

중학생의 수학적 모델링 정교화 과정에 관한 사례 연구

박슬희¹⁾ · 신재홍²⁾ · 이수진³⁾

본 연구의 목적은 실험수업에 참여한 세 명의 중학교 1학년 학생들의 모델 정교화 과정을 질적 사례연구를 통하여 살펴보고 모델 정교화에 영향을 미치는 요인을 분석하여 이에 관한 정보를 제공하고자 함이다. 분석 결과 학생들의 수학적 모델링의 정교화 과정은 각 단계가 단선적으로 일어나는 것이 아니라 모델 내에서 해를 구할 수 없거나 구한 해가 의미가 없는 경우 실제 문제 구성 단계로 돌아가 실제 문제를 수정하거나 수학적 모델 구성 단계로 돌아가 모델을 수정 또는 정교화하는 것을 알 수 있었으며, 모델 정교화 과정에 영향을 미치는 요인으로는 모델링 문제, 메타인지적 사고, 교사·동료와의 의사소통 및 교사의 역할 등이 복합적으로 작용함이 나타났다.

주요용어: 모델링, 모델링 정교화

21세기 사회는 ‘정보의 홍수’ 시대로 불리면서 지식의 양이 폭발적으로 증가하고 있다. 매 순간 엄청난 양의 새로운 지식이 생성되고 또 사라지는 이러한 시대에 많은 양의 지식을 소유하는 것만으로는 충분하지 않고, 다양한 정보들로부터 나에게 필요한 지식을 선별하고 그것을 활용하여 새로운 가치를 창출할 수 있는 능력이 요구된다. 이와 같은 정보화 사회에서 수학교육의 중요한 역할 중 하나는 학생들로 하여금 정보를 분석적으로 판단하고 주어진 상황에서 수학적인 문제를 구성하고 이를 해결할 수 있는 문제해결력을 신장시킬 수 있도록 하는 기회를 제공하는 것일 것이다(강옥기, 허난, 조현공, 박경은, 이환철, 2010). 이에 자기 주도적으로 지적 가치를 창조하는 자율적이고 창의적인 21세기 지식 기반 사회에 적합한 인재를 양성하기 위하여 학생들 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 적절한 문제해결방법을 활용하여 창의적으로 문제를 해결하는 활동이 중요하며(교육과학기술부, 2011), 더불어 학생들은 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 활용하는 능력, 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하고 해석하는 능력을 함양하여 수학적 모델링을 통해 문제를 이해하고 해결하면서 수학의 유용성을 인식하고 활용할 수 있어야 한다(National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000)

특히 학교 수학에 수학적 모델링을 도입하는 것은 학생들이 수학적 능력뿐만 아니라 일반적인 능력과 태도들을 개발시킬 수 있고 학생들의 비판적 능력을 키워줄 수 있으며 비수학적 상황을 이해하고 다룰 수 있는 응용력을 길러줄 수 있다. 또한 수학적 모델링은 열린

1) 광주동명중학교(sechs-jj@hanmail.net)
2) 한국교원대학교(jhshin@knue.ac.kr)
3) 한국교원대학교(sjlee@knue.ac.kr), 교신저자

(open-ended)과정이므로 수학이란 여러 번의 시행착오를 거쳐 완성된 학문이고, 다시 반복하여 수정되어질 수 있다는 관점을 갖게 하고 수학적 사실들이 실제상황과 관련되어 다루어짐으로써 학생들은 수학적 활동이 가치 있는 것임을 깨달을 수 있다. 그리고 수학 외적 상황에서 수학을 이해하고 활용할 수 있도록 하는 모델링을 경험함으로써 탐구적이고 창의적인 문제해결능력을 기를 수 있다(김수미, 1993; 이기열 · 이병수, 1999).

국내에서 수학적 모델링에 대한 연구는 1990년대 초반부터 문헌 연구 및 실험 연구의 형태로 꾸준히 이루어져 왔는데(황혜정, 2007), 모델링 도입의 필요성과 방안을 탐색한 신현성(2001), 류희찬(2003)의 연구, 자료 개발과 적용에 관한 이기열 · 이병수(1999), 김미영 · 강순자(2007)의 연구, 신은주 · 이종희(2004a, 2004b), 신경희 · 김연지(2011)의 수학적 모델링 적용의 사례연구, 류희찬 · 김지연(2005), 손홍찬 · 류희찬(2005), 손홍찬 · 류희찬(2007)의 공학 도구를 사용한 모델링 활동에 관한 연구, 수학적 모델링에 관한 국내의 연구를 분석한 황혜정(2007)의 연구가 있다. 이 밖에도 중등수학에서 수학적 모델링 도입의 필요성을 논의한 김수미(1993)의 연구뿐만 아니라 중 · 고등학생들을 대상으로 모델링 자료를 개발하고 수학적 모델링 적용의 효과를 분석한 국내 석 · 박사 논문들이 있다.

하지만 지금까지 수학적 모델링에 관한 많은 연구들이 이루어졌음에도 불구하고 이들이 다룬 실생활 문제 상황은 연구의 목적이나 대상을 감안한 것으로 생각되는 한 개의 변인만을 포함하거나 해결 과정이 비교적 단순한 것들이었다. 사실 대부분의 실생활 문제 상황은 여러 개의 변인을 포함하고 있으며 이들 모두를 반영한 해를 구하는 것은 매우 복잡하지만 수학적 모델링의 정교화 과정을 통해 정밀한 해를 구할 수 있는 모델로의 변형이 가능하므로(강옥기, 2010), 수학적 모델링의 정교화는 실생활에 관련된 문제를 해결하는데 유용한 방법으로서 수학 학습 지도에 중요한 요소가 된다. 지금까지의 수학적 모델링의 정교화에 대한 연구는 스프레드시트 환경이 수학적 모델링의 정교화 과정에 미치는 역할을 분석한 손홍찬 · 류희찬(2007)의 연구와 수학적 모델링과 정교화에 관한 선행 연구를 분석하고 정교화 모델을 제시함으로써 중등학교 수준에서 수학적 모델링의 정교화를 다룰 수 있는 예를 제시한 강옥기(2010)의 연구 정도가 있으나 상대적으로 활발히 이루어지지 않은 것이 사실이다. 따라서 본 연구의 목적은 수학적 모델링의 정교화 과정이 일어날 수 있는 문제를 개발하고, 이를 적용한 사례를 분석함으로써 모델 정교화를 포함한 수학적 모델링 활동이 어떻게 이루어지는지를 살펴보고 모델 정교화에 영향을 미치는 요인을 살펴보고자 함이며 이에 따라 설정된 연구문제는 다음과 같다.

수학적 모델링 문제를 해결하는 활동에서 학생들의 수학적 모델링의 정교화 과정은 각 단계별로 어떻게 나타나는가?

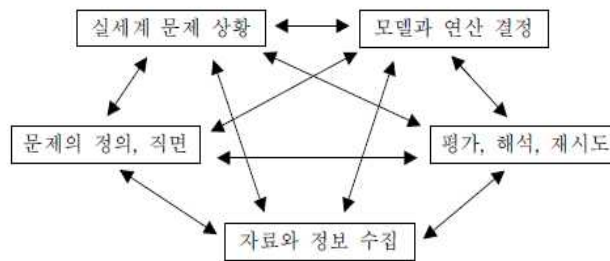
학생의 모델링 활동에서 모델 정교화에 영향을 미치는 요인은 무엇인가?

I. 수학적 모델링과 모델의 정교화

수학적 모델링은 복잡한 현실 상황에서 출발하여 이 현상을 이해, 예측, 설명하기 위해 수학적 모델을 만들고 이를 해결하여 현상에 적용하는 다단계의 과정이다. Lesh와 Doerr(2003)

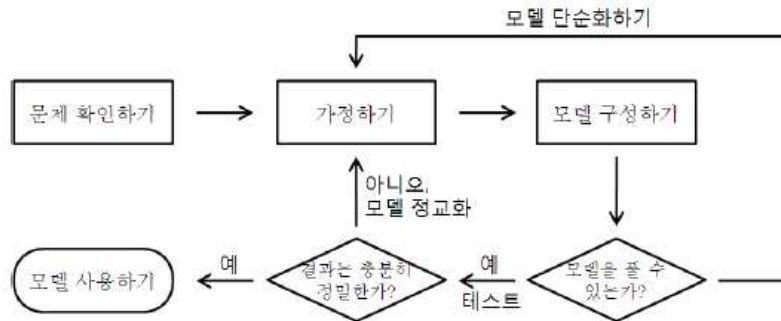
에 의하면 모델링 활동은 어느 경우든 다음 네 단계의 과정을 거쳐 문제를 해결하게 된다. 첫 번째 단계에서는 실세계에서 모델 세계로 사상(mapping)을 서술하고 두 번째 단계에서는 본래의 문제 해결 상황과 관련된 예측과 행동을 위해 모델을 조작(manipulation)한다. 세 번째 단계는 개발한 모델을 실세계 상황에 비추어 보고 결과를 예측(prediction)하고 네 번째 단계에서는 행동과 예측이 유용한지를 검증(verification)한다.

수학적 모델링에 관한 여러 연구를 살펴보면 연구자의 관점에 따라 모델 개발을 수반하는 모델링 과정의 순서 및 흐름이나 단계 구성에서 약간의 차이가 있음을 알 수 있는데, 김휴진(2010)은 이를 단순 선형 모델, 반복적 선형 모델, 성망형 모델로 분류하였다. 단순 선형 모델은 모델링 과정이 첫 번째 단계에서 시작하여 마지막 단계에서 끝나는 모델을 말하는 것이고, 반복적 선형 모델은 단순 선형 모델보다 발전된 모델로 수학적 모델링 과정이 순환(cycle)의 형태로 나타내어진다. 수학적 모델링 과정에서 수학적 모델을 풀어 얻어진 해가 실제 문제 상황을 적절하게 설명하지 못할 때 필요한 단계로 돌아가 다시 수학적 모델링 활동이 이루어져야 할 경우 반복적 선형 모델이 적용되게 된다. 하지만 문제 해결자가 복잡한 실제 상황에 대한 모델을 개발하고자 할 때 문제를 해결하는 과정은 정해진 순서 없이 사고 과정에 따라 자연스럽게 이동하며 여러 개의 모델링 과정을 포함하게 되는데 이런 경우에는 종종 선형 모델로는 표현할 수 없고 아래 [그림 I-1]과 같이 여러 개의 “중심점”으로 구성되어 모델링 과정이 정해진 순서나 경계가 있는 것이 아니라 어느 중심점에서나 먼저 시작해 어느 중심점으로든 이동할 수 있는 성망형 모델이 더 적절하다 할 수 있다.



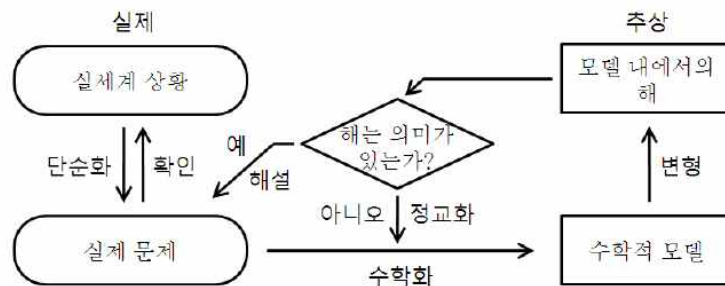
[그림 I-1] Bell(1993)의 모델링 과정의 중심점(조원주, 2002, p.9, 재인용)

한편 문제 상황이 매우 복잡하거나 이를 해결하기 위한 모델을 만들기 어려운 경우 실제 문제를 단순화하여 그에 맞는 모델을 구성할 수도 있지만 구성한 모델을 문제 상황에 더욱 적합하고 정밀한 결과가 나올 수 있도록 정교화 할 수도 있다. 이와 같이 수학적 모델링의 과정을 단순화 과정과 정교화 과정의 순환으로 표현한 Dossey 등(2002)의 모델링의 정교화 과정은 다음 [그림 I-2]과 같다.



[그림 I-2] 모델 구성의 순환성(강옥기, 2010, P.76)

모델의 단순화는 어떤 변인을 줄이거나 범위를 제한하고 변인 사이의 관계를 간략하게 하는 과정에서 나타나고, 모델의 정교화는 반대로 실세계 상황을 충분히 잘 설명할 수 있도록 변인을 추가하거나 범위를 제한하지 않고 변인 사이의 관계를 정교하게 설정하는 활동을 통해 나타나는데, 모델이 정교화되면 실제 상황을 더욱 정확하게 설명, 예측하게 되고 다른 상황에도 일반화 할 수 있는 보편성을 가질 수 있게 된다. 하지만 이와 같은 정교한 수학적 모델을 구성하는 것은 간단하지 않은데 문제 상황이 전부 고려되지 않은 불완전한 모델이 나타나거나 수학적 모델에 이르지 못한 비형식적인 모델에 그치는 경우도 많다(손홍찬·류희찬, 2007; 강옥기, 2010). 강옥기(2010)는 모델의 단순화와 정교화의 순환적 과정을 나타내는 Dossey 등(2002)의 모델에서 단순화는 구성된 수학적 모델의 해를 구할 수 없는 경우에 일어나는데 실제로 문제 해결자가 자신이 구성한 수학적 모델을 풀 수 없는 경우는 거의 없다고 판단하였다. 그리고 모델 단순화와 정교화도 가정하기 단계에서의 변수 조정만으로 이루어지는 것이 아니라 동일한 가정하에서도 여러 유형의 수학적 모델을 생각할 수 있다는 점을 착안하여 수학적 모델링의 정교화 과정을 [그림 I-3]과 같이 제시하였다. 이 모델링 과정은 먼저, 실세계 상황으로부터 변화의 요인을 관찰하고 자료를 수집하여 실제 문제를 구성한다. 다음 단계로 문제에 영향을 주는 가정을 구체적으로 설정하여 실제 문제를 수학적 모델로 변환한다. 그 다음 수학적 모델을 풀어 해를 구하고 이 해가 실제 문제에 의미가 있는지 판단한다. 만약, 만족할만한 해가 구해지지 않으면 수학적 모델 단계로 돌아가 가정을 수정하거나 같은 가정 하에 정교화된 수학적 모델을 구성하는데 의미 있는 해가 나올 때까지 이 과정을 순환한다. 마지막으로 수학적 모델에서 얻어진 해가 의미가 있으면 실제 문제의 해로 해석하고, 만들어진 수학적 모델을 실세계의 유사한 상황에 적용한다.



[그림 I-3] 수학적 모델링의 정교화 모델(강옥기, 2010, P.77)

본 연구에서는 강옥기(2010)의 수학적 모델링의 정교화 과정을 토대로 모델링 활동 과정을 실제 상황 탐구, 실제 문제 구성, 수학적 모델 구성, 모델 내에서의 해, 모델 정교화, 실제 상황에의 적용으로 구분하고 각 단계에서 일어난 학생들의 모델링 활동을 구체적으로 기술하여 학생들의 수학적 모델링의 정교화 과정이 어떠한 흐름으로 이루어지는지를 살펴보고자 하였다.

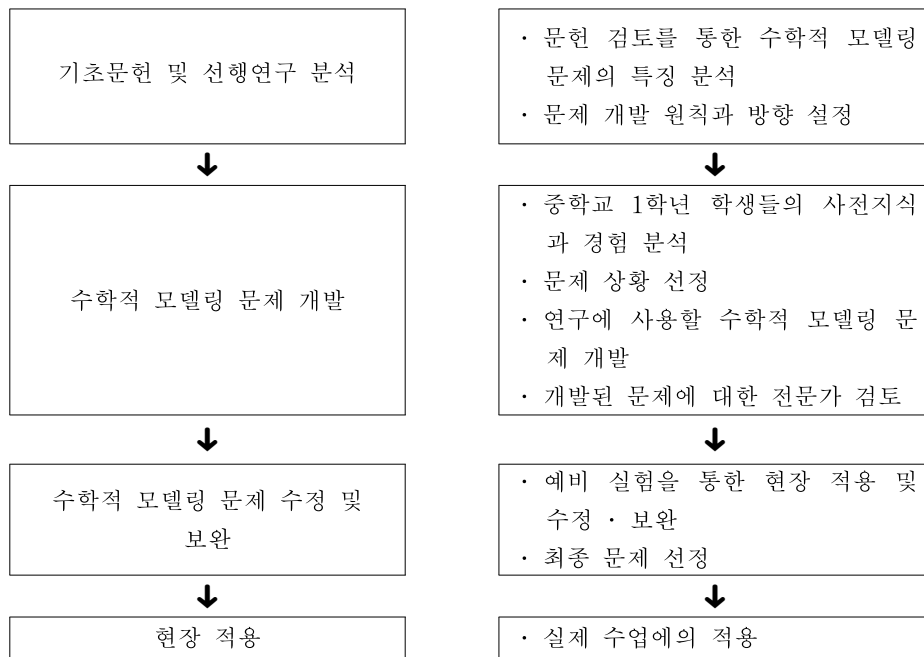
II. 실험수업 및 수학적 모델링 문제의 구성

1. 연구대상 및 방법

본 연구는 중학교 1학년 학생들의 수학적 모델링 정교화 과정을 살펴보고자 광주광역시 A중학교 1학년 남학생 3명을 대상으로 실시한 질적 사례연구이다. 질적 사례 연구란 상황의 심층적 이해와 그 상황에 관계된 것들의 의미를 깊이 파악하기 위한 것으로(Merriam, 1997), 본 연구에서는 그러한 내재적 접근을 통하여 학생의 관점에서 수학적 모델링 상황을 어떻게 이해하고 정교화 해 나가는지 이해하려는 것이다. 또한 연구자가 보고자 하는 현상에 대해 가능한 한 완전한 이해를 얻기 위해서는 연구대상의 의도적 표집이 요구되는바, 본 연구에 참여한 학생들은 담당 수학교사가 연구의 목적을 고려하여 추천한 학생들 중에서 연구에 관심을 갖고 참여하기를 희망한 학생들로 구성되었다. 3명의 학생은 지금까지의 수학교육과정에 학습결손이 없는 중상 수준의 학생으로, 실험에 참여한 학생 중 학생B와 학생C는 초등학생일 때 영재학생으로 선발되어 교육받은 경험이 있었고 그 중 학생C는 본 연구에서 수행하는 과제와 성격이 비슷한 열린 문제를 해결해 본 경험이 있었으나 수학적 모델링에 대한 경험은 없었다. 학생A는 영재학생으로 선발되어 교육받은 경험은 없었으나 본 연구에 대한 이해가 가장 높았고 문제 해결 능력도 뛰어났다. 학생A와 학생C는 현재 학년보다 높은 수준의 선수학습이 이루어지지 않았지만 학생B는 고등학교 수준의 선수학습이 이루어진 상태였다. 하지만 본 연구에서 진행된 수학적 모델링 문제 해결 수업에서 학생B의 선수학습 내용은 거의 영향을 끼치지 않은 것으로 판단되었다. 세 학생 모두 수학에 대해 흥미와 관심이 많은 학생들로 수학적 모델링 문제에 대해서도 큰 관심을 보였고 실험에 적극적으로 임하였다.

2. 수학적 모델링 문제의 개발

본 연구에서는 수학적 모델링 및 문제 개발과 관련된 여러 문헌들을 참고하여 [그림II-1]과 같은 수학적 모델링 문제 개발 절차를 설정하였다.



[그림 II-1] 문제 개발 절차

<기초 문헌 및 선행연구 분석> 단계에서는 수학적 모델링을 위한 문제의 특징 및 갖추어야 할 요건에 대한 여러 선행 연구(김동현, 1998; 김민경·홍지연·김혜원, 2010; 김선희·김기연, 2004; 도은혜, 2010; 황혜정, 2007; English, 2006, 2009)들을 참고하여 사용할 문제의 개발 원칙을 1)스스로 문제를 재정의하고 필요한 자료나 정보를 선정하고 정리하여 나름의 해결 전략을 세워 모델을 구성할 수 있는 비구조화된 문제, 2)고유 모델 구성을 수반하는 최종 산출물을 요구하는 문제, 3)학생들의 경험과 수준을 고려하여 한 가지 이상의 해결 방법이 있는 문제의 개발로 정하고, <수학적 모델링 문제 개발> 단계에서는 연구의 대상이 될 중학교 1학년 학생들의 사전 지식과 경험을 분석하여 학생들이 실제로 경험할 법 하거나 충분히 이해하고 관심을 가질 수 있는 문제 상황을 선정, 예비문제를 포함하여 5개의 수학적 모델링 문제를 개발하였고, 3인의 전문가(교수 또는 교직경력 5년차 이상의 교사)검토를 통해 적합성을 검증하였다. <수학적 모델링 문제 수정 및 보완> 단계에서 개발된 모델링 문제들은 2명을 대상으로 1차시로 진행된 1차 예비실험, 3명을 두 모둠으로 나누어 5차시에 걸쳐 진행된 2차 예비실험을 통해 수정, 보완되었다.

3. 연구절차

사례 연구는 5차시에 걸쳐 시행되었으며 한 차시에 한 개의 문제를 해결하였다. 문제를 해결하는데 시간제한은 두지 않았으나, 대략 50분에서 90분정도 소요되었다. 예비 문제를 해결하기에 앞서 30분 정도 수학적 모델링에 대한 간략한 설명이 제시된 뒤 예비 문제를 포함한 문제를 해결하는 실험 수업의 흐름은 교사와 함께 과제 확인하기 → 개별적으로 문제의 주요 요소와 해결 방안 탐구하기 → 문제 해결 및 모델 구성하기 → 모델 정교화하기 → 제

시된 문제 상황 해석 및 해결 방안 등에 대한 제안서쓰기 → 교사와 해결방안을 확인·검토하기의 순으로 진행되었다. 학생들은 수학적 모델링의 문제를 해결하는 과정에서 필요한 정보를 수집하는데 사용하거나 복잡한 계산을 간단히 하는데 자유롭게 활용할 수 있도록 컴퓨터가 2대 주어졌다. 본 연구의 제1저자는 교사연구자로서 참여관찰을 하면서 수업을 진행하였는데 수학적 모델링 과정의 각 단계별로 해야 하는 활동을 제안하거나 제시하는 등의 학생들의 모델링 활동 과정에 직접적인 개입을 피하고, 문제를 제시하고 문제 이해를 돕고 학생들의 모델링 과정을 이해하기 위해 발문을 하는 정도로 역할을 제한하였다. 학생들의 설명을 듣는 중에 계산 실수나 잘못된 식의 표현 등을 지적하기도 하는 경우는 있었지만, 모델의 옳고 그름을 평가하지는 않았고 모델을 수정하거나 정교화하는 방법을 설명하지 않았다.

4. 자료수집 및 분석

본 연구를 위해 수집된 자료는 면담 자료, 관찰 자료, 문서 자료 등이다. 면담은 실험을 실시하기 전 개별적으로 약 5분 정도 학생들의 성향, 학업 성취 정도, 수학에 대한 태도 등에 대한 정보를 얻기 위해 실시되었고 비디오로 녹화하였다. 실험 후 면담은 면담지를 작성하는 방법으로 수집하였으며 사용한 모델링 전략, 과제 해결 과정에서 겪은 어려움, 모델링 활동 후 느낀 점 등을 질문하였다. 관찰 자료는 비디오를 이용하여 학생들의 모델링 활동을 녹화한 자료와 교사연구자가 수업 관찰 도중 작성한 필드노트가 있다. 녹화 자료에는 학생들이 모델링 활동을 하는 과정뿐만 아니라 과제를 해결하는 동안 나타난 교사연구자와의 대화, 학생들 간의 대화, 과제 해결을 위해 개발한 모델에 대한 설명 등을 담았고, 필드노트에는 학생들의 모델링 활동을 관찰하면서 학생들의 행동, 태도, 과제 수행 정도에 대한 관찰 내용을 기록하였다. 문서 자료는 모델링 활동에 사용된 과제, 문제 해결 과정 및 결과를 담은 활동지가 있는데 교사연구자가 학생들의 모델링 활동을 돕기 위해 만들어 제공한 활동지 외에 학생들이 추가로 작성한 것도 포함한다. 자료 분석은 학생들의 활동 과정을 멀리서 전체적으로 녹화한 파일과 연구자가 필요한 부분을 가까이서 녹화한 파일을 비교하면서 전사하여 분석하는데 참고하였다. 분석은 전사자료, 동영상 화면, 활동지, 필드 노트, 면담지를 토대로 이루어졌고 주로 동영상, 전사 자료와 활동지가 분석 대상이 되었다. 다만 이것이 불분명할 경우 필기 노트를 확인하였다.

III. 모델링, 모델링 정교화 과정 분석

이 절에서는 실험에서 사용된 모델링 문제 별로 사례연구를 분석한 결과를 기술한다. 이론적 배경에서 살펴본 강욱기(2010)의 수학적 모델링의 정교화 과정을 토대로 각 단계에서 일어난 학생들의 모델링 활동을 구체적으로 기술하여 학생들의 수학적 모델링의 정교화 과정이 어떠한 흐름으로 이루어지는지를 살펴보았다. 또한 분석과정에서 수학적 모델링 정교화 과정을 수정해야 할 필요성이 드러났는데 이 부분에 대해서는 구체적 사례분석을 제시한 뒤 논의하도록 할 것이다.

[문제1] 나도 노트북 하나 장만해볼까?⁴⁾

인터넷 강의를 듣거나 숙제를 하기 위해서 또는 기존에 가지고 있던 노트북의 성능이 떨어져 사용하기 불편할 때 새로운 노트북 구입을 생각 하게 된다. 하지만 값비싼 노트북을 디자인이 예뻐서 또는 최고의 사양을 갖추었다고 무턱대고 구입할 순 없다. 노트북을 구매할 계획이 있다면 노트북의 사양, 사용용도, 가격, 훗날 받게 될 AS까지 꼼꼼하게 비교하고 따져보아야 후회 없는 선택을 할 수 있다. 서로 다른 노트북 중에 제품 선택을 위한 ‘소비자를 위한 구매 팁’을 만들어 보고, 어떤 컴퓨터를 선택하는 것이 최선인지 생각해 보자.

제품	브랜드	가격 (만원)	무게 (kg)	크기 (인치)	배터리 (시간)	부품		
						CPU	하드	RAM
Mac**	A사	149	1.08	11	5	1.7GHz intel core i5	128G	4G
SEN**	S사	120.9	1.79	14	7	1.7GHz intel core i5	500G	4G
Xno**	L사	234.9	1.21	13.3	6	1.9GHz intel core i7	256G	4G
VAI**	O사	129.9	2.27	14	3	2.5GHz intel core i5	640G	4G
Ins**	D사	109.3	2.65	15.6	1.5	2.5GHz intel core i7 프로세서	1TB	4G

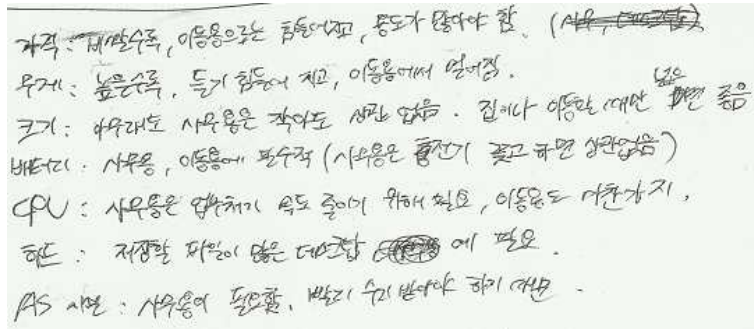
이 문제는 주어진 정보를 특정 목적에 맞게 ‘질 평가’ 하는 방법을 고안하여 해결할 수 있는 문제이다. 노트북 문제는 몇 개의 회사에서 생산되는 노트북에 관한 정보를 바탕으로 하여 소비자들을 위한 노트북 구매 팁을 제공하려는 상황을 묘사하고 있다. 학생들은 주어진 정보를 단순 비교하여 하나의 노트북을 선택하는 것이 아니라 수학적 모델을 구성하고 이를 바탕으로 노트북 구매 팁을 제공하여야 한다. 모델을 개발하는 과정에서 질적 정보를 수량화시키는 방법(예를 들면, 무게가 제일 가벼운 노트북에 높은 점수를 주고 무거운 노트북에 낮은 점수를 주는 것)을 고안하고, 사용 용도별로 몇 가지 정보만을 선택하거나 상대적으로 중요한 요소에 가중치를 주어 점수를 부과하는 등의 통계적 방식을 활용하여 모델을 구성할 수 있다.

1. 실제 상황 탐구

이 단계에서 학생들은 자신의 경험이나 개인적인 선호도에 따라 마음에 드는 노트북을 선택하거나, 문제에서 주어진 노트북의 가격, 무게, 크기, 배터리 등에 대해 ‘비싸다.’, ‘적당하다.’, ‘좋다.’ 등의 질적 판단을 하였다. 그리고 1인치가 몇 센티미터인지, CPU가 무엇인지 등

4) 학생들의 모델링 및 모델정교화 과정에 대한 상세한 기술은 지면의 한계로 인해 [문제1]의 사례 분석결과만을 제시하였으나, 본 논문에서 제시된 모델링 정교화에 관한 논의는 5개의 모델링 문제를 통해 드러난 학생들의 모델링 정교화 과정을 바탕으로 한 것임을 밝혀둔다.

의 정보를 수집하거나 자신이 아는 정보에 대해 서로 의견 교환을 하였다. 학생들은 노트북의 용도를 이동용, 사무용, 데스크탑용, 게임용, A/S용 등으로 분류하고 [그림 III-1]과 같이 노트북의 사용 용도에 따라 필요하거나 중요한 사양을 분석하였다.



[그림 III-1] 실제 상황 탐구 단계에서의 학생C의 정보 분석

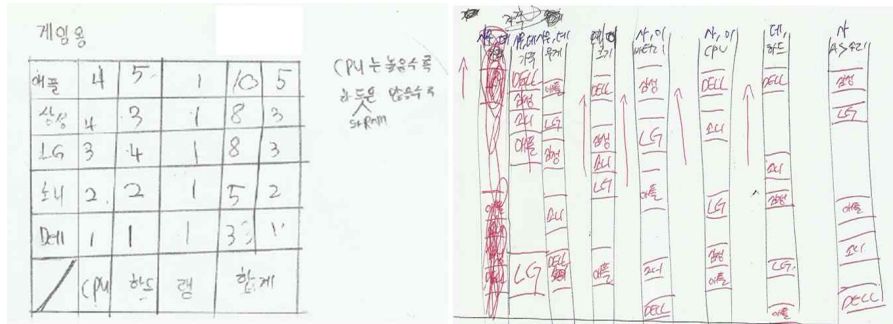
2. 실제 문제 구성

세 명의 학생들 모두 용도별로 노트북을 선택하는 실제 문제를 구성하였다. 이를 위해 학생A와 학생B는 질적인 정보를 수량화해야 할 필요성을 느끼고, 질적 정보의 수량화 방법으로 각 조건별로 1등부터 5등까지의 순위를 매겨 이들의 합으로 노트북을 선택하고자 하였다. 학생C도 각 조건별로 노트북에 순위를 매기는 방법을 택했으나 다른 두 학생과 달리 순위를 숫자로 표현하지 않고 띠그래프와 같은 형식의 그림으로 표현하고자 하였다. 즉, 순위는 그림에서의 위치로 나타내어지게 되는데, 여기서의 실제 문제는 노트북의 순위를 표현한 그림에서 용도별로 중요하다고 생각되는 기능의 순위를 고려하여 노트북을 선택하는 것이다 ([그림 III-2] 참고).

3. 수학적 모델 구성

학생A와 학생B는 각 노트북의 정보를 수량화한 순위를 모두 더한 합이 가장 적은 노트북을 선택하는 모델을 구성하였다. 두 학생은 자신의 모델을 가장 잘 표현할 수 있는 표상양식으로 표를 선택하였다. 하지만 이 표상을 활용하는 방법은 서로 달랐는데, 학생A는 용도에 관계없이 좋은 노트북, 게임용, 외출용, 사무용으로 구분하여 각 용도별로 필요한 사양만을 택해 [그림 III-2]의 왼쪽과 같이 용도별 모델(표)을 구성하였다. 그리고 서로 다른 용도의 노트북이 택하는 사양이 같더라도 순위를 매기는 방법을 달리하였다. 예를 들어, 용도에 관계없이 좋은 노트북을 사고자 할 때 크기가 가장 큰 D사의 노트북이 1위를 차지하였지만 외출용 노트북에 대해 순위를 매길 때에는 크기가 가장 작은 A사의 노트북이 1위를 하였다. 학생B는 사무용, 고장(A/S), 게임용으로 용도를 구분하여 노트북을 선택하는 모델을 구성하였으나 학생A와 같이 용도별로 모델을 따로 구성하지 않고 용도에 관계없이 각 사양별 노트북의 순위를 모두 매긴 후에 용도별로 중요한 사양의 순위만 따로 선택하여 더하는 모델을 구성하였다. 학생C는 [그림 III-2]의 오른쪽 그림과 같이 각 사양별로 노트북의 순위를

띠에 표시하였는데 띠에 적힌 노트북의 위치는 각 조건 내에서의 상대적 위치이다. 예를 들어, 가격에서 L사의 노트북은 나머지 노트북들에 비해 가격이 훨씬 비싸므로 이는 부정적 요인이라 판단하여 띠에서의 위치를 다른 노트북에 비해 한참 아래쪽에 표시하였다.



[그림 III-2] 노트북 문제에서 학생A(좌측), 학생C(우측)의 모델

4. 모델 내에서의 해

학생A와 학생B는 자신들이 만든 모델(표)에서 용도별로 고려해야 할 조건들의 순위를 더해 이들 합이 가장 작은 노트북을 선택하였다. 학생A의 모델에서는 게임용으로 D사, 사무용으로 S사와 D사, 외출용으로 A사와 S사의 제품이 선택되었다. 그런데 사무용과 외출용에서 각각 두 개의 노트북이 선택되었고, 하나의 노트북이 선택되도록 하기 위해서는 모델을 수정해야 할 필요성을 느끼고 기존의 모델을 정교화하였다. 학생B의 모델에서는 사무용, 고장(A/S)에 S사의 제품이 선택되었고, 게임용으로 D사의 제품이 선택되었다. 학생C는 자신이 구성한 모델에서 노트북의 상대적 위치만으로 원래 자신의 의도대로 해를 구할 수 없다는 것을 깨닫고 그림으로 나타내었던 순위를 숫자로 표현하는 것으로 모델을 수정하였다.

5. 모델 정교화

학생A는 질적 정보를 수량화시키는 방법으로 순위 자체를 수치로 활용하는 이전의 방식에서 점수를 별도로 부여하는 방식으로 변경하였다. 하지만 이 방법으로도 노트북이 하나로 선택되지 않자 [그림 III-3]와 같이 각 용도별로 중요하다고 생각하는 사양에 가중치를 주어 중요도가 높은 항목의 점수가 많이 고려되도록 모델을 정교화하였다. 예를 들어, 사무용 노트북에서는 배터리 시간, 가격, CPU 순으로 중요도가 높다고 생각하여 배터리 시간은 7점, 가격은 5점, CPU는 3점을 만점으로 하여 제품에 점수를 부여했다. 이 때, 배점 간격은 학생A의 임의적인 주관에 따라 결정되었고, 이와 같은 방법으로 사무용, 외출용 노트북을 선택하는 모델을 정교화하여 한 가지 제품이 선택될 수 있도록 하였을 뿐만 아니라 용도별로 중요한 기능에 더 높은 점수를 부여하는 방법으로 목적에 더 적합한 모델로 발달시켜 나갔다.

중학생의 수학적 모델링 정교화 과정에 관한 사례 연구

[그림 III-3] 노트북 문제에서 학생A의 정교화된 모델

학생B의 경우 흥미로운 점은 용도별로 노트북을 선택하는 이전의 모델에서 모든 용도를 고려하였을 때 가장 우수한 품질의 노트북을 선택하는 총체적 방식으로 모델을 변경, 정교화하였다는 것이다. 즉, 학생B는 초기 모델의 탐구 과정에서 자신이 해결해야 할 문제를 용도별로 제품을 선택하려고 했던 것에서 어느 용도로 사용하여도 품질이 우수한 제품을 선택하려는 목적으로 문제를 재구성하였고, 이전 모델을 정교화하는 과정을 통해 수정한 실제 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

[그림 III-4] 노트북 문제에서 학생B의 초기모델(좌측)과 정교화된 모델(우측)

학생B는 사무용, 고장(A/S), 게임용에서 택한 사양의 순위를 더한 합으로 용도별 노트북을 선택했던 초기의 모델에서 [그림 III-4]의 오른쪽 그림과 같이 사무용, 고장(A/S), 게임용, 기능면, 전체 기능의 순위의 합을 변수로 고려하여 이들의 합이 최소가 되는 노트북을 선택하는 모델로 정교화하였다. 이는 자신의 경험을 반영하여 특정 용도만을 고려한 노트북보다는 어느 용도로 사용하여도 좋은 노트북을 선택할 수 있는 구매 팁을 제시하는 것이 실제 상황에 더 적합하다고 판단했기 때문이다. 즉, 학생B의 모델은 모든 용도를 고려한 점수를 모두 더하는 것이기 때문에 이와 같은 생각을 반영한 모델이라 할 수 있다.

학생C는 질적 정보의 상대적 위치를 고려하여 점수를 매기는 방법으로 모델을 정교화하였다. 다음은 학생C의 정교화 과정이 드러난 발췌문이다.

발췌문1.

(1.1) 학생C: 정확해야 해서 다시 그려요. 정확해야 해서 점수로 바꿔야 하는데 크기로만 어림잡기에는 너무 정확하지 않아서요.

(중략)

(1.2) 학생C: 이게 점수가 다 영점 몇이 나와 버리고 이게 한 4점에서 2점 정도까지 나왔거든요. 근데 다 더한다 치면 다 다르잖아요. 크기, 무게 이런 것에 따라서. 점수 기준이...

(1.3) 교사5): 점수 기준이 다르게 됐어? 각각 나눠버려서 그런가보다. 넌 비를 중요하게 생각하는 거잖아. 그렇지?

(1.4) 학생C: 네. 회사마다 점수 더한 것을 상관하지 않고 만약 이렇게 빗대어서... 아니 대박서 4랑 4.2랑 3점이란 차이만 설명한다고 봐도 문제없을 것 같아요.

(중략)

(1.5) 학생C: 어째 산으로 가는 것 같아.

학생C는 노트북의 질적 정보를 그림에서의 위치로 표현한 이전 모델을 사용하여 문제를 해결할 수 없다고 판단하자 계산 가능한 숫자로 표현하려는 시도하였는데, 이는 그림에서의 상대적 위치를 고려하여 사양별로 각 노트북에 점수를 매기는 방식이었다. 즉, 그림에서 표현하였던 상대적 위치에 따라 점수의 간격이 달라지도록 하였다. 하지만 이를 표현하기 위한 체계적인 방법이나 절차를 생각하지 않고 숫자로 주어진 정보(예, 가격 235만원)에 따라 어렵계산을 통하여 구하려 하였고 결국 만족할만한 값을 얻을 수 없다고 판단한 학생C는 발췌문 (1.5)와 같이 자신의 방법이 적절하지 않음을 깨닫고 이를 수정하여 최종적으로 정교화된 모델을 [그림 III-5]과 같이 구성하였다.

가성비	배터리	화면	무게	가격	배터리	화면	무게	가격	배터리	화면	무게	가격	배터리	화면	무게	AS	
DELL	5	이탈	5	DELL	5	BM	5	DELL	5	DELL	5	DELL	5	DELL	5	0	5
삼성	4.5	LG	4.5	삼성	3	4	4	DELL	4.5	삼성	3	3	3	3	3		
삼성	4	삼성	2.5	LG	2	1	1	LG	2	삼성	2	삼성	2	삼성	2		
이탈	3	삼성	0.7	이탈	0	DELL	0	이탈	0	LG	0.8	이탈	0	이탈	0		
LG	0	DELL	0														

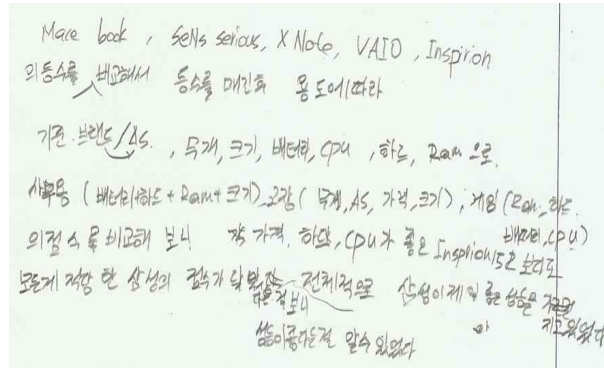
[그림 III-5] 노트북 문제에서 학생C의 정교화된 모델

이 모델은 사양별로 가장 좋은 제품에 5점, 가장 좋지 않은 제품에 0점을 주고 나머지 제품들은 정보의 상대적 차이를 고려하여 점수를 계산하여 얻어진 것이다. 학생C는 이와 같은 방법으로 자신의 모델을 최종적으로 정교화하였으며 모델에서 용도별로 고려해야 할 사양의 점수를 더한 합을 이용하여 노트북을 선택하였다.

5) 발췌문1을 포함하여 실험수업에 등장하는 교사는 본 논문의 제1저자를 의미한다.

6. 실제 상황에의 적용

학생들은 정교화된 모델에서 얻어진 해를 바탕으로 ‘소비자를 위한 구매 팁’을 제시한다. 이 구매 팁에는 자신이 용도별로 선택한 노트북과 그 노트북을 선택한 근거를 제시하였다. 아래 [그림 III-6]은 학생B가 제시한 구매 팁이다.



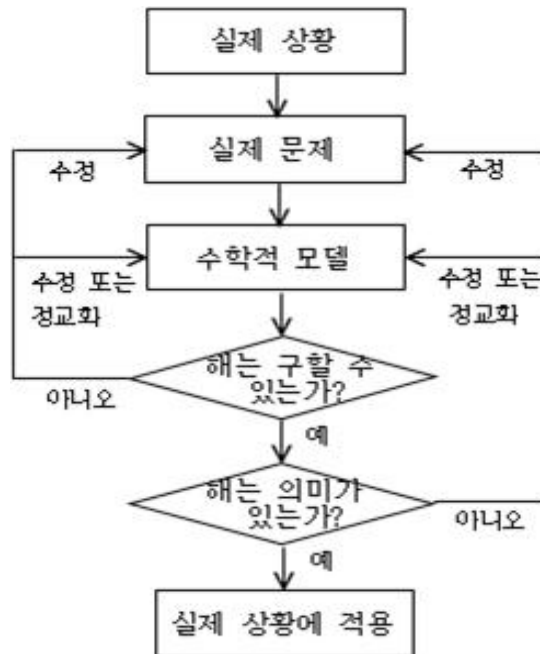
[그림 III-6] 학생B가 제시한 소비자를 위한 구매 팁

이상 본 연구에서 진행된 모델링 문제 해결과정을 통해 드러난 학생들의 활동을 분석한 결과, 주요 참고 모형이었던 강욱기(2010)가 제시한 모델의 수학적 모델링의 정교화 과정과 차이가 있음을 알 수 있었다. 대략적인 흐름은 유사하였으나 가장 중요한 차이점은 모델링 활동 과정 중에 해결하고자 하는 목적에 맞추어 구성된 문제 자체의 수정이 일어날 수 있다는 점이다. 학생들은 구성된 모델에서 해를 구할 수 없거나 모델에서 얻어진 해가 의미가 없다고 판단될 때 종종 초기에 설정한 문제를 수정하였다. 예를 들어, 노트북 문제에서 학생 C가 노트북의 순위를 그림으로 표현한 모델로 해결할 수 없는 경우가 발생하자 순위를 매겨 노트북을 선택하고자 했던 초기의 문제를 수정하여 노트북의 성능에 따라 점수를 매겨 노트북을 선택하는 문제로 재구성하였다.

한편 학생B는 초기에 용도별로 노트북을 선택한다는 목표를 설정하고 이를 해결하기 위한 모델을 구성하였다. 이 모델은 용도별로 노트북의 순위를 합산하여 그 값이 가장 적은 노트북을 선택하는 것이었다. 하지만 용도별로 노트북을 선택할 수 있도록 하는 모델은 실제 상황에 비춰 큰 의미가 없다고 판단하고 어느 용도로 사용하여도 좋은 노트북을 선택하는 문제로 해결 목표와 그에 따른 문제를 수정한다. 그리고 재설정된 문제에 맞춰 이전 모델에서 용도별 노트북 선택을 위해 순위를 더한 값과 모든 조건의 순위를 더한 값의 합이 가장 적은 노트북을 선택하는 모델을 도출하였다. 이것은 어느 용도로 사용하여도 좋은 노트북을 선택하기 위해 학생B가 생각하는 최적의 모델이다. 이처럼 학생들은 모델 자체의 문제로 문제가 해결이 되지 않거나, 모델을 통해 어떤 해를 얻었을 때 그 해가 의미가 없다고 판단 될 때 설정된 문제를 수정하는 모습을 보였고, 이는 모델의 정교화가 발생하는 경우를 학생들이 자신이 구성한 수학적 모델에서 얻어진 해가 의미가 없을 때에 대해서 발생한다고 보고한 강욱기(2010)의 모델과의 차이점이라고 할 수 있다.

본 논문에서는 구체적으로 소개되지 않았지만 여수 엑스포 문제에서 학생B는 초기 모델

에서 자신이 고려하지 못했던 고속도로와 국도에서 자동차의 속도, 연비가 달라짐을 반영하여 모델을 정교화하려고 하였다. 하지만 목적지에 도착하기까지 이용하는 고속도로와 국도의 거리를 알 수 없어 이 모델을 사용하여 문제를 해결할 수 없게 되자, 고속도로에서 달리는 속력을 기준으로 이동시간을 계산한 기존 모델에서 국도를 달릴 때는 고속도로를 달릴 때보다 속력이 낮아짐을 고려하여 이동 시간에 30분을 추가하는 모델로 정교화하였다. 이를 참고하여 수정된 모델링 과정은 [그림 III-7]와 같다.



[그림 III-7] 수정된 학생들의 모델링 활동 과정

IV. 모델 정교화 과정에 영향을 미치는 요인

학생들의 모델링 활동을 관찰하고 면담하는 동안 다양한 요인들이 모델 정교화 과정에 영향을 미치는 것을 알 수 있었다. 제시된 모델링 문제의 구조나 제공하는 정보의 양, 모델에 대해 사고하거나 자신의 사고 과정을 반성하는 메타인지적 사고, 문제 해결 과정에서 이루어진 교사나 동료와의 의사소통 등이 영향을 미치는 요인으로 드러났다.

1. 모델링 문제의 구조와 가용한 정보

모델링의 정교화가 일어나기 위해서는 모델링 사이클을 한번이상 경험할 필요가 있는데, 이는 학생들이 재사용 가능하고 공유 가능하며 일반화 가능한 체계인 모델을 개발하는 과정에 초점을 둔 모델링 활동에서 자신의 모델에 대한 설명과 예측을 수정하면서 이루어진다(신은주, 2005). 하지만 문제의 해결 방법이 뚜렷하게 드러나도록 설계된 문제에서는 모델링 사이클이 두 번 이상 일어나기 어려우므로 모델 정교화가 일어나기 힘들다. 따라서 문제의

해결 방법이 뚜렷하게 드러나지 않은 비구조화된 문제로서 다양한 사고방식을 허용하고 해결 방법이 다양하며 문제가 문제 해결에 필요한 모든 정보를 담고 있지 않도록 문제를 구성하여야 한다. 이에 본 연구에서는 학생들의 모델 정교화 과정이 일어날 수 있도록 실생활을 반영한 비구조화된 문제로서 문제 해결에 필요한 모든 정보를 포함하지 않는 문제를 개발하여 학생들에게 제공하였다. 하지만 두 차례의 예비 실험 결과 이러한 문제를 제공한다고 해서 반드시 모델 정교화 과정이 일어나는 것은 아님을 알 수 있었다. 문제가 너무 적은 양의 정보를 포함하는 경우, 학생들은 문제 해결을 위해 필요한 정보를 찾고, 조직하고, 구성하는 과정에 너무 많은 시간을 쏟게 되어 처음 개발한 모델을 실제 상황에 더욱 적합하도록 수정하거나 정교화하려는 노력을 소홀히 하는 경향을 보였다. 따라서 모델 정교화가 일어나도록 하기 위해서는 적당한 양의 정보를 포함하는 비구조화된 문제를 제공해야 하며, 요구하는 목적이 분명하게 드러나야 한다. 이것은 학생들의 문제 해결 방향을 한 가지로 제한하는 것이 아니라 문제를 통해 학생들이 어떤 활동을 해야 할지에 대한 목적을 분명히 하는 것이다. 문제 개발자의 의도나 목적이 분명히 드러나지 않은 문제를 제공할 경우, 비구조적인 수학적 모델링 문제의 특징에 의해 학생들은 수학적 사실을 전혀 사용하지 않거나 모델을 개발하지 않는 등 전혀 다른 방향으로 문제를 해결하게 된다.

또한 교사는 모델링 문제의 구조와 모델링 활동이 가장 활발히 일어날 수 있도록 가용한 정보의 범위에 대해 미리 정확하게 숙지하고 있어야 한다. 이를 위해서 교사는 수학적 모델링의 정교화 과정이 일어날 수 있는 모델링 문제를 개발하여 학생들에게 제공할 때, 먼저 교사 스스로 모델을 구성하여 이를 상황에 적합하도록 모델을 정교화하여 문제를 해결해보아야 한다. 사고실험을 통해 학생들이 어떻게 모델을 구성하고 이를 정교화할지를 예측해봄으로써 학생들이 모델링 문제를 해결하는 동안 수학적 모델링의 정교화 과정이 잘 일어날 수 있도록 하는 적절한 수준의 정보량, 문제의 구조 등을 결정할 수 있다.

2. 메타인지적 사고

메타인지는 학생들이 모델과 모델의 개발과 이용에 직접적으로 도움을 주는 사실, 기술, 이해, 과정을 포함한 자신의 인지 활동의 과정 및 결과를 조작하고 검토하고 수정함으로써 더 깊이 그것에 대해 사고하는 과정을 거칠 때 나타나는데 자신의 계산 과정에 나타나는 오류를 수정함으로써 모델을 정교화하거나, 시행착오를 통해 모델 정교화 방향을 결정하거나, 모델에 구조와 기능에 대해 사고함으로써 모델을 정교화하는데 영향을 미친다. 노트북 문제를 해결하는 활동에서 모델 정교화 과정에 학생들의 다양한 메타인지적 사고가 나타났다.

먼저 학생A는 초기 모델에서 구한 해가 여러 개 이므로 소비자에게 더 좋은 구매 팁을 제시하기 위해서는 모델을 정교화할 필요성이 있음을 느끼고 모델을 정교화하기 위해 다양한 시도를 하게 된다. 첫 번째 시도는 상위권의 개수와 하위권의 개수를 비교하는 것이었다. 이것은 등수를 매겨 표로 나타내었던 기존의 모델에서 1등, 2등을 ‘상’, 3등을 ‘중’, 4등, 5등을 ‘하’로 정하고 각 노트북의 상, 중, 하의 개수를 비교하여 더 좋은 노트북을 선택하는 것이었다. 하지만 이 방법이 노트북을 선택하는데 적합하지 않다는 것을 깨닫고 1등의 개수를 세어 노트북을 선택하는 모델로 수정하려고 시도하였다. 하지만 이 방법도 적합하지 않다는 것을 깨닫고 부등호를 사용해서 모델을 나타내는 방법, 성능을 비교하여 1, 2, 3등에게만 점수를 매겨 비교하는 방법, 기존의 등수를 매겨 합이 가장 낮은 노트북을 선택하는 모델에서

순위가 가장 높은 제품부터 5점씩 부여하는 방법 등 다양한 시도를 하게 되고 여러 번의 시행착오를 거쳐 중요 요소에 가중치를 부여하여 점수를 계산하는 최종 모델을 완성하였다. 이러한 시행착오 과정에서 학생A는 자신의 모델에 대해 사고하고, 모델 구성 과정에서 사용한 수학적 지식, 계산에 대해 검토하고 적합성을 판단하는 메타인지적 사고가 나타났다. 학생A는 자신의 생각을 혼잣말처럼 말로 계속 표현하며 머릿속에 있는 생각을 겉으로 드러내는 과정을 통해 자신의 사고에 대해 사고하는 메타인지적 기능이 활성화되는 것처럼 보였다.

학생B의 모델 정교화 과정은 자신의 모델을 문제의 목적에 비추어 적합성을 판단함으로써 일어났다. 학생B의 초기 모델은 게임용, A/S, 사무용의 용도별 노트북 선택 모델이었다. 하지만 각 용도는 물론 전체 기능도 중시하는 모델이 문제의 목적에 적합한 모델이라고 판단하여 이를 고려한 모델로 정교화하였다. 학생B는 각 사양별로 순위를 매기고 용도별로 필요한 요소의 순위를 더해 점수의 합이 적은 노트북을 선택하도록 하였던 기존의 모델에서 사무용, 게임용, A/S용의 순위의 합과 전체 요소의 순위의 합을 더하여 그 합이 가장 적은 노트북을 선택하는 방법으로 모델을 정교화하였다. 이는 메타인지적 사고에 의해 문제의 목적에 비추어 자신의 모델을 평가하고, 실제 상황에서의 적합성을 고려하여 모델 정교화가 일어난 것이었다.

학생C는 문제에서 주어진 질적 정보를 수량화하는 과정에서 자신의 계산 방법이 타당한지를 판단할 때 메타인지적 사고가 나타났고, 시행착오를 통해 문제 상황에 적합한 계산 방법을 생각해 낼 수 있었다. 학생C는 순위를 그림으로 표현하는 초기의 모델에 대해 “크기만 어렵잡기에는 정확하지 않기 때문에 점수로 바꾸어야 한다.”라고 말하고 계산을 통해 점수로 나타내었지만 그 값들이 노트북의 성능의 좋고 나쁨을 비교하는 척도를 객관적으로 제공하지 못한다고 판단하였다. 그리고 정보의 질을 객관적으로 수량화하는 방법을 생각해냈다. 이처럼 이전의 계산과정을 검토하고 수정하는 과정에서 나타난 학생C의 메타인지적 사고는 모델 정교화에 영향을 미쳤다.

3. 동료, 교사와의 의사소통과 교사의 역할

모델링 활동이 진행되면서 학생들 간의 의사소통의 양상에 변화가 생겼다. 모델링 활동 초기의 의사소통은 상호 협력적이기 보다는 오히려 독백과 같았다. Lesh, Lester 와 Hjalmarson(2003)에 의하면 이러한 자기중심적 행동은 비교적 경험이 부족한 문제 해결자나 경험이 있더라도 친숙하지 않은 상황을 접할 때 자주 발생한다고 하였는데 본 연구에서 진행된 모델링 활동에서도 학생들은 차시가 진행되면서 주변 상황에 익숙해지고 자주 접해보지 않은 모델링 형태의 문제에 적응해 나가면서 타인과의 의사소통에서 얻은 정보나 의견을 자신의 모델 개발 과정에 반영하기 시작했다. 실험 초기에 학생들의 문제 해결과정에서의 의사소통은 자신의 생각을 독백처럼 이야기하는 특징을 보였고 동료들에게 도움을 줄 수 있는 아이디어나 의견을 제시하더라도 다른 학생들이 그것을 받아들이거나 고려하지 않았다. 하지만 시간이 지날수록 문제 해결을 위해 필요한 정보를 공유하고 다른 사람이 추가로 고려해야 하는 변인에 대해 의견을 제시할 때, 그것을 수용하여 자신의 모델 개발 과정에 고려하는 특징을 보였다. 이는 학생들이 개발한 모델에서도 알 수 있는데, 1차시부터 3차시까지 개발한 모델들은 서로 다른 아이디어를 가지고 구성한 각기 다른 모델이었던 반면 4, 5

차시에 개발한 모델은 각자의 모델을 개발하는 것이었음에도 불구하고 모두 비슷한 형태로 나타내어 졌다. 4, 5차시에서는 자신의 이전 경험에 비추어 모델 구성 시 고려해야 할 사항들을 서로 이야기하면 각자의 모델에서 미처 고려하지 못했던 변수들은 깨닫게 되어 이를 즉시 자신의 모델을 정교화하는데 활용하였다. 이는 결국 모델 정교화 과정에서 타인과의 의사소통이 중요한 역할을 하게 되었다는 것을 보여주는 것이라 할 수 있다.

한편 본 실험에서 교사는 전반적인 수학적 모델링 활동 과정에서 문제 해결 과정에 직접적으로 개입하지 않고 문제의 이해를 돕거나 개발한 모델 또는 해결 방법에 대한 설명을 요구하는 정도의 관여를 하였다. 그럼에도 불구하고 모델에 대한 설명 요구, 학생에 대한 격려를 통해 학생들의 모델 정교화 활동에 영향을 미칠 수 있음 알 수 있었다. 우선 교사는 학생이 어떤 수학적 모델을 구성하면 그것이 잠정적인 것이라 하더라도 그에 대한 설명을 요구하였다. 학생은 교사에게 자신이 개발한 모델과 그 모델의 정당성을 설명하는 과정에서 모델에 대해 반성적 사고할 수 있게 되었고, 이는 모델 정교화 과정으로 이어졌다. 예를 들어, 다이어트 문제에서 학생A의 처음 모델은 몸무게 변화를 고려하지 않고 운동 소비 칼로리를 계산하는 것이었다. 이후 다이어트 기간 동안 몸무게의 변화가 생긴다는 사실을 깨달았지만 기존 모델에서 얻어진 해를 이용하여 세운 운동 계획대로 운동할 경우에도 목표 체중으로의 감량이 가능하다고 생각하고 모델을 수정하지 않았다. 교사는 학생A의 모델에서 해를 구하는 과정에 대해 지속적으로 질문하였고, 학생A는 이에 답하는 과정에서 자신의 계산 오류가 있었음을 깨달았고 이것 때문에 처음 모델을 이용해 세운 운동계획이 목표 체중으로의 감량을 가능하게 한다고 잘못 생각했다는 사실을 알게 되었다. 결국 학생A는 몸무게 변화를 고려하여 기존의 모델을 수정해야할 필요성을 느끼게 되었고, 몸무게가 50kg일 때와 49kg일 때를 나누어 운동 소비 칼로리를 계산하는 모델로 정교화하였다.

때로는 교사의 격려도 학생의 모델정교화에 중요한 영향을 미쳤다. 학생C는 노트북 문제에서 그림으로 표현한 노트북 순위를 정확한 숫자로 표현해야 할 필요성을 느꼈지만, 계산 절차의 오류로 계산된 값의 합으로 노트북을 선택할 수 없게 되자 좌절하는 모습을 보이며 문제에 대한 흥미와 집착력이 급격히 떨어지는 듯하였다. 이 때 교사는 기존의 아이디어가 매우 좋았으며 이를 잘 활용할 수 있는 방법을 생각해 볼 것을 제안하였고, 직접 구체적인 방향을 제시하지 않았음에도 학생C는 교사가 자신의 아이디어를 가치 있는 것으로 여긴다는 점에 자신감을 얻어 제품의 질적 차이를 반영하여 점수를 매기고자 하였던 기존의 아이디어를 그대로 유지한 채 이를 잘 표현할 수 있는 계산 방법을 찾아 기존의 노트북을 선택하는 모델을 정교화하였다.

이상에서 밝힌 모델 정교화 과정에 영향을 미치는 요인을 다음과 같이 정리할 수 있다. 첫째, 하나의 모델을 정교화하는 과정에서 한 가지 요인만이 영향을 미치는 것이 아니라 여러 요인들이 복합적으로 작용한다. 예를 들어, 노트북 문제에서 학생C가 모델을 정교화하는데에는 모델링 문제뿐만 아니라 교사의 역할, 메타인지적 사고, 그림그리기와 같은 문제 해결 전략적 요소들까지 복합적으로 영향을 미쳤다. 둘째, 모델 정교화에는 상호작용의 역할이 중요하다. 여기서 상호작용은 동료, 교사와의 상호작용뿐만 아니라 문제, 모델과의 상호작용도 모두 포함한다. 학생들은 동료, 교사와의 의사소통과정에서도 모델을 정교화할 필요성을 깨닫거나 모델 정교화에 관한 아이디어, 방법, 고려해야할 변수 등에 관한 정보를 얻을 수 있다. 그리고 문제 상황, 자신이 개발한 모델과 끊임없이 상호작용 하면서 모델이 문제 상황에 적합한지, 계산 과정에 오류가 없는지, 계산 방법이나 절차가 문제 또는 모델의 목적에 부합한지 등을 검토, 확인함으로써 모델 정교화 과정이 일어났다. 셋째, 다양한 사고방식을

허용하는 열린 분위기 조성도 모델 정교화가 잘 이루어지게 하는 중요한 요인임을 알 수 있었다. 우선 모델링 문제 자체부터 학생들의 사고를 제한하고 유일한 해결 방법을 유도하는 것이 아니라 창의적인 사고를 통해 다양한 방법으로 해결할 수 있는 문제가 되어야 하고 교사 역시 학생들의 문제 해결 활동에 직접적으로 참여하여 방향을 제시하거나 제안하기 보다는 다양한 사고에 대해 격려해주고 지지해주는 발언 및 태도를 보이는 것이 모델링 및 모델 정교화 활동에서는 바람직하다고 하겠다. 또한 자신의 의사 표현을 자유롭게 할 수 있는 환경을 조성해 주는 것이 서로의 다양한 아이디어를 공유하는 것은 물론 비판적인 사고를 통해 보다 실제 상황에 적합한 모델로 정교화할 수 있도록 돕는다.

VI. 결론

현대사회에서 문제해결자의 목적에 따라 복잡한 실세계 현상을 이해하고 당면한 문제를 해결하기 위해서는 현상에 대한 모델을 세움과 동시에 모델을 정교화해 나가는 복잡한 모델링 과정이 필수이므로, 상대적으로 수학적 지식이 풍부하지 않은 학생들이라 하더라도 수준에 맞는 모델 정교화가 포함된 모델링 활동을 경험하게 하는 것은 문제해결 교육의 관점에서 매우 중요하다. 이에 본 연구에서는 문헌연구와 예비 실험을 통해 중학생 수준에서 모델 정교화가 일어날 수 있는 문제를 개발하고 이를 3명의 중학교 1학년 학생에게 적용하여 그 가능성을 확인하였다.

참여 학생들은 비구조화된 복잡한 실생활 상황에서 실제 문제를 구성하고 변인을 파악, 관계를 설정하여 수학적 모델을 개발하고 이를 검토, 예측, 분석, 확인을 통해 합리적이고 정교화된 모델로 수정하여 실제 상황에 적용하였다. 모델을 수정하는 과정에서 많은 인지적 모순과 현실 조건과의 마찰에 부딪히면서 교사, 동료와의 상호작용과 자신의 메타인지적 사고를 통해 정교화된 모델을 구성해 나가게 되었으며, 교사는 학생의 불안정한 모델에 대해 정확한 이해를 가지고 있을 때 상황에 대한 발문이나 메타인지적 사고의 촉진을 도울 수 있었고 이를 통해 안정되고 정교화된 모델로의 전이가 일어났다. 또한 수학적 모델 내에서의 해를 구하고 난 후에도 문제 상황에 비추어 자신의 모델을 재평가하고 해의 타당성을 확인하도록 권장할 때 반성적 사고가 촉진되어 안정적이고 문제 상황에 더 적합한 모델로의 발전이 이루어졌다.

본 논문을 마무리하며 마지막으로 논의하고자 하는 점은 모든 학생이 모든 문제에서 항상 모델 정교화가 원활하게 일어난 것은 아니었다는 점이다. 예를 들어 문제 해결자가 너무 빨리 (자신의 입장에서 너무 당연하다고 여기는) 고정된 틀이나 과정에 고착될 때 그 모델을 다시 수정, 정교화하는데 많은 시간과 노력이 소요되었다. 또한 모델을 통해 계산된 결과가 오류 또는 이해되지 않는 결과가 나올 때 문제 해결자가 자신의 사고에 대한 반성을 하기 보다는 단순한 과정 실행 실수라고 생각할 경우 모델 정교화에 방해가 생겼다. 노트북 문제에서 학생A는 제품의 질을 수량화하기 위한 계산 과정에서 이해되지 않는 결과가 나오자 계산기를 이용하여 여러 번 계산 결과를 확인하였다. 이는 오류 발생의 원인이 적절하지 않은 자신의 사고방식이라고 생각하기보다 계산 과정의 실수라고 생각하였기 때문이다. 한참 동안 계산 결과를 확인한 후에야 자신의 실수를 깨닫게 되었고, 자신의 사고에 대한 반성을 통해 다른 방법으로 모델을 정교화할 수 있었다. 이렇듯 학생들의 모델링 정교화 과정의 원활한 흐름을 방해하는 요인이 나타날 때 교사는 직접적인 방향제시 보다는 교사, 동료와의

상호작용을 통해 수학적으로 의사소통하면서 자신의 사고를 명료화하고, 반성을 촉진하고, 구성적 비판을 주고받고 서로 아이디어를 공유하고 개발해 나가도록 장려하는 것이 바람직하다. 이를 위해서는 모델링 활동에 적합한 문제, 즉 비구조적이고 다양한 해결 방법이 가능한 문제를 고안, 제시할 뿐만 아니라 정답과 오답을 구분하여 평가하지 않고 수학적으로 엄밀하지 않은 모델이라 하더라도 상황을 설명하고 해석하도록 장려하는 등의 자유로운 의사소통을 통해 창의적이고 발산적인 사고를 할 수 있는 학습 분위기를 조성해 주는 것도 매우 중요하다.

참고 문헌

- 강옥기 (2010). 수학적 모델링의 정교화 과정 연구. *수학교육학연구*, 20(1), 73-84.
- 강옥기, 허난, 조현공, 박경은, 이환철 (2010). *수학교육학 정론*. 서울: 경문사.
- 교육과학기술부 (2011). *수학과 교육과정*(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8]).
- 김동현 (1998). 모델링을 활용한 문제의 연구, *한국학교수학회*, 1(1), 131-138.
- 김미영·강순자 (2007). 수학적 모델링 학습을 위한 자료 개발과 적용(8-가 부등식과 함수 단원을 중심으로). *과학교육연구지*, 31(1), 11-24.
- 김민경·홍지연·김혜원 (2010). 수학적 모델링 적용을 위한 문제상황 개발 및 적용. *수학교육*, 49(3), 313-328.
- 김선희·김기연 (2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. *학교수학*, 6(3), 283-299.
- 김수미 (1993). *중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰*. 서울대학교 석사학위논문.
- 김휴진 (2010). *중학생들의 수학적 모델링 과정 분석과 SOLO 분류법을 활용한 평가*. 이화여자대학교 석사학위논문.
- 도은혜 (2010). *수학적 모델링 활동 수업을 위한 문항 개발 및 적용*. 경남대학교 석사학위논문.
- 류희찬 (2003). *수학교육에서 모델링 지도의 의미와 방안*. *청람수학교육*, 11, 1-19.
- 류희찬·김지연 (2005). 엑셀을 활용한 소그룹 모델링에서의 상호작용: 중학교 2학년 대수 영역을 중심으로. *수학교육학연구*, 15(1), 75-105.
- 손홍찬·류희찬 (2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용. *수학교육학연구*, 15(4), 505-522.
- 손홍찬·류희찬 (2007). 수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할. *학교수학*, 9(4), 467-486.
- 신경희·김연지 (2011). 절댓값 기호를 포함한 일차함수와 그래프의 개념발달에 관한 수학적 모델링 사례연구. *수학교육*, 50(2), 165-184.
- 신은주·이종희 (2004a). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구. *학교수학*, 6(2), 153-179.
- 신은주·이종희 (2004b). *중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구*. *수학교육연구*, 14(4), 403-419.
- 신은주 (2005). *모델링 활동 사례분석 연구: 중학교 수학을 중심으로*. 이화여자대학교 박사학위논문.
- 신현성 (2001). 수학적 모델링을 통한 교육과정의 구성원리. *한국학교수학회논문집*, 4(2), 27-32.

- 이기열 · 이병수 (1999). 수학적 모델링을 통한 학습지도. 한국수학교육학회, 9, 187-201.
- 조원주 (2002). 중학교 함수영역에서 수학적 모델링을 활용한 수행과제와 구체적 평가기준안 개발. 이화여자대학교 석사학위논문.
- 황혜정 (2007). 수학적 모델링의 이해-국내 연구 결과 분석을 중심으로-. 학교수학, 9(1), 65-97.
- Bell, M. (1993). Modeling and the uses of mathematics in the K-6 curriculum. Paper presented at the K-12 Modeling and Simulation Conference in Boston, MA.
- Dossey, J. A., McCrone, S., Giordano, F. R., & Weir, M. D. (2002). Mathematics methods and modeling for today's mathematics classroom; A contemporary approach to teaching grades 7-12. Pacific Grove, CA:Books/Cole.
- English, L. D. (2006). Mathematical modelling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. Educational Studies in Mathematics, 63(3), 303-323.
- English, L. D. (2009). Promoting interdisciplinary through mathematical modeling. ZDM Mathematical Education, 41(1-2), 161-181.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In F. Lester & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., Lester Jr., F. K., & Hjalmarson, M. (2003). A models and modeling perspective on metacognitive functioning in everyday situations where problem solvers develop mathematical constructs. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 383-404). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Merriam, S. B. (1997). 질적 사례연구법(허미화 역). 서울: 양서원.
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston. VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

A Case Study on a Model Refinement in Mathematical Modeling Process

Sle Hee Park⁶⁾ · Jaehong Shin⁷⁾ · Soo Jin Lee⁸⁾

Abstract

The present qualitative case study explored the ways in which three middle school students constructed and refined their mathematical models and modeling processes, and factors that had influenced such refinement. The results suggest that students' modeling processes are non-sequential in that the participant students reformulated their initial problem from the real-world problem situation and revised the model when they could not get a satisfactory solution or the acquired solution did not make sense. Moreover, the students' model refinement processes were affected by the following four elements: the types of real-world problem situations, students' metacognitive thinking, communications between teachers and peers, and the role of teachers.

Key Words: Modelling, Model refinement

Received November 4, 2014

Revised December 23, 2014

Accepted December 25, 2014

6) KwangjuDongmyoung Middle School(sechs-jj@hanmail.net)

7) Korea National University of Education(jhshin@knue.ac.kr)

8) Korea National University of Education(sjlee@knue.ac.kr), corresponding author