의 극한 관련 탐구활동지를 개발하고 적용함으로써 고등학생들의 탐구 학습과정을 분석하여 그들의 학습 특성을 확인하고자 한다. 이러한 연구목적을 달성하기 위해서는 탐구활동지를 수행하는 학습자의 행동특성이나 학습 성향을 면밀히 관찰해야 하므로 비디오 녹화나 녹음 등의 방법을 활용하여 자료를 수집하는 사례연구 방법을 활용하고자 한다.

2. 연구대상

본 연구는 중소도시에 소재한 G고등학교 학생 3명을 대상으로 실시하였다. G고등학교가 소재한 도시는 중학교 내신 성적과 고입선발고사 점수를 합산하여 고등학교에 진학하는 비평준화 지역이다. 해당 고등학교는 인문계 고등학교 중 성적이 낮은 학생들이 많이 진학하는 학교로 학생들의 기본학력이 대체로 낮고 학습 경쟁력이 떨어지며 자기주도적 학습능력이 부족한 편이다. 특히 수학과목의 기본학력 부진 학생이 많고 개인별 학력차가 심하다. 그러나 학생들은 순박하고 예의바른 편이다.

연구참여자는 연구과정과 목적을 설명하고 참여할 의사가 있는지 물었을 때 긍정적인 반응을 보인 학생 중 부모의 동의를 받은 3명의 3학년 학생으로 선정하였다.

G고등학교의 특성상 연구참여자로 선정된 학생들은 수학성취도가 낮고 실제 모의고사 수리영역 점수가 5~7등급에 속한다. 세 학생 모두 2학년 때 삼각함수의 극한을 배웠지만 수학이 매우 어렵다고 생각하고, 수학에 대한 자신감이 많이 부족한 편이다. 그들은 GeoGebra에 대한 사전지식이 없는 상태이고 수학수업에서 직접 컴퓨터를 조작하여 수업한 경험이 전

혀 없다고 했다. 개인 면담과 관찰 결과를 토대로 세 학생의 성향을 정리하면 다음과 같다.

'학생1(여)'은 매우 성실하고 밝은 성격이나 노력에 비해 점수가 낮게 나와서 수학 공부를 할 때는 평소의 성격과 달리 침체되어 있는 편이다.

'학생2(남)'는 질문은 하지 않지만 수업 태도가 바르고 열심히 노력하는 학생이다. 수학영역 중 기하나 함수보다는 대수영역을 더 좋아하는 편인데 계산을 주로 다루기 때문이라고 했다. 수학 관련 공학 도구는 사칙연산용 계산기만 사용해 보았고 평소 함수의 그래프를 그리기가 힘들었기에 GeoGebra를 활용하여 탐구 학습을 진행하는 것에 찬성하여 이 연구에 참여하였다.

'학생3(남)'은 산술적 계산이 빠르고 고등학교 1학년까지 상위권을 유지하며 수학에 대해 자신감을 보였지만 2학년 때 수학 공부를 등한시하여 성적이 하위권으로 떨어지며 수학에 대한 자신감을 잃었다. 하지만 컴퓨터 다루는 것을 좋아해 GeoGebra라는 소프트웨어를 활용하여 삼각함수의 극한 탐구 학습을 진행하는 것에 관심을 보여 연구참여자로 선정되었다.

3. 연구 절차

본 연구의 연구문제를 해결하기 위해 수행한 주요 연구 단계는 다음과 같다.

1) 탐구활동지

본 연구를 위해 개발된 탐구활동지는 GeoGebra를 활용한 삼각함수의 극한 문제 해결 과정을 다룬 6차시로 구성되어 있다. '활동지1'은 GeoGebra를 활용하여 삼각함수의 극한($\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$) 구하기, '활동지2'는 GeoGebra를 활용하여 삼각함수의 극한($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$) 구하기, '활동지3'은 GeoGebra를 활용하여 평균변화율의 기하학적 의미 알기, '활동지4'는 GeoGebra를 활용하여 미분계수의 기하학적 의미 알기, '활동지5'는 GeoGebra를 활용하여 연속성과 미분가능성 사이의 관계 알기, '활동지6'은 GeoGebra를 활용하여 도함수의 기하학적 의미 알기 등의 내용으로 이루어졌다. 개발한 활동지는 전문가의 조언을 받아 수차례 수정·보완하여 완성하였으며, 연구참여자가 아닌 학생 2명을 통해 예비검사를 실시한 후 본 연구에 투입하였다.

2) 예비검사

본 연구에서 개발된 탐구활동지가 삼각함수의 극한 개념 이해에 적합한지, 학생들의 학습 특성을 제대로 파악할 수 있는 형식인지를 확인하기 위하여 본 연구에 참여하지 않은 학생 2명을 대상으로 예비검사를 실시하였다. 예비검사에 참여한 학생들은 G고등학교 2학년으로 중상위권 성적을 유지하며 평소 성격이 밝고 명랑하여 자신의 의견을 표현하는데 적극적이어서 예비검사 대상자로 선정하였다. 예비검사를 위해 GeoGebra의 기본기능을 익히게 하였고 세 번째 차시부터 탐구활동지를 해결하게 한 후 면담과 소감문 작성을 통해 수행한 활동지와 관련된 구체적인 의견을 확인하였다.

이들은 '활동지2'를 수행하는 과정에서 모두 오개념을 드러내었다. 또한, 예비검사 후에 실

시된 면담에서 GeoGebra를 활용하면 짧은 시간에 정확하게 그래프를 그려주기 때문에 시간이 단축되는 장점이 있지만 그래프의 개형을 그리면서 추론하는 것도 수학적으로 중요하다는 의견을 제시하였다.

활동지에 포함된 발문 형태나 GeoGebra를 활용할 때 발생할 수 있는 잠재적인 약점과 관련된 이들의 의견을 참고하여 활동지를 수정하였다.

3) 면담

연구참여자들이 GeoGebra의 기본 기능을 익히도록 개별 지도를 한 후에, 6차시의 탐구활동지를 수행하게 하였다. 활동지를 활용한 탐구학습이 모두 끝난 후에는 면담을 실시하여 연구참여자들이 수행한 활동지에 관한 세부 정보를 확인하였다. 면담을 위해 질문지를 미리 작성하였고 학생별로 2차에 걸쳐 각각 2시간씩 면담을 실시하였다. 면담 내용은 녹음, 녹화한 후 파일로 저장하여 녹취록을 작성하였으며 학생들이 수행한 탐구활동지 결과와 연계하여 결과분석에 활용되었다.

Ⅳ. 결과 분석

연구참여자들의 탐구활동지 수행과정, 사후 면담 등을 통해 수집된 비디오, 오디오, 문서자료를 분석하여 다음을 확인하였다.

첫째, GeoGebra를 활용한 삼각함수의 극한 학습은 고등학생들이 직관에 따른 오개념을 깨닫고 그것을 교정하는데 도움을 준다.

활동지2의 '$x\to 0$일 때, $\frac{\sin x}{x}$값은 어떻게 될지 예상해보고 그 결과와 이유를 쓰시오.'라는 질문에 대해 '학생1'은 $\frac{0}{0}$=0, '학생2'는 $\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}=1$ 이라고 답했다. '학생1'은 분자가 0으로 수렴하므로 분모의 변화에 상관없이 결과가 0이라고 추정한 것이다. 또한, '학생2'는 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$=1과 같이 추론했다는 것을 알 수 있다. 위 추론 과정 중 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}x}$는 '$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$일 때 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}$(단, $M\neq 0$)'과 같은 함수의 극한에 대한 기본 성질을 적용한 것이다. 그러나 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$이므로 조건을 만족하지 못하여 이 기본성질을 적용할 수 없다. 이것은 모든 다항함수가 모든 실수에서 연속이므로 극한값을 함숫값($\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$)으로 계산했던 방식을 $x=0$에서 불연속 함수인 $y=\frac{\sin x}{x}$에 그대로 적용한 것이라고 볼 수 있다.

그러나 연구자가 $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3}$, $\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}$ 처럼 $\frac{0}{0}$꼴이지만 삼각함수가 아닌 유리함수의 극한 문제를 제시하였을 때, 두 학생 모두 삼각함수의 경우와 달리 주어진 함수의 극한을 쉽게 구하였다. 그런 다음에는 '$\frac{0}{0}$꼴의 극한은 항상 0이다' 또는 '$\frac{0}{0}$꼴의 극한은 항상 1이다'라고 생각한 자신의 오개념을 깨달은 후에 GeoGebra를 활용한 활동으로 자연스럽게 그 원리를 이해하고 자신의 오개념을 교정할 수 있었다. 다음은 '학생2'와의 면담 과정이다.

연구자 : 그럼 이런 경우도 해보자. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}$를 구해볼까?

(중략)

연구자 : $\frac{0}{0}$꼴이지만 극한값이 뭐야?

학 생2 : 2요.

연구자 : 2지? 아까 $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3}$도 $\frac{0}{0}$꼴이었지만 극한값은 뭐였지(어떻게 됐지)?

학 생2 : (웃으면서)∞요.

연구자 : ∞지(∞로 발산하지)?! 그럼 $\frac{0}{0}$꼴이 0이 되는 경우도 생길까?

학 생2 : 음. 그런 경우가 있긴 있겠죠.

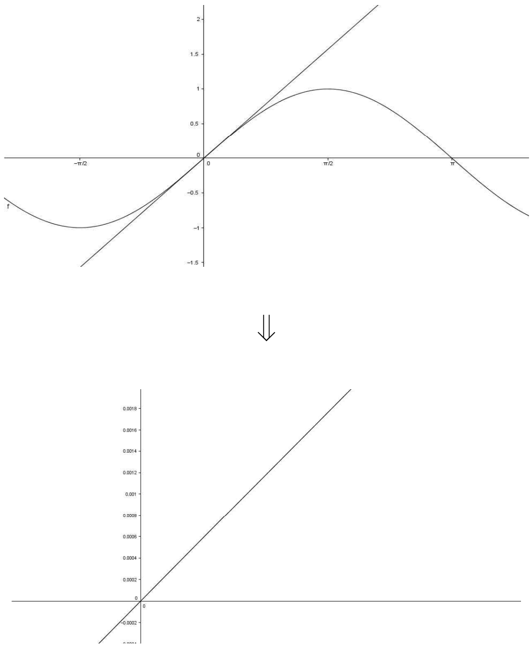
(중략)

연구자 : $\frac{0}{0}$꼴은 얼마라고 단정하여 말할 수 있을까?

학 생2 : 단정 지어 말할 수 없어요. 위에서 선생님께서 내주신 예를 보니까 $\frac{0}{0}$꼴이지만, ∞도 나오고, 0도 나오고, 2도 나올 수도 있고 (발산하거나)여러 가지 실수로 나온다는 걸 알았어요.

'학생2'는 연구자와의 면담을 통해서 $\frac{0}{0}$꼴이 항상 1이 되지 않는다는 것을 자연스럽게 깨달았고 자신이 '$\frac{0}{0}$꼴은 1이다'라는 오개념을 가지고 있었다는 것을 알게 되었다.

'학생2'는 GeoGebra를 이용하여 $y=\frac{\sin x}{x}$의 그래프를 그려보고 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 확인할 수 있었다. 또한 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$이 어떤 이유로 극한값이 1이 되는지 GeoGebra를 이용하여 이해할 수 있었다.



<그림 IV-1> '학생2'의 활동지 2-6 관련 GeoGebra 수행 장면

위의 그림은 '학생2'가 GeoGebra를 이용하여 $y = \sin x$와 $y = x$의 그래프를 그려보고 $x = 0$ 근방에서 거의 일치하게 되는 것을 확인하는 장면이다. '학생2'는 마우스 휠을 움직여 그래프를 확대하여 관찰한 결과, 두 그래프가 거의 직선으로 일치하는 것을 확인하였다. 따라서 x가 0에 아주 가까워졌을 때 $\frac{\sin x}{x}$의 분자와 분모의 값이 0에 접근하는 속도가 거의 같다는 것을 시각적으로 확인하고 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$이 된다는 것을 이해하였다. 이 과정에서 '학생2'는 조건을 고려하지 않고 극한에 대한 기본정리를 적용하거나 $\frac{0}{0}$이므로 약분하면 1이 된다는 자신의 추론 과정에 문제가 있다는 것을 깨닫게 되었다.

GeoGebra를 활용하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$와 같은 삼각함수 극한을 구하는 활동에서는 유리함수처럼 분자, 분모가 약분되거나 최고차항으로 극한을 계산할 수 없기 때문에 위에서와 같은 학생들의 계산상의 오류나 부정형에 대한 오개념이 확인되었다. 뿐만 아니라, 학생들은 GeoGebra를 활용하여 오개념을 스스로 교정하는 것을 확인할 수 있었다.

둘째, 학생들은 수학적 성질에 근거하여 함수의 극한을 구하기보다는 외형적으로(시각적으로) 보이는 직관적인 결과에 의존하여 추론하려는 경향이 있다.

'학생1'은 $\frac{0}{0}$꼴의 극한 $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3}$을 구할 때 수학적 성질에 근거하기보다는 함수의 그래프를

그려서 직관적으로 파악하려는 경향을 보였다. 다음은 이와 관련된 면담 장면이다.

연구자 : 그럼 이 문제를 한번 생각해 볼까? $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}$은 어떻게 될까?

학 생1 : …(한참 생각 중)

함수를 약분하면 $\frac{1}{x^2}$이에요. 이것은 그래프를 이렇게(그림을 그리면서) 그릴 수 있으니까 무한대로 간다는 것을 알 수 있어요.

연구자 : 앞에서 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$은 $\frac{0}{0}$꼴이므로 0이라고 했는데 이 문제는 $\frac{0}{0}$꼴인데 ∞가 나오네?!

학 생1 : 그래프를 어떻게 그리는지 몰라서 그렇게 답한 것 같아요.

연구자 : $y=\frac{\sin x}{x}$ 함수의 그래프를 어떻게 그리는지 몰라서?

학 생1 : 네. 그래프를 그릴 수 없어서 짐작할 수 없었어요.

위에서 '학생1'은 함수의 극한을 구할 때 함숫값들의 변화를 파악하거나 squeezing 정리 등 수학적인 성질에 근거하여 극한을 구하기보다 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 구하려는 경향이 있음을 확인할 수 있다.

셋째, 학생들은 삼각함수의 극한을 생각할 때 주어진 자료에 근거해서 판단하지 않고 자의적으로 판단하거나 '00의 극한값은 주로 00이다'라는 선입견에 따라 극한을 구하는 경향이 있다.

'학생1'과 '학생2'는 활동지4의 '4-2에서 구한 표를 보고 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} g(x)$의 값을 구하시오.'에 대해 모두 1이라고 답하였다. 다음 그림은 '학생2'가 활동지 4-2번을 풀이한 것이다.

x	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{1000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{100000}$
직선 AB의 기울기	0.6990457027714004	0.85802961954099	0.865238581713025	0.8659468449723215	0.866017549857804

x	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{1000000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10000000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{100000000}$	…
직선 AB의 기울기	0.8660246119346736	0.866025325355362	0.866025394396732	…

<그림 IV-2> '학생2'의 활동지 4-2 풀이

'학생2'는 극한 $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} g(x)$을 구할 때 $g(x)$가 처음 약 0.69905에서부터 증가하고 있고 증가폭이 점점 작아지고 있어서 극한값이 1이라고 답하였다. 0.9, 0.95, 2 등 여러 가지 다른 값을 생각할 수도 있지만 '학생2'는 극한값을 1이라고 단정하였다. 다음은 이와 관련된 면담 내용이다.

연구자 : (활동지) 4-3의 $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} g(x)$을 처음에는 뭐라고 생각했어?
학 생2 : 처음에는 1이라고 생각했어요.
연구자 : 왜 1이라고 생각했어?
학 생2 : 점점 커진다고 생각해서 그랬어요. 그래서 1이라고 생각했어요.
연구자 : 그럼 점점 커지는 수열의 극한은 모두 1인거야?
학 생2 : 점점 커지는 폭이 작아지니까요. 조금씩 커지면서 1에 점점 가까워진다고 생각했어요.
(중략)
연구자 : 점점 커지면 왜 다른 수가 아닌 1이 될까? 2가 될 수도 있잖아.
티끌모아 태산이라면서. 태산이 1이 아니라 2가 될 수도 있잖아(웃음).
학 생2 : (웃음)(말끝을 흐리면서) 커지다보면…
(37초 정도 말없이 생각한 후에)
그렇게까지 생각은 못해봤어요.
연구자 : 아 그랬어? 그럼… 혹시 습관적으로 극한이 1이라고 생각한 것 같지 않아?
학 생2 : 네. 그것도 같이 해서(그런 이유도 있고요)…
연구자 : 어떤 습관이 있었는데?
학 생2 : 음… 첫 시간에 했었던 건가? $\lim_{x \to 0}$에서 $\frac{0}{0}$이 1이라고 했던 것이랑 살짝 비슷하게 생각한 것 같아요.
연구자 : 아~삼각함수의 극한 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$을 했을 때 $\frac{0}{0}$꼴인데 극한값이 1이었던 거?
학 생2 : 네~ 삼각함수의 극한값이 1, 0 그런 식으로 많이 나왔던 거 같아요.

'학생2'는 활동지4의 4-2에서 구한 직선AB의 기울기들을 보고 점점 커지고 있고 커지는 폭이 점점 작아지므로 그 극한값은 1이라고 답하였다. 그는 교과서나 문제집에서 풀었던 삼각함수의 극한값이 0 또는 1이 자주 나왔던 경험도 더해져서 극한을 바로 1이라고 답했다고 했다.

그러나 연구자가 함숫값들을 자세히 살펴보고 극한값을 다시 구해보라고 했을 때 '학생2'는 함숫값들을 하나하나 소수점 아래 14째 자리 숫자까지 자세히 살펴보았다. 그리고 함숫값들이 소수넷째자리까지는 일정하고 그 이후 자리부터는 조금씩 점점 커지고 있다는 사실에 주목하여 극한값이 0.8660254 정도 될 것 같다고 답을 수정하였다.

'학생1'도 '학생2'와 마찬가지로 이 문제에 1이라고 답하였다.

x	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{1000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{100000}$
직선 AB의 기울기	0.649051102 7714004	0.8580296 19654099	0.86523858 1713025	0.86594684 91723215	0.86601754 9658804

x	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{1000000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10000000}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{100000000}$	…
직선 AB의 기울기	0.866024618 396936	0.866025325 355362	0.86602539 4396732	…

4-3. 두 점 $A\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $B(x, f(x))$를 잇는 직선의 기울기를 $g(x)$라고 할 때, 4-2에서 구한 표를 보고 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} g(x)$의 값을 구하시오. ~~0.9~~ 1

<그림 IV-3> '학생1'의 활동지 4-2와 4-3의 풀이

다음은 위의 풀이에 대해 '학생1'과 면담하는 장면이다.

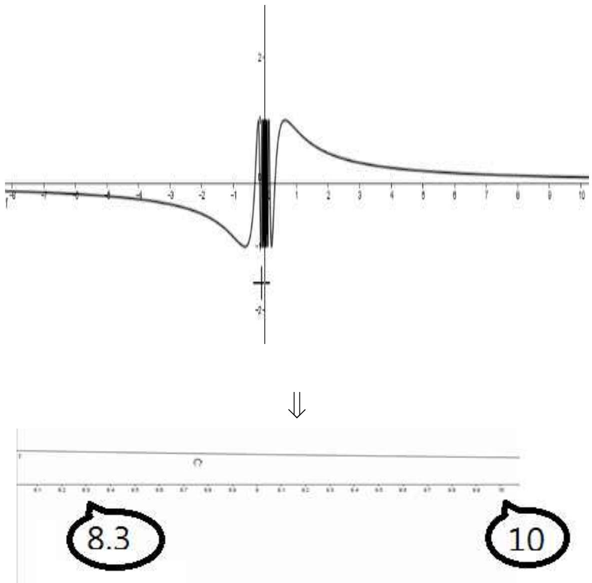
연구자 : 극한이 1이라고 답했는데 왜 그렇게 답했어?
학 생1 : 점점 커지긴 했는데 점점 조금씩 커져요. 그런데 계속 계속 커지면 조금씩 조금씩 계속 계속 커지잖아요. 그래서 어디까지 커지는지 몰라서 그냥 1이라고 했어요.
(중략)
연구자 : 조금씩 커지면 (1보다) 더 큰 수가 될 수도 있고 (1보다) 더 작은 수가 될 수도 있잖아.
학 생1 : (말끝을 흐리면서)다른 수는 확신이 안서서요.
연구자 : 다른 수에 대한 확신이 없어서 그랬어? 1이라는 수에 매력이 있어서 그런 건 아닐까?
학 생1 : 그런 건 아니고……. (한참 후에) 0.9나 0.95는 어차피 1에 가까우니까…….
그래서 1이라고 광범위하게 썼어요.
연구자 : 다른 이유는 없고?
학 생1 : … 그냥 짐작한 건데…
연구자 : 짐작해서?
학 생1 : 네. 1이 가장 간단한 수니까 1이라고 쓴 것 같아요.
연구자 : 답이 1이 많아서.. 그래서 그랬을까?
학 생1 : 네~

위의 내용과 같이 '학생1'은 주어진 자료를 바탕으로 극한값을 구하려고 하기 보다는 자신의 짐작이나 지금까지 풀어봤던 수학 문제의 답이 1이 많이 나왔던 경험들에 근거해서 극한값을 추정하고 있다는 것을 알 수 있다.

이처럼 학생들은 삼각함수의 극한값을 구할 때 주어진 자료에 근거하기 보다는 자의적으로 판단하거나 자신의 경험, 느낌에 의존하여 극한값을 추정하는 경향이 있었다. 이와 같은 학생들의 추론 특성은 결과중심의 선택형 평가에서는 확인하기 어렵다. 하지만, GeoGebra와 같은 공학적 도구를 활용하여 함숫값의 근삿값을 추적하고 그것으로부터 극한값을 추정하게 하는 위와 같은 활동은 학생들의 이러한 추론 성향을 확인할 수 있는 환경을 제공한다.

넷째, GeoGebra를 활용한 삼각함수 극한 학습은 학생들의 자기주도적 학습을 촉진한다. ‘학생2’는 평소 수업시간에 주로 듣기만 하고 질문은 거의 하지 않는 내성적인 성격의 학생이다. 그러나 GeoGebra를 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 적극적으로 탐구하고 매우 흥미로워 하며 학습활동에 집중하는 모습을 보였다. 그는 ‘활동지1’의 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$을 구하기 위해 삼각함수 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프를 손으로 직접 그렸다. 그런 다음, GeoGebra를 이용하여 그래프를 그려보는 과정에서 $x=0$ 근방의 그래프 모양을 보고 발산(진동)한다는 것은 쉽게 확인하였다. 이 때, ‘학생2’는 문제 풀이에 필요한 $x=0$ 근방만 보지 않고 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프가 y축 대칭이 아니라 원점 대칭이고 $x\to\infty$일 때 그래프가 계속 진동하는 게 아니라 한없이 x축에 가까워지는 것을 확인하였다.

아래 그림은 ‘학생2’가 GeoGebra를 이용하여 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프를 그린 후에 x의 값이 커지면 함숫값이 더 이상 진동하지 않고 작아지면서 그래프가 x축에 한없이 가까워지는 것을 기하창 이동 도구()를 이용하여 스스로 확인하는 장면이다.



<그림 IV-4> ‘학생2’의 활동지 1 수행 장면

다음은 활동지를 활용한 탐구학습을 마치고 나서 ‘학생2’와 면담한 장면이다.

연구자 : GeoGebra를 이용하여 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프를 그려보니 어떤 생각이 들었어?
학 생2 : 좌우대칭이 아니었어요.

연구자 : 처음에 어떻게 생각했는데?
학 생2 : 대칭일거라 생각했어요.
연구자 : y축 대칭?
학 생2 : 네.
(중략)
학 생2 : 그래프가 뒤에서 또 내려가고 올라가고 왔다 갔다 하는 부분이 있을 줄 알았는데 -1까지 내려가는 부분이 없어요.(기하창 이동 도구를 이용하여) 키워서(확대해서) 계속 가 봤는데 그렇지 않았어요.
연구자 : 아~ 앞부분처럼 진동할 줄 알았어?
학 생2 : 네.

'학생2'는 지필로 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프의 일부분만 그려본 후 GeoGebra를 이용하여 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프를 그려보고는 자신의 생각과 다른 점들을 확인하였다. 그런 다음, 연구자가 요구하지도 않았는데 스스로 주어진 함수 그래프의 대칭성이나 $x\to\infty$로 갈 때 $y=\sin\frac{1}{x}$의 그래프가 한없이 x축에 가까워지는 모습을 관찰하였다.

지필환경에서는 함수의 그래프를 그리는데 시간을 많이 소비하게 되므로 정작 본질적인 문제 탐구를 포기하는 경향이 있다. 그러나 GeoGebra환경에서는 어려운 함수의 그래프를 빠르고 정확하게 그려주고 학생들이 마우스 휠을 움직여 자신이 관심 있는 특정 부분을 손쉽게 확대 또는 축소해 볼 수 있어서 수학적 대상을 전체적으로 쉽게 이해할 수 있고 국소적인 변화를 스스로 관찰할 수 있다. 뿐만 아니라, 그래프나 도형 등에 점을 찍거나 직선을 그으면 대수창에서 좌표나 직선의 방정식이 자동으로 표현되므로 대수와 기하의 연결성을 학습하는데 매우 용이하다. 따라서 학생들은 선생님의 도움과 지시 없이도 스스로 수학적 원리를 탐구하여 이해하는 것이 가능하다. 이는 GeoGebra를 활용한 학습 환경이 학생들의 자발적인 탐구를 촉진시킬 수 있음을 보여주는 것이다.

다섯째, GeoGebra를 활용한 학습은 학생들의 수학 학습에 대한 흥미와 학습 태도를 긍정적으로 변화시킨다.

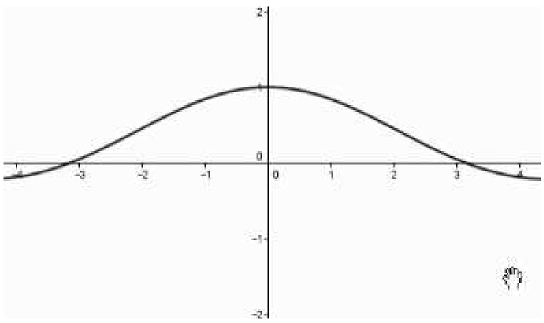
'학생3'은 평소 수학 수업시간에 집중하지 못하거나 조는 모습을 많이 보였던 학생이다. 그런데 GeoGebra의 기본기능을 익히고 활동지를 수행하기 전 휴식시간에 '학생3'은 쉬지 않고 GeoGebra 프로그램으로 이런저런 시도를 하였다. 다음은 '활동지2'를 수행한 후 그와 면담하는 장면이다.

연구자 : 오늘 GeoGebra를 이용한 공부를 해봤는데 느낀 점이 뭐야?
학 생3 : GeoGebra를 많이 이용해 보면 어려운 함수의 그래프도 머릿속에 잘 기억될 것 같아요. GeoGebra가 그래프를 그리기 어려운 함수라도 식을 입력하면 바로 그래프를 그려주니까 매우 편리한 것 같아요.
연구자 : 또 어떤 점이 있었어?
학 생3 : 되게 신기하다. (직접 손으로 함수의 그래프를 그리는 것 보다)훨씬 편하다는 생각

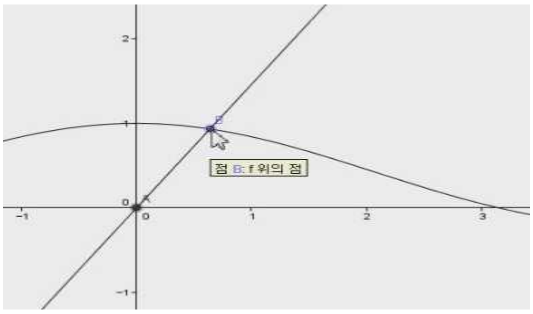
이 들었어요. 함수의 식을 막 대입해 보고 싶었어요.
연구자 : 그럼 해보지 그랬어?
학 생3 : 아까 해봤어요. 선생님이 시간 줬을 때요.
연구자 : 뭘 해봤는데?
학 생3 : π(π를 포함한 함수의 식)도 넣어 봤구요, 절댓값 있는 함수의 그래프도 그려봤어요. 처음에는 몰랐는데 abs 명령어를 이용하여 절댓값 함수를 입력해보니까 V자 모양이 나와서 (절댓값을 포함하는 일차함수의 그래프가) 이런 모양이구나라는 것을 알게 되었어요. 그리고 여러 가지 (함수)식도 넣어봤어요.

평소 수학 시간에 매우 수동적이던 '학생3'은 GeoGebra를 이용한 수학 학습에 매우 적극적으로 참여하고 즐거워하였다. 연구자가 시키지도 않은 함수의 식을 입력해보면서 자신이 기억한 그래프가 맞는지, 평소에 궁금했던 그래프는 어떻게 그려지는지 등을 확인하였다. 또한, 자신이 궁금한 그래프를 그리기 위해 알려주지 않은 기능을 스스로 찾아내어 시도해 보는 등 평소의 수학 시간과 전혀 다른 매우 적극적인 태도를 보여주었다. 이처럼 학생들은 GeoGebra를 활용한 학습을 통해 수학 학습에 대한 흥미와 참여 태도에서 긍정적인 변화를 보였다.

여섯째, 고등학생들의 학습에서 전 단계의 추론 과정이 다음 단계에서의 추론을 방해할 수 있다.
'학생3'은 '활동지2'의 2-3번 문제 'x의 값이 변할 때 직선 AB의 기울기를 구하여라.'를 풀기 위해 '두 점을 지나는 직선'도구를 이용하여 직선을 그린 후 '기울기' 명령을 입력하여 직선의 기울기를 구하였다. 그런데 2-6번 문제 'GeoGebra를 이용하여 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$의 그래프를 그려보고 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$을 구하여라.'에서도 '학생3'은 '두 점을 지나는 직선'도구를 이용하여 직선을 긋고 그 직선의 기울기를 구하여 극한값을 구하려고 하였다.



$\Downarrow$



<그림 IV-5> '학생3'의 활동지 2-6 수행 장면

위의 그림은 '학생3'이 GeoGebra를 이용하여 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$의 그래프를 그린 후 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$을 구하기 위해 원점과 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 그래프 위의 한 점을 잡아 '두 점을 지나는 직선'도구를 사용하여 직선을 긋고 그 직선의 기울기를 구하려고 하는 장면이다. 하지만 이 문제에서는 GeoGebra를 이용하여 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$의 그래프를 그렸기 때문에 x값이 0으로 갈 때 함숫값이 어떻게 변하는지를 확인하면 된다. 따라서 단순히 그래프를 관찰하는 것만으로도 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$의 값이 1이라는 것을 바로 확인할 수 있는데 '학생3'은 직전에 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구해서 문제를 해결한 방법을 이 문제에서도 무리하게 시도하였다. 이처럼 학생들은 문제가 다른데도 불구하고 이전 단계의 추론과정을 다른 문제에 그대로 적용하려고 했다. 이는 특정한 단계의 추론 방식이 이어지는 문제해결 과정에서의 추론을 방해할 수 있음을 보여주는 사례로 이 연구에서와 같이 공학적 도구를 활용한 학습에서 특히 주의해야 할 대목이다.

공학적 도구가 학습과정에서 도구적으로 활용되어야 하고 교수자나 학습자는 공학적 도구의 활용 목적을 분명히 인지하고 있어야 함에도 불구하고 많은 학습자들이 도구로 활용되는 공학적 도구 자체에 관심이 집중되는 '메타인지적 이동'현상이 발생되기 쉽다. 위의 사례는 주어진 문제를 자세히 분석하지 않고 이전 문제와 같은 유형으로 판단하여 생긴 문제로 '메타인지 이동'과 같은 극단적인 교수-학습 현상이라고 간주하기는 어렵다. 하지만, 공학적 도구를 활용하는 교수-학습 상황에서는 언제나 이러한 극단적인 교수학적 현상이 발생하지 않도록 주의해야 한다.

일곱째, 고등학생들의 학습에서 구체적인 사례에 대한 이해가 일반화된 표현에서는 적용되기 힘든 측면이 있다.

학생들은 특정한 수학적 성질이 구체적인 수로 표현된 경우와 문자로 표현된 경우를 분리해서 생각하는 경향이 있다. 예들 들어, 학생들은 평면상의 점의 좌표가 구체적인 수로 주어진 경우의 기울기는 잘 구하지만 변수로 주어진 경우는 구하지 못하는 경우가 있었다.

'학생1'은 '활동지2'의 '두 점 $A(0,0)$과 $B(x,\sin x)$를 지나는 직선의 기울기를 구하여라.' 라는 문제에 당황해 하며 기울기를 구하지 못하였다. 그러나 '두 점 $A(1,1)$와 $B(2,3)$ 를 지

나는 직선의 기울기를 구하여라.'로 문제를 바꾸어 제시했을 때 직선의 기울기는 $\frac{3-1}{2-1}$이므로'2'가 된다고 답하였다.

이는 수학적 개념을 지도할 때 처음부터 변수로 표현된 개념을 설명하기보다 먼저 구체적인 예로 설명하여 학습자에게 충분히 체화된 후에 변수(문자)로 표현된 일반화 과정을 학습할 필요가 있음을 보여준다.

V. 결론 및 제언

수학을 잘 가르치기 위해서는 가르치려는 내용, 학습자로서의 학생들, 교수전략에 대한 이해가 필수적이다. 특히, 학생들이 이해를 통해 학습할 수 있도록 돕기 위해서는 학생들의 선행지식과 새로 배우는 개념이 잘 연결되도록 교수-학습 과정을 구성해야 한다. 이 과정에서 학생들의 학습 특성은 중요한 고려 대상이 되므로 다양한 상황에서 학생들에게 나타나는 학습 특성을 파악할 필요가 있다.

한편, 고등학교 수학 교육과정에서 극한은 큰 비중을 차지하고 있고 미적분학의 토대가 되는 중요한 수학적 개념이다. 하지만 발생적으로 극한을 지도하기 위해서는 복잡한 계산을 필요로 하는 수치적 접근이나 많은 시간을 필요로 하는 그래프 그리기 등이 필요해 지필환경에서는 이런 교수-학습 과정을 계획하기가 쉽지 않다.

이에 본 연구에서는 GeoGebra를 활용한 삼각함수 극한의 교수-학습을 시도하여 이 과정에서 나타나는 고등학생들의 학습 특성을 알아보고, 이런 방법이 고등학생들의 정의적 영역에 어떤 영향을 미치는지를 살펴보고자 하였다. 그 결과, 다음을 확인하였다.

첫째, 학생들은 함수의 극한을 구할 때 수학적 성질이나 주어진 자료에 근거하여 논리적으로 접근하기보다는 직관적이고 자의적으로 판단하는 경향이 있다.

학생들은 삼각함수와 유리함수의 극한이 $\frac{0}{0}$꼴일 때, 유리함수의 경우는 그래프를 활용하여 극한값을 쉽게 구했지만 삼각함수의 그래프는 어떻게 그리는지 몰라서 극한값을 구하는데 어려움을 겪었다. 이는 학생들이 함수의 극한을 구할 때 함숫값들의 변화를 파악하거나 수학적인 성질에 근거하기보다는 함수의 그래프를 직접 그려서 시각적으로 보이는 외형적인 모습에 의존하여 극한값을 구하려는 경향이 있다는 것을 보여주는 사례이다.

또한 학생들은 '0.69990570.., 0.85802961.., 0.86523858.., 0.86594684.., 0.86601754.., 0.86602461.., 0.86602532.., 0.86602539, ⋯ '와 같은 자료가 제시되었을 때, 이 수열의 극한값이 1이 될 것이라고 추측하였다. 하지만 이 수들의 변화 상태를 살펴보면 극한값이 0.8660254 정도라는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 그런데도 학생들은 삼각함수의 극한값이 주로 0 또는 1이었다는 자신의 수학적 경험이나 소수로 표현되는 극한값을 접하지 못했다는 이유로 피상적인 변화에 근거하여 극한값이 1이라고 단정하였다. 이처럼 학생들은 문제에서 제시된 자료를 자세히 분석하지도 않고 간단한 정수로 얻어지는 극한 문제에 익숙한 경험이나 느낌을 가지고 자의적으로 판단하여 극한값을 추정하였다.

둘째, 고등학생들의 학습에서 전 단계의 추론이 다음 단계의 추론을 방해할 수 있다.

학생들은 삼각함수의 극한을 구하는 문제에 대해 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구한 후 극한값을 구하려고 시도하였다. GeoGebra를 활용하여 주어진 함수의 그래프를 그렸기

때문에 그래프에서 함숫값이 어떤 값에 수렴하는지를 확인하면 극한값을 바로 추정할 수 있는 상태에서 학생들은 두 점을 지나는 직선의 기울기로 이 문제를 해결하려고 했다. 이 방법은 직전에 사용한 방법으로 이 문제를 해결하는 과정에서는 도움이 되지 않는데도 이 방법을 무리하게 시도하였다. 이처럼 학생들은 문제의 의미도 이해하지 않고 이전 문제의 추론 전략을 다음 문제에도 그대로 적용하려고 했다. 이는 특정한 단계의 추론 방식이 이어지는 문제해결과정에서의 추론을 방해할 수 있음을 보여주는 사례이다.

셋째, GeoGebra를 활용한 삼각함수의 극한 학습은 학생들의 극한 관련 오류를 확인하고 교정하는데 도움을 준다.

학생들은 삼각함수의 극한 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$을 구할 때 $\frac{0}{0}=0$ 또는 $\frac{0}{0}=\frac{\not{0}}{\not{0}}=1$이라고 계산하는 오류를 보였다. 그러나 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$과 구조적으로 같은 $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3}$, $\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}$ 등 $\frac{0}{0}$꼴 유리함수의 극한 문제에서는 약분을 활용하여 극한값을 구할 수 있었다. 이는 삼각함수 극한을 학습하기 전에는 $\frac{0}{0}=\frac{\not{0}}{\not{0}}=1$과 같이 계산하는 학생들의 오류가 확인되지 않았으며 GeoGebra를 활용한 삼각함수 극한을 탐색해봄으로써 학생들이 스스로 자신의 오류를 깨닫고 교정하는 기회가 제공되는 것을 보여준다.

넷째, GeoGebra를 활용한 삼각함수 극한 학습은 학생들의 정의적 영역에 긍정적인 영향을 미친다.

GeoGebra를 활용한 삼각함수 극한 학습을 통하여 학생들은 수학에 대한 흥미와 참여 태도, 자기 주도적 학습 능력 등 정의적 영역에 긍정적인 변화를 보였다. 수학을 어려워하고 수학 학습에 대한 관심이 매우 적었던 학생들이 GeoGebra를 활용한 수학 학습으로 인해 수학에 대한 흥미가 생기고 적극적으로 수학 학습에 참여하려고 하였으며, 수학 학습에 대한 인식이 긍정적으로 변화하였다. 또한 GeoGebra를 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 문제에서 요구하지 않은 부분까지 스스로 찾아내어 탐구해 가는 적극적인 모습을 보였다.

위에서와 같은 연구 결과를 바탕으로 후속 연구를 위해 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 본 연구는 삼각함수의 극한에 국한하여 활동지를 개발하고 투입하여 학생들의 학습 활동 결과를 분석하였는데, 극한 단원 전체로 확대한 연구를 진행하여 그 결과를 비교할 필요가 있다.

둘째, 이 연구는 세 명의 학습자를 대상으로 진행된 연구이기 때문에 다수의 학습자를 대상으로 본 연구 방법을 적용하였을 때 다른 특징이 나타날 수 있다. 따라서 이 연구에서 사용한 방법을 교실수업에 적용해 보고 그 결과로 학생들에게서 나타나는 학습 특성이 어떻게 다른지를 확인한다면 교실수업 개선에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

참고 문헌

고상숙・양필숙(2001). 교수학적 상황론에 입각한 효과적인 극한지도. 한국수학교육학회지 11, 47-69.

교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부.

김형준(2014). GeoGebra의 시각화 기능을 이용한 수열의 극한 학습 지도. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

박선화(1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

양성현・강옥기(2011). GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도 방안. 학교수학 13(3), 447-468.

양성훈(2013). GeoGebra를 활용한 고등학교 함수단원의 지도 방안 연구. 한국외국어대학교 교육대학원 석사학위논문.

윤홍제・김동화(2008). 테크놀로지를 활용한 수열의 극한 개념에 대한 교수-학습 방법. 교사교육연구 47(1), 143-168.

이소라(2011). 삼각함수단원에서 GeoGebra를 활용한 수업이 학업성취도에 미치는 영향. 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.

이정곤(2012). GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 개념이미지 형성 학습 개선 방안. 한국수학교육학회지 25(1), 71-88.

이정선(1995). 극한 개념의 효율적 지도 방법에 대한 연구 - 고등학교 교육과정을 중심으로 -. 한양대학교 교육대학원 석사학위논문.

정자욱(2012). GeoGebra를 이용한 미적분 수업의 질적 사례연구. 건국대학교 교육대학원 석사학위논문.

최경식(2009). GeoGebra와 함께하는 수학탐구-GeoGebra를 활용한 영재교육. 서울대학교 대학원.

Aktümen M, Kabaca T(2012). Exploring the Mathematical Model of the Thumbaround Motion by GeoGebra. Technology, Knowledge and Learning, pp. 109-114. Springer Science and Business media.

Brousseau, G.(1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des.

Herceg C., & Dragoslav, T.(2010). Numerical Integration with GeoGebra High School. The International Journal for Technology in Mathematics Education, 17(4), pp. 205-210.

Little, C.(2008). Interactive geometry in the classroom, old barrires and new opportunities. Proceedings of the british Society for Research into Learning Mathmatics.

NCTM(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Phan-Yamada T,Yamada W M, Ottman L, Kett J(2012). Exploring Polar Curves with GeoGebra. Mathematics Teacher 106, pp. 228-233. NCTM.

Effects of Teaching of Limit Using GeoGebra to High School Students′ Mathematics Learning

Kong, Min Sook[5] · Kang, Yun Soo[6]

Abstract

The purpose of this paper is to investigate high school students′ learning characteristics which revealed in their learning process of limit using GeoGebra. And we are going to analyze effects of teaching of limit using GeoGebra to high school students' interesting and attitudes for mathematics learning. To do this, we selected three high school students as participants and ask them performing limit learning using GeoGebra. We recorded their problem solving process. Through analyzing their problem solving process relate to their solution, we found the followings:

First, students did not logically approach based on mathematical properties or given materials, rather showing tendency decide with self-conscious and intuition.

Second, it is possible that former reasoning strategies disturb following reasoning in the process of high school students' mathematics learning.

Third, learning process of limit using GeoGebra help high school students to identify and correct their errors relate to limit learning.

Forth, learning process of limit using GeoGebra positively effects to high school students' interesting and attitudes for mathematics learning.

key words: Problem Solving, Reasoning Characteristics, GeoGebra, Limit of Trigonometrical Function

Received December 9, 2014
Revised December 22, 2014
Accepted December 25, 2014

5) Graduate School of Education, Sunchon National University(cchorok94@naver.com)
6) Sunchon National University(yskang@sunchon.ac.kr), Corresponding author