

# 램버트 W 함수를 이용한 시간지연 순수 특이 섭동 시스템 안정화 제어기 설계

## Stabilizing Controller Design for Time-Delay Pure Singularly Perturbed Systems via Lambert W Function

김범수 · 안수환†

Beom-Soo Kim, Soo-Whan Ahn†

(접수일 : 2013년 12월 16일, 수정일 : 2013년 12월 30일, 채택확정 : 2013년 12월 30일)

**Abstract:** In this study, Design methods of stabilizing controller for time-delay pure singularly perturbed systems are proposed. Based on the Chang transformation and Lambert W function, we decompose the time-delayed pure singularly perturbed systems into completely decoupled subsystems and derive sufficient stability conditions for 2x2 time-delayed pure singularly perturbed systems. An illustrated example is presented to demonstrate the validity and applicability of the proposed methods.

**Key Words :** Singularly Perturbed System, Time Delay, Lambert W Function, Stability

### 1. 서 론

시간이 느린 모드(slow mode)와 빠른 모드(fast mode)가 동시에 존재하는 특이 섭동 시스템은 수학적, 과학적, 공학적 관점에서 주요 관심 대상이다. 기계적 요소와 전기적 요소가 결합된 시스템이나 매우 작은 시상수로 인한 와류(parasitic) 파라미터 등에 의해 차수가 증가된 시스템은 느린 응답과 빠른 응답이 동시에 존재하는 다중 시간 척도(multi time scale) 동적 특성을 갖는다. 특이 섭동 시스템은 조건수(condition number)가 매우 큰 불량 조건(ill conditioned)을 가져서 시스템 해석을 어렵게 한다. 따라서 이 문제를 회피하기 위해서

Chang 변환이나, 전체 시스템을 느린 부 시스템(slow subsystem)과 빠른(fast) 부 시스템으로 분리한 후 시스템 해석과 제어를 설계하는 연구들이 진행되고 있다<sup>1,2)</sup>.

물리, 공학, 생물학 등 많은 분야가 시간 지연을 갖는 시스템으로 표현 된다<sup>3,4)</sup>. 시간 지연이 지연 미분 방정식(DDE, Delay Differential Equation)으로 모델링 될 때 초월 특성(transcendental characteristics)에 의해 DDE는 무수히 많은 고유치를 가질 뿐만 아니라 시간 지연이 안정도에 매우 복잡하게 작용하여 시스템 해석을 어렵게 한다<sup>5)</sup>. 일반적인 미분 방정식(ODE)의 해와 유사한 형태를 갖고 해석적으로 표현할 수 있는 램버트(Lambert) W 함수를

† 안수환(교신저자) : 경상대학교 기계시스템공학과, 해양 산업연구소

E-mail : ahn9294@gnu.ac.kr, Tel : 055-772-9105

김범수 : 경상대학교 기계시스템공학과

† Soo-Whan Ahn(corresponding author) : Department of Mechanical System Engineering, Gyeongsang National University. The Institute of Marine Industry.

E-mail : ahn9294@gnu.ac.kr, Tel : 055-772-9105

Beom-Soo Kim : Department of Mechanical System Engineering, Gyeongsang National University.

이용해서 DDE의 해를 해석적으로 구하는 방법 등이 연구되어 왔다<sup>3)</sup>. DDE가 스칼라 시스템일 때는 안정도 판별에 영향을 주는 최우측 극점(rightmost pole)을 해석적으로 구할 수 있으나, 벡터-행렬 시간 지연 미분 방정식에서는 최우측 극점을 해석적으로 구하는 것이 매우 어렵고, 시행착오를 반복적으로 실행해야 하는 어려움이 있다<sup>5)</sup>.

시간 지연을 갖는 특이섭동 시스템의 안정도 문제는 빠른 부 시스템과 느린 부시스템으로 분리하여 접근하는 방법과 Lyapunov-Krasovskii 범함수를 이용하는 기법 등이 연구되어 왔다. Pan 등<sup>6)</sup>은 다중 시간 지연을 갖는 동차 특이 섭동시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리한 후 각 시스템에서의 안정도 문제를 다루었으며, Shao 등<sup>7)</sup> 시간 지연을 갖는 동차 특이 섭동시스템을 Lyapunov 방법을 이용해서 안정도 문제를 다루었다. Kim<sup>2)</sup>은 합성제어 기법으로 시스템을 분리한 후  $H_\infty$  norms를 이용하여 안정화 영역을 구한 후 제어입력을 구하고 Lambert W 함수를 이용해서 시스템을 해석하는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 시간 지연이 있는 순수 특이 섭동 시스템을 Chang 변환<sup>8)</sup>을 이용하여 저차의 부 시스템들로 분리한 후 각 부 시스템의 해를 Lambert W 함수를 이용해서 구한 후 이를 역변환하여 원래 시스템에서의 해를 구한다. 또한 시간 지연이 있는 2x2 순수 특이 섭동 시스템에서 불량 조건을 회피하고 안정도 영역을 해석적으로 구하기 위해 Chang 변환을 이용하여 스칼라 시스템으로 변환한 후 Lambert W 함수를 사용하여 각 부 시스템을 안정화 시키는 조건을 제시함으로써 제한 이득의 범위를 구할 수 있고 이를 이용하여 전체 시스템을 안정화시킬 수 있음을 보인다.

## 2. 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템

### 2.1 Chang 변환을 이용한 시스템 분리

순수 시간 지연만을 갖는 특이 섭동 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \epsilon \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t-d) \\ \mathbf{x}_2(t-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{g}(t), & t \in [-d, 0), \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0, & t = 0. \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{x}_1(t) \in R^{n_1}, \mathbf{x}_2(t) \in R^{n_2}$ 는 각각 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템을 나타내고,  $\mathbf{u}(t) \in R^m$ 은 제어 입력이며,  $0 < \epsilon \ll 1$  이고,  $d > 0$ 는 시간 지연 상수이다.  $\mathbf{g}(t)$ 는 초기함수(preshape function)이고,  $\mathbf{x}_0$ 는 초기치이다.

식(1)로 주어진 특이 섭동 시스템은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{x}(t-d) + \mathbf{B}_\epsilon \mathbf{u}(t), \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_\epsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \frac{1}{\epsilon} \mathbf{A}_{21} & \frac{1}{\epsilon} \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\epsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \frac{1}{\epsilon} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}.$$

작은 파라미터  $\epsilon$ 이 포함된 시스템 행렬  $\mathbf{A}_\epsilon$ 는 불량조건으로서 시스템 해석을 어렵게 하고 있다. 따라서 이 불량조건 문제를 회피하기 위해서 식 (1)에서  $\epsilon = 0$ 으로 가정하여 상대적으로 느린 부 시스템을 대수 행렬 방정식 형태로 다루어 전체 시스템을 빠른 부 시스템과 느린 부 시스템으로 분리한 후 각각의 부 시스템에서 구한 제어 입력들을 이용해서 전체 시스템의 근사화된 제어 입력을 구하는 합성제어 기법을 사용할 수 있다<sup>1,2)</sup>. 식 (3)과 같은 시간 지연을 갖는 일반적인 특이 섭동 시스템에서 합성제어 기법이 광범위 하게 사용되고 있지만 Chang 변환으로 시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 완전 분리하는 것이 매우 어렵다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{x}(t-d) + \mathbf{B}_\epsilon \mathbf{u}(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \frac{1}{\epsilon} \mathbf{C}_{21} & \frac{1}{\epsilon} \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}.$$

여기서는 Chang 변환을 이용하여 식(1)로 주어진 시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 완전 분리하여 안정화 할 수 있는 제어기 설계 방법을 제시한다.

특이 섭동 시스템 (1)에서 작은 상수  $\epsilon$ 는 시스템 해석 등에 있어서 수치적으로 문제를 발생시킨다. 이러한 문제점을 해결하기 방법 중 Chang 변환 행렬 (4)를 이용하여 특이 섭동 시스템 (1)를  $\epsilon$ 와 결합된 저차화된 상태 방정식과 결합되지 않은 저차화된 상태 방정식으로 완전 분리한다.

$$T = \begin{bmatrix} I - \epsilon HL & -\epsilon H \\ L & I \end{bmatrix}. \quad (4)$$

행렬  $L, H$ 는 각각 다음과 같이 식(2)의 특이 섭동 시스템 행렬  $A_{\epsilon j}$ ,  $j=1,2$ 로 이루어진 비대칭 Riccati 방정식의 해이다.

$$A_{\epsilon 21} - A_{\epsilon 22}L + \epsilon LA_{\epsilon 11} - \epsilon LA_{\epsilon 12}L = 0 \quad (5)$$

$$A_{\epsilon 12} - \epsilon(A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L)H - H(A_{\epsilon 22} + \epsilon LA_{\epsilon 12}) = 0. \quad (6)$$

식(5)와 (6)에서  $L$  과  $H$  를 구하기 위해서는 오차가 주어진 범위 내에 들때까지 반복적으로 계산해야 한다. Chang 변환의 역행렬은 완전 분리된 시스템을 원래의 시스템으로 변환하기 위해 사용되는 것으로 다음과 같이 해석적으로 주어진다.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & \epsilon H \\ -L & I - \epsilon LH \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Chang 변환을 통한 새로운 상태 좌표계를 다음과 같이 표시하자.

$$\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

시스템 (2)를 Chang 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{\eta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L & 0 \\ 0 & \epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t-d) \\ \eta_2(t-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - \epsilon HL B_1 - HB_2 \\ \epsilon LB_1 + B_2 \end{bmatrix} u(t). \quad (9)$$

따라서 식(2)는 식(9)와 같이 변환되어, 저차화된 느린 시스템 (10)과 저차화된 빠른 시스템 (11)로 완전 분리된다.

$$\dot{\eta}_1(t) = (A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L)\eta_1(t-d) + (B_1 - \epsilon HL B_1 - HB_2)u(t). \quad (10)$$

$$\epsilon \dot{\eta}_2(t) = (\epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22})\eta_2(t-d) + (\epsilon LB_1 + B_2)u(t). \quad (11)$$

시간지연이 있는 제어 입력 식(12)를 시스템 (2)에 인가하면 식(13)과 같이 표현되고

$$u(t) = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} x_1(t-d) \\ x_2(t-d) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\dot{x}(t) = A_c x(t-d), \quad (13)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ \frac{1}{\epsilon} A_{21} + \frac{1}{\epsilon} B_2 K_1 & \frac{1}{\epsilon} A_{22} + \frac{1}{\epsilon} B_2 K_2 \end{bmatrix},$$

이 시스템을 Chang 변환하면 다음과 같이 두개의 저차화된 느린 시스템과 빠른 시스템으로 완전 분리된다.

$$\dot{\eta}_1(t) = (A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L)\eta_1(t-d), \quad (14)$$

$$\epsilon \dot{\eta}_2(t) = (\epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22})\eta_2(t-d). \quad (15)$$

## 2.2 Lambert W 함수를 이용한 시스템 해석

Lambert W 함수  $W(z)$ 는  $ye^y = z, z \in C$ 의 역함수로 정의되며 초월함수 특성에 의해 다음과 같이 무수히 많은 가지(branch)를 갖는다<sup>9)</sup>.

$$W_k(z) \in \{y \in C | z = ye^y\}, k \in Z \quad (16)$$

여기서  $k=0$  인  $W_0(z)$ 를 주가지(principal branch) 라 하고, 주가지는 스칼라 지연 미분 방정식에서 해의 안정성을 판단하는 주요 지표가 된다.

$Y_i$  등<sup>4)</sup>에 따르면 식(14)과 (15)와 같은 벡터-행렬 시간 지연 미분 방정식의 해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_1 k} C_{1k}^T, \quad (17)$$

$$\eta_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_2 k} C_{2k}^T. \quad (18)$$

여기서,  $S_{1k} = \frac{1}{d} W_k(dA_s Q_{1k})$ ,  $A_s = A_{c11} - A_{c12}L$  이고  $S_{2k} = \frac{1}{d} W_k(dA_f Q_{2k})$ ,  $A_f = \epsilon LA_{c12} + A_{c22}$  이며 미지 행렬  $Q_{1k}, Q_{2k}$  는 각각 다음과 같이 구한다.

$$W_k(dA_s Q_{1k}) e^{W_k(dA_s Q_{1k})} = A_s d, \quad (19)$$

$$W_k(dA_f Q_{2k}) e^{W_k(dA_f Q_{2k})} = A_f d.$$

식(19)는 시간 지연 상수 행렬  $A_s$  또는  $A_f$  만을 갖고 있어서  $Q_{*k}, * = 1, 2$ 를 구하는 것이 일반적인 시간지연시스템<sup>3)</sup> 보다 수월하다. 그리고  $C_{*k}^T$  는 초기 함수와 초기값에 의해서 계산된다.

식(17)과 (18)에서 볼 수 있듯이 시스템을 안정화 시키는 궤환이득 행렬은  $S_{*k}$ 의 고유값에 의해 결정된다. 지금까지 증명은 보고되지 않았지만 다음 추측이 잘 맞아 떨어지고 있다<sup>5)</sup>.

$$\max\{Re(\lambda(S_{*0}))\} \geq \max\{Re(\lambda(S_{*k}))\} \quad (20)$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

따라서 원하는 고유값을 갖는  $S_{*0desired}$  에 대해서

$$error_1 = S_{10desired} - \frac{1}{d} W_0(dA_s Q_{10}), \quad (21)$$

$$error_2 = S_{20desired} - \frac{1}{d} W_0(dA_f Q_{20}),$$

을 반복적으로 계산하여 오차를 최소화시키는 궤환 이득 행렬을 구한다. 그리고 원래 시스템 (2)의 해는 식(8)에서 Chang 역변환으로 구한다.

### 3. 2x2 시간지연 특이 섭동 시스템

이 절에서는 시간 지연을 갖는 2x2 순수 특이 섭동 시스템에서의 극 배치 문제를 Lambert W 함수를 이용해서 구하는 방법을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \epsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-d) \\ x_2(t-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (22)$$

제어 입력을  $u(t) = k_1 x_1(t-d) + k_2 x_2(t-d)$  라 하고 식(22)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \epsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-d) \\ x_2(t-d) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_1 k_1 & a_{12} + b_1 k_2 \\ a_{21} + b_2 k_1 & a_{22} + b_2 k_2 \end{bmatrix}$$

과 같이 전개 된다. 시스템 (23)을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 완전 분리하기 위해서 Chang 변환 행렬  $T$  를 다음과 같이 정의한다.

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon HL & -\epsilon H \\ L & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon H \\ -L & 1 - \epsilon HL \end{bmatrix}$$

여기서  $L, H$  는 스칼라이다. 식(22)가 2x2 시스템이므로  $T$ 는 다음과 같이 해석적으로 쉽게 구할 수 있다.  $T$ 는 식(24) 에서와 같이 역행렬이 존재하므로 시스템 행렬을 닮음 변환하여 아래와 같이

대각 행렬로 변환시킨다.

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} \quad (25)$$

변환된 행렬에서 비 대각 요소는 0 이므로 식 (25)의 좌변을 정리하면 (1,2) 번째 요소는

$$b_{12}L^2 + (b_{22} - b_{11})L - b_{21} = 0, \quad (26)$$

이 된다. 따라서

$$L = \frac{b_{11} - b_{12} \sqrt{(b_{22} - b_{11})^2 + 4b_{12}b_{21}}}{2b_{12}}, \quad (27)$$

로 구해지고 (2,1) 번째 요소도 0 이므로

$$H = \frac{1}{\epsilon} \frac{b_{12}}{-b_{11} + 2b_{12}L + b_{22}} \quad (28)$$

로 구해진다. 시스템 (23)을 Chang 변환하여 다음과 같이 완전 분리된 부 시스템들을 구한다.

$$\dot{\eta}_1(t) = (b_{11} - b_{12}L)\eta_1(t-d), \quad (29)$$

$$\epsilon \dot{\eta}_2(t) = (\epsilon L b_{12} + b_{22})\eta_2(t-d). \quad (30)$$

식(29)에서 해를  $\eta_1(t) = e^{s_1 t} c_1^T$  라 놓고 대입해서 정리하면

$$s_1 = (b_{11} - b_{12}L)e^{-s_1 d}, \quad (31)$$

로 되고, 여기서 양변에  $de^{s_1 d}$ 를 곱하고 전개하면

$$ds_1 e^{s_1 d} = d(b_{11} - b_{12}L)e^{-s_1 d} e^{s_1 d} = db_{11} - db_{12}L \quad (32)$$

이 된다. 식(32)를 Lambert W 함수로 표현하면

$$s_1 = \frac{1}{d} W(db_{11} - db_{12}L), \quad (33)$$

와 같이 된다.  $s_1$ 은 식(34)를 통해서 구한다.

$$W(db_{11} - db_{12}L)e^{W(db_{11} - db_{12}L)} = db_{11} - db_{12}L. \quad (34)$$

마찬가지로 식(30)에서 해를  $\eta_2(t) = e^{s_2 t} c_2^T$  라 놓고 대입해서 정리하면

$$\epsilon s_2 = (\epsilon L b_{12} + b_{22})e^{-s_2 d}, \quad (35)$$

로 되고, 양변에  $de^{s_2 d}$ 를 곱하고 전개하면 식(36)과 같다. 이를 정리하면 식(37)이 되고  $s_2$ 는 식(38)의 Lambert W 함수를 이용해서 구한다.

$$ds_2 e^{s_2 d} = d(Lb_{12} + \frac{1}{\epsilon} b_{22}), \quad (36)$$

$$s_2 = \frac{1}{d} W(dLb_{12} + \frac{1}{\epsilon} db_{22}), \quad (37)$$

$$W(d(Lb_{12} + \frac{1}{\epsilon} b_{22}))e^{W(d(Lb_{12} + \frac{1}{\epsilon} b_{22}))} = d(Lb_{12} + \frac{1}{\epsilon} b_{22}). \quad (38)$$

식(16)에서 명시된 바와 같이 식(34), (38)은 식 (39)와 같이 무수히 많은 가지를 갖는다.

$$s_{1k} = \frac{1}{d} W_k(db_{11} - db_{12}L), \quad (39)$$

$$s_{2k} = \frac{1}{d} W_k(dLb_{12} + \frac{1}{\epsilon} db_{22}), k \in Z$$

시간지연을 갖는 스칼라 미분 방정식에서 최우측 극점은 주가지( $k=0$ ) 이므로<sup>10)</sup>, 느린 부 시스템 (29)에서 시스템을 안정화 시키는 이득  $k_1, k_2$ 를 다음과 같이 구할 수 있다. 식(27)로 표현된  $L$ 을 식(29)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$b_{11} - b_{12}L = a_{11} + b_1k_1 - (a_{12} + b_1k_2) \frac{a_{11} + b_1k_1 - a_{22} - b_2k_2 \pm \sqrt{s_a}}{2b_2k_1} \quad (40)$$

$$s_a = (a_{22} + b_2k_2 - a_{11} - b_1k_1)^2 + 4(a_{12} + b_1k_2)(a_{21} + b_2k_1) \quad (41)$$

**보조정리 1.** 느린 부 시스템을 안정화 시키는 이득  $k_1, k_2$ 의 영역은 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (1)  $(a_{22} + b_2k_2 - a_{11} - b_1k_1)^2 + 4(a_{12} + b_1k_2)(a_{21} + b_2k_1) \geq 0$
- (2)  $-\frac{1}{d} \leq b_{11} - b_{12}L < 0.$

(증명) 조건 (1)은 스칼라 시스템의 주가지 극점중 최좌측 값은 -1 인 실수를 만족하기 위해서  $s_a \geq 0$  이다. 조건(2)는 부록과 같이 최우측 극점은

$$W_0(z = \alpha + j\beta) = \begin{cases} -\beta \cot\beta + j\beta, & \beta \in (0, \pi) \\ \alpha, & \alpha \geq -1 \end{cases}$$

으로 구해지는데  $z \in R$  이 되기 위해서는  $\beta = 0$  이어야 하고,  $W_0(\alpha + j\beta) = \alpha$  성립하기 위해서는 식 (33)에서  $d(b_{11} - b_{12}L) \geq -1$  이다. 시스템이 안정하기 위해서는 주가지의 극점이 복소평면의 좌방면에 위치해야 하므로  $\frac{1}{d} \text{Re}\{W_0(db_{11} - db_{12}L)\} < 0$  이므로  $b_{11} - b_{12}L < 0$  와  $db_{11} - db_{12}L \geq -1$  가 성립해야 한다. ■

**보조정리 2.** 빠른 부 시스템을 안정화 시키는 이득  $k_1, k_2$ 의 영역은 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (1)  $(a_{22} + b_2k_2 - a_{11} - b_1k_1)^2 + 4(a_{12} + b_1k_2)(a_{21} + b_2k_1) \geq 0$
- (2)  $-\frac{1}{d} \leq b_{12}L + \frac{1}{\epsilon}b_{22} < 0.$

(증명) 보조정리 1 증명 과정과 유사함. ■

보조정리 1, 2 로 구해진  $k_1, k_2$ 는 부 시스템 (29), (30)을 안정화 시킨다. 그리고 원래의 시스템의 해

는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

### 4. 수치 예

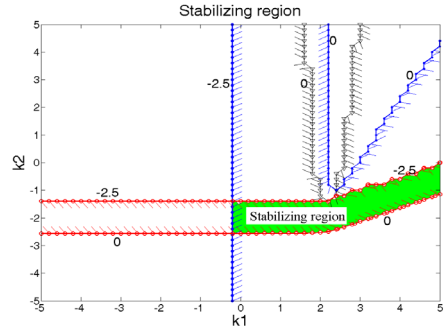


Fig. 1 Stabilizing region

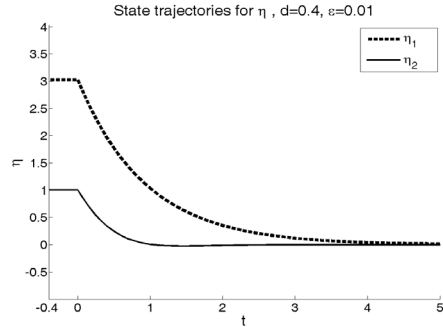


Fig. 2 State trajectories for  $\eta(t)$

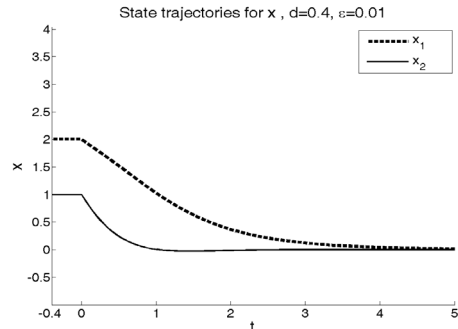


Fig. 3 State trajectories for  $x(t)$

다음과 같은 시간 지연을 갖는 2x2 순수 특이 섭동 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \epsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 & 1.3 \\ 3.2 & -5.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-0.4) \\ x_2(t-0.4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$$

초기함수  $g(t) = [1 \ 2]^T, t \in [-0.4, 0], \epsilon = 0.01$  이다. 이 시스템의 고유값은 -2.219, -0.0318 이다. He 등<sup>10)</sup>에 따르면 고유값이 -1 보다 작더라도 안정성을 담보할 수 없다.

보조정리 1, 2 를 이용해서 Chang 변환된 시스템을 안정화 시키는 상태 궤환 이득  $k_1, k_2$ 의 영역을 Fig. 1에 나타내었다. Fig. 1에서 검은색 세모로 표시된 영역(빗금친 영역)은 보조 정리 1의 조건 (1), 파란색 까만 점으로 표시된 영역은 조건 (2)이고, 빨간색 동그라미로 표시된 영역은 보조 정리 2의 조건 (2)이다. 이 세부분이 겹치는 영역에 속한  $k_1, k_2$ 가 시스템을 안정화시킨다.

$k_1 = 1.5, k_2 = -2$  로 선정했을때 식(13)에 있는  $A_c$ 의 고유값은 -0.698, -0.013 이고, 식(29), (30)의 고유값은 각각 -0.2792, -0.4408 로서 주가지의 최좌측극값인 -1 보다 크고 0 보다 작아서 복소평면의 좌방면에 위치한다.

식(29), (30)으로 주어진 부 시스템의 궤적을 Fig. 2에 나타냈으며, Fig. 3은 Chang 역변환한 원래 시스템 (22)의 궤적으로서 시스템이 안정함을 볼 수 있다. 안정화 영역밖에 있는 이득으로 모의 실험한 결과 시스템은 발산하였다. Fig. 2 에서 초기함수 값은 Chang 변환  $Tg(t)$ 가 반영된 것이다.

## 5. 결 론

시간 지연을 갖는 순수 특이 섭동 시스템을 Chang 변환하여 저차의 부 시스템들로 완전 분리한 후 각 부 시스템의 해를 Lambert W 함수를 이용해서 구한 후 이를 역변환하여 원래 시스템에서의 해를 구하는 방법을 제시하였다.

2x2 행렬 시간 지연 특이 섭동 시스템을 Chang 변환을 통하여 불량 조건 문제를 회피하였

고, 부 시스템이 스칼라이므로 시스템을 안정화시키는 이득 행렬의 영역을 해석적으로 구할 수 있는 충분 조건을 제시했으며, Chang 변환 행렬을 비선형 Riccati 방정식을 통하지 않고 구해진 이득 행렬과 닮은 변환을 이용해서 해석적으로 쉽게 구할 수 있음을 보였다.

## References

1. P. Kokotovic, H. K. Khali and J. O'Reilly, 1987, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design", Society for Industrial and Applied Mathematics.
2. B. S. Kim, 2013, "Stabilizing Controller Design for Time-delay Singularly Perturbed Systems by  $H_\infty$  Norm and Lambert W function", Trans. KIEE, (in Korean), Vol. 62, No. 8, pp. 1144-1150.
3. J. Richard, 2003, "Time-delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems", Automatica, Vol. 39, No. 10, pp. 1667-1694.
4. K. Lee and S. Y. Chung, 2009, "Real-Time Haptic Rendering for Tele-operation with Varying Communication Time Delay", Journal of the Korea Society For Power System Engineering, (in Korean), Vol. 13, No. 2, pp. 71-82.
5. S. Yi, P. W. Nelson and A. G. Ulsoy, 2010, "Time-delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W function", World Scientific Pub. Co.
6. S.T. Pan, C.F. Chen and J.G. Hsieh, 2004, "Stability Analysis for a Class of Singularly Perturbed Systems With Multiple Time Delays", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 126, pp. 462-466.
7. Z. Shao and J. Rowland, 1995, "Stability of Time-delay Singularly Perturbed Systems", IEE Proc. Control Theory and Applications, pp.

111-113.

8. K. W. Chang, 1972, "Singular Perturbations of a General Boundary Value Problem", SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 3, No. 3, pp. 520-526.
9. R. M. Corless et al, 1996, "On the Lambert W function", Advances in Computational Mathematics, Vol. 5, No. 1, pp. 329-359.
10. S. A. He and I. Fong, 2011, "Stability and Performance of First-order Linear Time-delay Feedback Systems: an Eigenvalue Approach", Journal of Control Science and Eng., Vol. 27, Hindawi Pub. Corp.

## 부 록

$ye^y = z, z \in C$ , Lambert W 함수  $y = W(z)$  에서  $z = a + jb, W(z) = \alpha + j\beta, a, b, \alpha, \beta \in R$  로 하면

$$\begin{aligned} W(z)e^{W(z)} &= (\alpha + j\beta)e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha (\alpha + j\beta)(\cos\beta + j\sin\beta) \\ &= e^\alpha (\alpha \cos\beta - \beta \sin\beta) + je^\alpha (\alpha \sin\beta + \beta \cos\beta) \\ &= a + jb. \end{aligned}$$

여기서  $z \in R$  이 되기 위한 조건은

$$(1) \beta = 0,$$

또는

$$(2) \alpha \sin\beta + \beta \cos\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \cot\beta$$

이다. 스칼라 Lambert W 함수의 주가지는  $Re\{W_0(z)\} \geq -1$  이고  $\max_{k \in Z} Re\{W_k(z)\} = Re\{W_0(z)\}$ ,  $k \in Z$  이므로

$$W_0(z) = \begin{cases} -\beta \cot\beta + j\beta, & \beta \in (0, \pi), \\ \alpha, & \alpha \geq -1, \end{cases}$$

이면  $z \in R$  이다<sup>10)</sup>.