

초기응력을 받는 직사각형판의 고유진동수 산정식 개발

Equation for Estimating Natural Frequencies of Initially Stressed Rectangular Plates

박 승 진^{1)*}

Sung-Jin Park

Abstract

A simplified method for the calculation of buckling and vibrational characteristics of initially stressed rectangular plate and antisymmetric angle-ply laminated plates is presented in this paper using the natural frequencies under unloading state. The equation of motion of rectangular plate with two opposite edges simply supported is investigated on the basis of Rayleigh-Ritz method and Mindlin plate theory with effect of the curvature term. The relationships of the non-dimensional natural frequencies with initial stresses the coefficients of critical buckling and the boundaries of the dynamic principal instability region can be characterized by the non-dimensional natural frequencies under unloading state. Numerical examples are presented to verify the simplified equations and to illustrate potential applications of the analysis.

Keywords : Initially stressed rectangular plate, Free vibration, Buckling, Mindlin's plate theory

1. 서론

구조물 또는 구조요소의 강성이나 고유진동수는 초기응력에 큰 영향을 받는다는 것은 잘 알려져 있다. 예를 들면 정적인 축방향 압축하중을 받는 직선보의 휨 고유진동수는 하중의 증가와 함께 감소하고, 작용하중과 좌굴하중이 같을 때 영이 된다. 또한 주기적인 하중이 작용할 경우에는 하중의 진폭이 정적 좌굴치보다 낮아도 하중의 주기와 휨 고유진동수와의 특별한 관계가 성립되면 심한 휨진동이 발생하여 계수 면진동 또는 동적불안정 현상이 발생하게 된다.

최근 항공기, 우주구조물, 자동차, 선박 및 토목, 건축 구조물 등 많은 공학 분야에서 구조물의 경량화를 요구하고 있고, 구조물에 대한 하중조건도 점차 복잡해지고 있기 때문에 구조물의 안정성에 미치는 영향을 검토하기 위해 초기응력이 작용하는 구조요소의 고유 진동특성에 미치는 변화는 동역학적 특성의 규명에 반드시 필요하다고 생각된다. 따라서 본 연구와 관련된 초기응력이 작용하는 직사각형판에 대해

서 비교적 많은 연구가 이루어지고 있다. 초기응력이 작용하는 좌굴응력이나 고유진동수의 산정식은 고유치 문제로 단정 지을 수 있기 때문에 2변 단순지지된 등방성질의 직사각형판에 대해서도 진동과 좌굴의 고유치의 상호관계가 Iguchi (1938), Lurie (1951)에 의해 검토되고 있고, 더욱이 Lurie (1952)은 단순지지변에 직각인 방향으로 일정한 정적압축하중을 받는 경우에 대해 다음 식을 제시하고 있다.

$$(\omega_m^* / \omega_m)^2 = 1 - N_x / N_{xc}(m) \quad (1)$$

식 (1)은 전단변형·회전관성의 영향이 고려되지 않은 판이론(고전판이론)을 이용하여 유도된 것이기 때문에, ω_m^* 와 ω_m 은 압축하중 N_x 이 작용하는 경우 및 작용하지 않는 경우의 m 차 모드에 대한 고유원진동수이고, $N_{xc}(m)$ 은 m 차 모드의 좌굴하중이다. 식 (1)은 좌굴과 진동모드가 같게 되면 고유 원진동수 (2승)와 압축하중이 선형관계가 된다는 것. 즉 진동특성을 이해한다는 조건하에서 중요한 자료를 제시

1) 정회원, 인천대학교 도시환경공학부 교수, 교신저자

* Corresponding author : sjpark@incheon.ac.kr

• 본 논문에 대한 토의를 2014년 2월 28일까지 학회로 보내주시면 2014년 3월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

하고 있지만, 설계 등의 필요로 하는 기본 고유진동수의 산정에는 진동모드의 파수와 좌굴모드를 규정하는 파수가 양의 형태로 되지 않아 해석하는데 문제가 발생할 수 있다. 더욱이 식 (1)과 같은 초기응력이 작용하는 판이론에 대한 기존 논문의 적용 사례는 거의 찾아 볼 수 없을 정도이다.

따라서 본 논문은 식 (1)에서 기술한 하중·경계조건의 직사각형판을 대상으로 좌굴·진동문제에서 고유치의 유사성을 이용하여, 고전판 이론 및 전단변형·회전관성의 영향이 고려된 수정판이론 Mindlin의 판이론 (1951)에 대한 식 (1)과 유사한 고유진동수 산정식을 제시하였고, 수치 검증으로서 ①초기응력이 작용하는 직사각형판 ②초기응력이 작용하는 역대칭 Angly-Ply 적층판을 이용하여 산정식을 비교 검토하였다.

산정식은 진동모드와 좌굴모드를 규정하는 파수가 양의 형태로 나타나고, 초기압축하중이 작용하지 않는 무재하시의 고유진동수 파라미터로 해석할 수 있다.

따라서 진동수 파라미터를 집적한 설계 핸드북 형태의 자료만 주어지면 고유진동수를 간단히 산정할 수 있으며, 주기적인 면내하중을 받는 판의 동적불안정 문제에 적용하여 주불안정 영역의 산정을 검토하였다.

더욱이 근사해법으로 고유진동수만 구할 수 있으면 직사각형판, 셀, 회전셀, 적층판, 적층셀 등 본 논문에서 제시되고 있는 산정식을 적용할 수 있다.

2. 고유진동수 산정식의 유도

Fig. 1에 보이는 바와 같이 $x=0, a$ 에서 단순지지 되어 있고, 두께가 일정한 직사각형판 ($a \times b$)가 단순지지되어 초기 압축하중 N_x^0 ($=h\sigma_x^0$)을 받는 경우에 대해 해석한다.

$x=0, a$ 에서 단순지지 조건을 만족하는 Levy형인 변위함수를 사용하게 되면, 산정식에 지배되는 미분방정식 및 에너

지원리를 이용하여 유도할 수 있기 때문에, 여기서는 후자인 에너지원리를 이용한 Raveleigh-Ritz법을 적용한다.

또한 Mindline 판이론을 이용하면 변형에너지 (U), 운동에너지 (T) 및 초기응력이 작용하는 에너지손실 (V)는 다음과 같다.

$$U = (D/2) \int_0^a \int_0^b [\phi_{x,x}^2 + 2\nu\phi_{x,x}\phi_{y,y} + (1-\nu)(\phi_{x,y} + \phi_{y,x})^2/2 + \kappa^2 Gh \{(w_{,x} + \phi_x)^2 + (w_{,y} + \phi_y)^2\}/2] dx dy \quad (2.a)$$

$$V = (N_x^0/2) \int_0^a \int_0^b \{w_{,x}^2 + \frac{(h^2/12)(\phi_{x,x}^2 + \phi_{y,x}^2)}{2}\} dx dy \quad (2.b)$$

$$T = (\rho h/2) \int_0^a \int_0^b \{w_{,t}^2 + \frac{(h^2/12)(\phi_{x,t}^2 + \phi_{y,t}^2)}{2}\} dx dy \quad (2.c)$$

여기서, w 는 판두께 방향 변위, ϕ_x 와 ϕ_y 는 휨에 의한 회전각, $D=[Eh^3/(12(1-\nu^2))]$ 는 휨강성, E 는 탄성계수, ν 는 포아송비, G 는 전단탄성계수, κ^2 는 전단보정계수, ρ 는 밀도를 나타내고 쉼표 (,)로 계속되는 첨자는 편미분을 의미한다.

식 (2.b)의 밑줄 부분은 Sun (1972)에 의해 Timoshe-nko보의 좌굴해석에 도입된 곡률항 (Curvature term)이며, Hinton (1992; 1998)에 의해 판의 좌굴·진동문제에 응용되고 있다.

식 (2.b) 및 식 (2.c)는 진동문제에서 회전관성과 같은 역할을 한다는 것을 알 수 있다.

변위함수는 다음 식을 이용한다.

$$\begin{aligned} w &= \sum_m a_m W_m(y) \sin(m\pi x/a) \exp(i\omega t) \\ \phi_x &= \sum_m b_m \phi_{xm}(y) \cos(m\pi x/a) \exp(i\omega t) \\ \phi_y &= \sum_m c_m \phi_{ym}(y) \sin(m\pi x/a) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, ω 는 고유원진동수, a_m, b_m, c_m 은 미정계수, $W_m, \phi_{xm}, \phi_{ym}$ 은 $y=0, b$ 에서 임의의 경계조건을 만족하는 y 방향의 변위함수, m 은 x 방향의 진동모드의 반파장 수를 나타낸다.

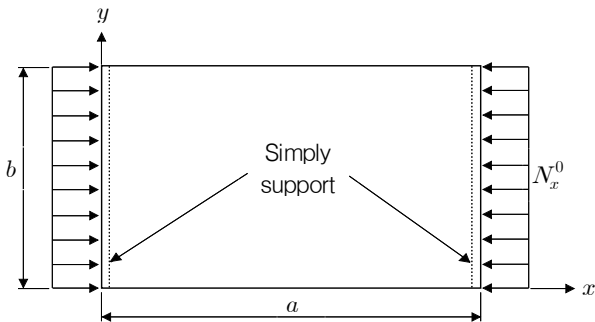


Fig. 1 Initially stressed rectangular plate

범함수 Π 는 식 (2)를 이용하여 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\Pi = U - V - T \quad (4)$$

식 (3)을 식 (4)에 대입하여 적분하면 무차원량· 무차원 파라미터 관계를 이용한 범함수는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi^* &= U^*(a_m, b_m, c_m) - kV^*(a_m, b_m, c_m) - \\ &\Omega^2 T^*(a_m, b_m, c_m) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 무차원화 고유원진동수 파라미터 (Ω^2) 및 무차원화 좌굴계수 파라미터 (k)는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$\Omega^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} \quad (6.a)$$

$$k = \frac{a^2 N_x^0}{D} \quad (6.b)$$

더욱이 곡률항을 고려하고 있기 때문에 T^* 와 V^* 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$V^* = m^2 \pi^2 T^* \quad (7)$$

범함수를 최소화 ($\partial \Pi^* / \partial a_m = \partial \Pi^* / \partial b_m = \partial \Pi^* / \partial c_m = 0$)하면 다음 매트릭스 방정식을 구할 수 있다.

$$[[K] - k[K_G] - \Omega^2[M]]\{\delta\} = \{0\} \quad (8)$$

여기서 $\{\delta\}$ 는 a_m, b_m, c_m 을 성분으로 하는 변위함수 벡터, $[K], [K_G]$ 및 $[M]$ 의 매트릭스는 각각 U^*, V^* 및 T^* 로 부터 구해지며 탄성강성, 기하학적 강성 및 질량매트릭스에 해당된다. 또한 식 (7)에서 기하학적 강성매트릭스 $[K_G]$ 및 질량매트릭스 $[M]$ 은 다음 식과 같다.

$$[K_G] = m^2 \pi^2 [M] \quad (9)$$

식 (8)은 다음과 같은 3종류의 고유치문제로 분류할 수 있다.

무재하시 진동문제 (자유진동) :

$[K_G] = 0$ 으로 두면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[[K] - \overline{\Omega}_{mn}^2 [M]]\{\delta\} = \{0\} \quad (10)$$

여기서 $\overline{\Omega}_{mn}^2$ 은 파수 m, n 에 있어서 무차원화 고유진동수를 나타내며, 재하시의 고유진동수와 구별하기 위해 윗줄 기호 ‘ $\bar{\cdot}$ ’를 붙였다.

좌굴문제 :

$[M] = 0$ 으로 두면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[[K] - k[K_G]]\{\delta\} = \{0\} \quad (11)$$

여기서 k 는 무차원화 좌굴계수이다.

재하시 진동문제 :

작용 압축하중 N_x^0 은 식 (11)에서 좌굴하중 N_{cr} 을 이용하면 λ ($0 \leq \lambda \leq 1$)의 압축력이 작용하고 있는 경우이므로, k 를 λk_{cr} 로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_x^0 = \lambda N_{cr} \quad (\lambda = 0 \sim 1) \quad (12)$$

따라서 식 (8)은 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$[[K] - \lambda k_{cr}[K_G] - \overline{\Omega}_{mn}^2 [M]]\{\delta\} = \{0\} \quad (13)$$

위와 같이 각 고유치문제에서 고유치의 상호관계는 다음과 같이 정리할 수 있다.

2.1 무재하시 고유원진동수와 좌굴계수의 관계

식 (9)를 이용하면 식 (11)은 다음과 같다.

$$[[K] - km^2 \pi^2 [M]]\{\delta\} = \{0\} \quad (14)$$

식 (10)과 식 (14)의 고유치를 같게 하면 무재하시 고유원진동수와 좌굴계수는 다음과 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$km^2 \pi^2 = \overline{\Omega}_{mn}^2 \quad (15)$$

따라서,

$$k = \frac{\bar{\Omega}_{mn}^2}{(m\pi)^2} \quad (16)$$

여기서 $\bar{\Omega}$ 의 밀접자 m, n 은 x, y 축방향이 파수 m, n 을 나타내며, 식 (16)에서 $\bar{\Omega}_{mn}^2/(m^2\pi^2)$ 은 좌굴계수 k_{cr} 에 의해 구해지는 것을 알 수 있다. 본 논문에서 제시되는 임의 파수 m 에 대해서 $n=1$ 이 최소 진동수를 나타내기 때문에, k_{cr} 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$k_{cr} = \frac{\bar{\Omega}_{m^*1}^2}{m^{*2}\pi^2} \quad (17)$$

여기서 m^* 과 $\bar{\Omega}_{m^*1}$ 는 $\text{Min}[\bar{\Omega}_{j1}^2/(j^2\pi^2)]$
 단, $j = 1, 2, \dots$ 를 만족하는 j 와 $\bar{\Omega}_{j1}$ 이다.

2.2 재하시 고유원진동수와 무재하시 고유원진동수의 관계

식 (9)와 식 (17)을 이용하면 식 (13)은 다음 식과 같다.

$$[[K] - \left\{ \lambda \left(\frac{m}{m^*} \right)^2 \bar{\Omega}_{m^*1}^2 + \Omega_{mn}^2 \right\} [M]] \{ \delta \} = \{ 0 \} \quad (18)$$

식 (18)과 식 (11)의 고유치를 같게 하면, 재하시 고유원진동수 Ω_{mn} 은 다음 식에 의해 산정할 수 있다.

$$\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \left(\frac{m}{m^*} \right)^2 \bar{\Omega}_{m^*1}^2 \quad (19)$$

위의 식을 이용하면 초기응력 $\lambda = N_x^0/N_{cr}^0$ 이 작용할 경우의 고유진동수 Ω_{mn} 은 식 (16), (17)에서 구할 수 있는 무재하시의 고유진동수 $\Omega_{m1}^2, \Omega_{mn}^2$ 로 부터 간편하게 구할 수 있다. 여기서, λ 는 0~1 사이에 변화되는 매개변수이다.

또한 식 (19)는 Mindlin판에 대해서는 곡률항을 고려할 때만 성립되지만, 고전판 이론을 적용하면 운동에너지 (T)는

$$T = \left(\frac{\rho h}{2} \right) \int \int W_{,t}^2 dx dy \quad \text{에너지손실 } (V) \text{은 } V = \left(\frac{N_x^0}{2} \right) \int \int W_{,x}^2 dx dy \text{로 나타낼 수 있기 때문에 항상 성립한다.}$$

2.3 좌굴하중 산정식과 재하시 고유원진동수 산정식의 특징

각 산정식 (식 (17), 식 (19))에서 알 수 있듯이 재하시 고유원진동수 특성은 다음과 같다.

- ① 식 (19)는 곡률항을 고려함으로써 얻어지는 재하시의 고유진동수에 관한 산정식으로써, 비재하변의 경계조건에 관계없이 성립하며, 무재하시의 고유진동수만 알고 있으면, 재하시의 임의의 파수 m, n 에 대한 고유진동수는 물론, 좌굴응력도 산정이 가능하다. 즉 진동수 자료를 집적한 설계 핸드북과 같은 자료만 있으며, 좌굴응력 및 고유진동수를 간단하게 구할 수 있다.
- ② 무재하시 고유원진동수만의 결과에 의해 좌굴하중과 재하시 고유원진동수의 산정이 가능하다.
- ③ 재하시 고유원진동수 2승 (Ω_{mn}^2)은 초기작용압축하중에 비례한다. 작용하중 변화에 대한 Ω_{mn}^2 의 변화율(변동율)은 비재하변 방향의 진동모드 파수 n 에 의존하지 않는다. 더욱이 변화율은 재하변 방향의 진동모드 파수 (m)과 좌굴모드 파수 (m^*)에 의존하고, $m > m^*$ 인 경우에 커지고 $m < m^*$ 의 경우는 작아진다.
- ④ ③에서 기본 고유원진동수의 2승 (Ω_{m1}^2)과 작용압축하중 (λ)의 관계는 1차함수 또는 구분적 1차함수로 나타낼 수 있다. 즉 좌굴모드 파수가 m^* 인 경우 $\Omega_{m1}^2 - \lambda$ 관계는 m^* 의 구분적 1차함수로 나타낼 수 있다.

3. 산정식의 동적불안정 문제 적용

Fig. 1에 보인 초기압축하중이 비주기성분과 주기성분의 합으로 주어질 경우에 대해 검토한다.

$$N_x^0 = N_{x,x} + N_{x,d} \cos \theta t = N_{cr}(\alpha + \beta \cos \theta t) \quad (20)$$

여기서 θ 는 주기성 하중의 진동수, α 와 β 는 비주기하중과 주기하중의 좌굴하중의 비 ($\alpha = N_{x,s}/N_{cr}$, $\beta = N_{x,d}/N_{cr}$)이다. 위에서 서술된 문제를 이산화하면 운동방정식은 다음 식과 같이 된다.

$$[M^*] \{ \delta_{,tt} \} + [K^*] \{ \delta \} - N_{cr}(\alpha + \beta \cos \theta t) [K_G^*] \{ \delta \} = \{ 0 \} \quad (21)$$

여기서 $[M^*], [K^*]$ 및 $[K_G^*]$ 는 각각 $[M], [K]$ 및 $[K_G]$ 와 같은 성질의 매트릭스이다.

식 (21)은 Mathieu-Hill의 방정식이다. 이 방정식의 해로서 변위벡터 $\{\delta\}$ 를 주기성 하중 주기의 2배 주기를 가진 다음 주기관계

$$\{\delta\} = \{A\} \sin(\theta t/2) + \{B\} \cos(\theta t/2) \quad (22)$$

로 나타내면 동적주불안정 영역은 이하의 경계진동수방정식에서 근사적으로 구해질 수 있다.

매트릭스 $[M], [K]$ 및 $[K_G]$ 로 무차원량·무차원파라미터를 이용하면 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} & [[K] - (\alpha - \beta/2)k_{cr}[K_G] - (\Theta^2/4)[M]]\{A\} = \{0\} \\ & [[K] - (\alpha + \beta/2)k_{cr}[K_G] - (\Theta^2/4)[M]]\{B\} = \{0\} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 Θ 는 무차원화된 주기성 하중의 진동수 파라미터이다.

$$\Theta^2 = \frac{\rho h \theta^2 a^4}{D} \quad (24)$$

식 (16), (17)을 이용하여 식 (23)을 수정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [[K] - \{(\alpha - \beta/2)(m/m_*)^2 \bar{\Omega}_{m*1}^2 + \Theta^2/4\}[M]]\{A\} = \{0\} \\ & [[K] - \{(\alpha + \beta/2)(m/m_*)^2 \bar{\Omega}_{m*1}^2 + \Theta^2/4\}[M]]\{B\} = \{0\} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 무재하시의 고유진동수 방정식과 식 (25)의 고유치를 같게하면 주불안정영역은 다음 식에 의해 산정할 수 있다.

$$\frac{\Theta^2}{4} = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \left(\frac{m}{m_*}\right)^2 \bar{\Omega}_{m*1}^2 \quad (26)$$

식 (19)와 식 (26)을 비교하면 주불안정영역의 경계는 크기 $\lambda (= N_x^0/N_{cr}) = (\alpha + \beta/2)$, $(\alpha - \beta/2)$ 의 초기하중이 작용할 때의 고유진동수를 구하면 되기 때문에, 무재하시의 고

유진동수만 알고 있으면 구할 수 있다.

4. 수치계산에

식 (17), (19) 및 식 (26)을 이용한 계산에 3가지를 『초기응력이 작용하는 직사각형판』과 『초기응력이 작용하는 역대칭 Angle-Ply 적층판 (Fig. 2)』에 대한 산정식의 결과 및 타당성을 검증한다.

초기응력이 작용하는 간편 산정식은 직사각형판 및 역대칭 Angle-Ply 적층판에서도 동일하게 적용할 수 있다.

4.1 진동특성의 산정식을 이용한 수치에

【초기응력이 작용하는 직사각형판】

수치계산에 사용된 비재하 상태의 고유진동수 $\bar{\Omega}_{m1}$, Table 1(a), Table 1(b)에는 고전판이론을 근거로 한 결과 (Sekiya, 2010), 2변 단순지지 나머지 2변이 각각 고정-고정 및 고정-단순지지에 대해서 나타내었다.

Table 1은 중횡비 b/a 를 변화시켰을 때, 식 (10)에서 구한 고유진동수 $\bar{\Omega}_{m1}^2$ (x 축 방향 파수 $m=1\sim 4$)에 있어서 1방향의 최저차수진동수)를 구한 것이다.

4.1.1 좌굴하중과 재하시 기본원진동수를 구한 기본적인 관계

다음과 같이 문제를 설정한다.

【비재하변이 고정조건의 정방형판의 좌굴하중을 구하여, 좌굴하중 50% ($\lambda=0.5$), 중횡비 ($b/a=1$)인 압축하중이 작용할 때의 기본 고유진동수를 구하시오. 더욱이 기본 고유진동수에 미치는 진동모드의 파수 m 이 $m=1$ 에서 $m=2$ 로

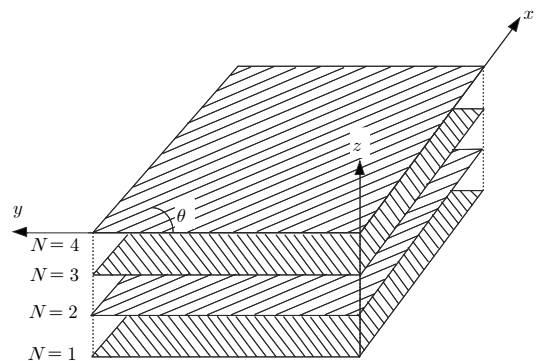


Fig. 2 Asymmetric Angle-Ply Laminated Plate

Table 1 Natural frequencies under unloading state $\bar{\Omega}_{m1}$

(a) Two opposite edges clamped—simply supported $\bar{\Omega}_{m1}$

b/a	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
0.3	254.1	272.2	306.2	359.5	434.3	531.3
0.5	95.26	115.8	156.4	219.0	303.4	408.9
1.0	28.95	54.74	102.2	170.3	258.6	366.8
2.0	13.69	42.59	91.70	160.7	249.4	358.0

(b) One opposite edges clamped—Thress opposite edges simply supported $\bar{\Omega}_{m1}$

b/a	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
0.3	178.8	202.4	244.3	306.5	389.5	493.4
0.5	69.33	94.59	140.2	206.7	293.8	401.1
1.0	23.65	51.67	100.3	169.0	257.5	365.9
2.0	12.92	42.24	91.49	160.5	249.3	357.9

Table 2 Comparison of Buckling Coefficient

m	Two opposite edges clamped—simply supported Table 1(a)	
	Equation (10)	Equation (16)
1	84.92	84.92
2	75.90	75.90
3	117.59	117.59
4	183.66	183.66

이동할 때 $\lambda (=N_x^0/N_{cr})$ 를 구하시오.]

고전판이론을 적용하면 $\bar{\Omega}_{m1}$ ($m=1\sim 4$)는 Table 1(a)에서 $\bar{\Omega}_{11}=28.95, \bar{\Omega}_{21}=54.74, \bar{\Omega}_{31}=102.2, \bar{\Omega}_{41}=170.3$ 이며, $m^*=1, 2, 3, 4$ 가 된다. Table 2는 식 (16)의 산정식을 이용하여 k_m ($m=1\sim 4$)를 구하면 $k_1=84.92, k_2=75.90, k_3=117.59,$

$k_4=183.66$ 이 되기 때문에, Table 1(a)의 결과를 식 (16)에 대입하면 Table 2와 같은 좌굴계수를 얻을 수 있다. 식 (16)에서 산정한 해와 식 (10)에 의해 구한 결과 (Mikami, 1999)는 잘 일치하고 있다.

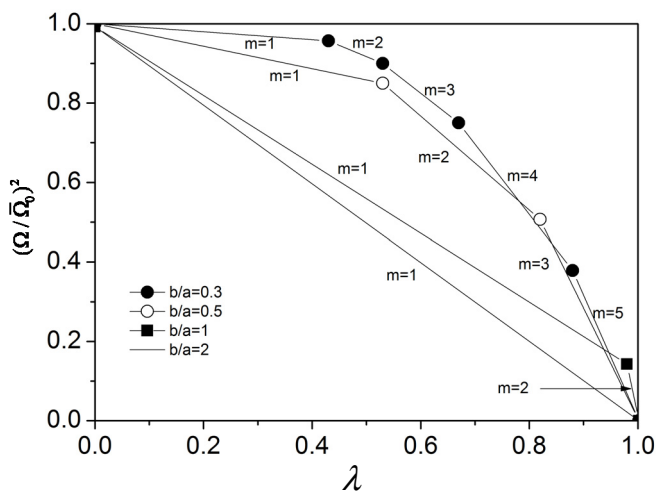
좌굴하중이 주어지는 m^* 과 $\bar{\Omega}_{m^*1}$ 은 $m^*=2, \bar{\Omega}_{m^*1}=54.74$ 이다. 따라서 $\lambda=0.5$ 에서 식 (19)에서 Ω_{m1} 을 구하면 $\Omega_{11}^2=(28.95)^2-0.5(1/2)^2(54.74)^2=463.54, \Omega_{21}^2=(54.74)^2-0.5(2/2)^2(54.74)^2=1497.69, \dots$ 가 되고, 기본고유원진동수는 $m=n=1$ 일 때 그 값은 $\Omega_{11}=21.53$ 이 된다.

기본 고유원진동수에 미치는 파수가 $m=1$ 에서 $m=2$ 로 변화할 때 λ 는 $\Omega_{11}^2 \geq \Omega_{21}^2$ 의 관계를 만족시켜야 한다. 식 (19)를 이용하면 다음 부등식 $\bar{\Omega}_{11}^2 - \bar{\Omega}_{m^*1}^2 \geq \bar{\Omega}_{21}^2 - \lambda(2/m^*)^2 \bar{\Omega}_{m^*1}^2$ 를 풀면 $\lambda \geq 0.96$ 이 된다. 또한 이 결과는 기존 Mikami (1999)의 Fig. 3(b)와 일치한다.

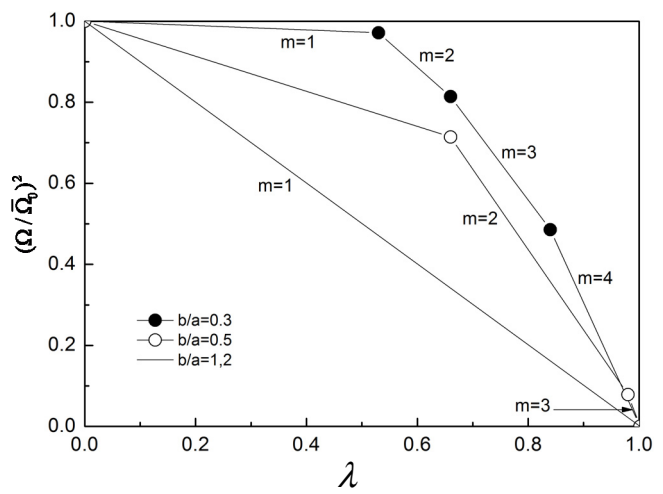
4.1.2 기본고유원진동수에 미치는 압축하중의 영향

Fig. 3(a) 및 Fig. 3(b)는 각각 비재하변의 결과가 고정-고정 및 고정-단순지지인 경우에 대해서 기본 고유원진동수와 압축하중의 관계를 중형비 $b/a=0.3, 0.5, 1, 2$ 에 대해서 살펴본 것이다.

그림의 종축은 재하시 기본고유원진동수와 무재하시 비의 2승 $(\Omega/\bar{\Omega}_0)^2$, 횡축은 $\lambda (=N_x^0/N_{cr})$ 이고, Fig에서 m 의 값은 기본 고유원진동수에 미치는 파수이다. 또한 좌굴하중에 미치는 파수 m^* 은 고정-고정인 경우에는 중형비 $b/a=0.3,$



(a) unloading state clamped—clamped



(b) unloading state clamped—simply

Fig. 3 Loading natural frequencies $((\Omega/\bar{\Omega}_0)^2$ and compression load $\lambda(=N_x^0/N_{cr})$

Table 3 Buckling coefficients calculated using natural frequencies $\bar{\Omega}_{m,1}$

a/b	N = 2				N = 6			
	m=1	m=2	m=3	m=4	m=1	m=2	m=3	m=4
1	14.62	33.62	63.30	101.32	24.74	56.17	102.53	154.90
2	33.70	58.47	91.96	134.49	56.49	98.97	154.85	224.67
3	62.59	92.06	131.56	179.61	102.76	155.32	222.67	303.16

Table 4 Buckling coefficients of equation (16)

a/b	N = 2				N = 6			
	m=1	m=2	m=3	m=4	m=1	m=2	m=3	m=4
1	21.65	28.64	43.69	65.01	62.02	79.91	118.35	172.18
2	115.06	86.61	95.19	114.54	323.37	243.09	269.96	319.64
3	96.91	214.68	194.86	204.28	1090.84	611.08	558.19	582.01

0.5, 1, 2의 순서에 대응하며 $m_*=5, 3, 2, 1$ 이 된다. 마찬가지로 고정-단순지지인 경우는 $m_*=4, 3, 1, 1$ 가 된다.

Fig에서 $(\Omega/\bar{\Omega}_0)^2 - \lambda$ 의 관계는 구분적 1차함수 또는 완전한 1차함수로 표시되고, 전자 타입은 중형비 b/a 의 값이 작은 경우라는 것을 알 수 있다.

또 $(\Omega/\bar{\Omega}_0)^2$ 의 λ 에 대한 변화율은 이미 서술한 바와 같이 $m > m_*$ 인 경우에 크고, $m < m_*$ 인 경우에 작아 진다는 것을 알 수 있다.

4.2 진동특성의 산정식을 이용한 수치예

【초기응력이 작용하는 역대칭 Angle-Ply 적층판】

초기응력을 받는 4변단순지지된 Angle-Ply 역대칭 적층판에 대한 재료 특성은 다음과 같다.

Graphite/Epoxy

$$E_1/E_2=40, G_{12}=G_{13}=0.5E, G_{23}=0.6E_2,$$

$$\nu_{12}=0.25, b/h=100, a/b=1, \theta=45^\circ$$

여기서, E_1, E_2 =재료주축 (1,2)에 대한 탄성계수, ν_{12} 는 포아송비, G_{12}, G_{13}, G_{23} 은 전단탄성계수, θ 는 배향각을 의미한다.

Table 3은 적층수 N 와 중형비 a/b 를 변화시켰을 때 식 (10)에서 구한 고유진동수 $\bar{\Omega}_{m,1}^2$ (x 축방향 파수 $m=1\sim 4$ 에 있어서 1방향 최저차수진동수)를 구한 것이다.

Table 3의 결과를 식 (16)에 대입하면 Table 4와 같은 좌굴계수를 얻을 수 있다.

여기서, 밑줄부분이 바로 $\bar{\Omega}_{m,1}$ ($N=2$ 인 경우 「21.65, 86.01, 194.86」, $N=6$ 인 경우 「62.02 248.09, 558.19」이며, m_* 는 각각 1,2,3이 된다. Table 5는 Table 4에서 구한 k 의 최소값(임계좌굴계수 k_{cr}) 및 식 (11)에서 직접 구한 좌굴계수를 비교한 것이다.

Table에서 알 수 있듯이 괄호내의 수치는 좌굴계수에 주어지는 x 축 방향의 파수 m 을 나타낸 것이다. Table 5는 식 (16)에 의해 산정한 해와 식 (11)에 의해 구한 결과는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

식 (16)은 곡률항을 고려한 경우의 좌굴계수를 산정하는 식으로서 고유진동수를 이용한 좌굴계수의 산정 또는 해의 정도 검토에 유효하게 이용될 산정식이다.

Table 6은 무재하변이 4변단순지지된 등방등질인 정사각형판 ($a/b=1$)에 좌굴계수 및 좌굴하중 10%, 25%, 50%, 75%의 초기하중이 작용할 경우에 고유진동수는 다음과 같다.

여기서, $m_*=1, \bar{\Omega}_{m,1}^2=21.65$ 이다.

Table 7에서 알 수 있듯이 최소고유진동수의 식 (19)에 의해 산정된 해와 식 (13)에서 구한 결과는 잘 일치하고 있다. 여기서 $m=1$ 이다.

Table 5 Comparison of buckling coefficient

a/b	N = 2		N = 6	
	Equation (11)	Equation (16)	Equation (11)	Equation (16)
1	21.65	21.65	62.02	62.02
	(m = 1)		(m = 1)	
2	88.61	86.61	248.09	248.09
	(m = 2)		(m = 2)	
3	194.87	194.87	558.19	558.19
	(m = 3)		(m = 3)	

Table 6 Initially stressed of natural frequencies

λ	$N = 2$				$N = 6$			
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
10%	13.87	32.33	60.73	99.62	24.31	55.40	101.59	163.86
25%	12.66	30.28	58.31	97.01	23.64	54.23	100.61	162.28
50%	10.34	26.52	54.03	92.50	22.48	52.33	97.73	152.63
75%	7.31	22.12	49.38	87.76	21.26	50.14	95.24	156.93

Table 7 Comparison of natural frequencies

λ	$N = 2$		$N = 6$	
	Equation (13)	Equation (19)	Equation (13)	Equation (19)
10%	13.87	13.87	24.31	24.31
25%	12.66	12.66	23.64	23.64
50%	10.34	10.34	22.48	22.48
75%	7.31	7.31	21.26	21.26

4.3 주불안정영역의 산정

4.3.1 초기응력이 작용하는 직사각형판

Fig. 4는 비재하변이 고정-고정인 경우 정방향판 ($b/a=1$)이며, 파수 (m, n) = (1,1), (2,1) 및 (3,1)에 대한 주불안정영역을 식 (26)을 이용하여 산정한 결과이다 (2개의 곡선에서 좁아진 부분이 불안정영역).

Fig에서 (a) 및 (b)는 각각 $\alpha (= N_{x,x}/N_{cr}) = 0$ 및 0.5의 결과이고, 세로축은 좌굴하중에서 주기하중 성분의 진폭 $\beta (= N_{x,d}/N_{cr})$ 이고, 가로축은 무재하시 기본 고유원진동수에 서 주기하중의 진동수 $\Omega/\bar{\Omega}_0$ ($\bar{\Omega}_0=28.95$)이다. 여기서 Hachi

and Nagai (2004)와의 직접적인 비교를 하지는 않았지만 충분히 양호한 결과가 얻어질 수 있다는 것을 알 수 있다.

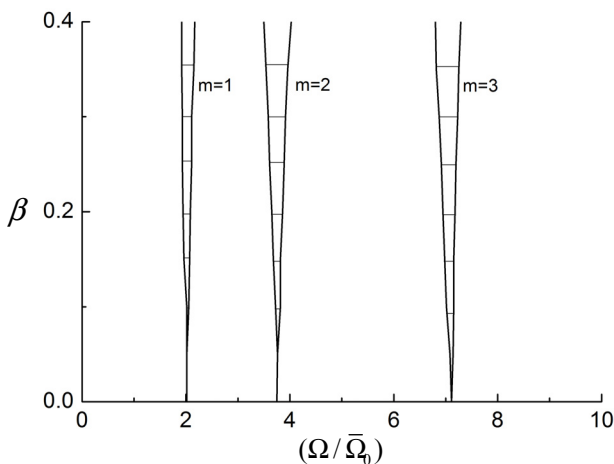
4.3.2 초기응력이 작용하는 역대칭 Angle-Ply 적층판

Table 3, Table 4를 이용하여 식 (26)과 식 (21)과의 해의 비교를 $a/b=1$, $N=2$ 에 대한 해석 결과는 Table 8과 같다. 여기서 $\alpha (= \sigma_s/\sigma_{cr}) = 0.05$ 로 일정하고, $\beta (= \sigma_d/\sigma_{cr})$ 를 변화시켜 구한 것이다.

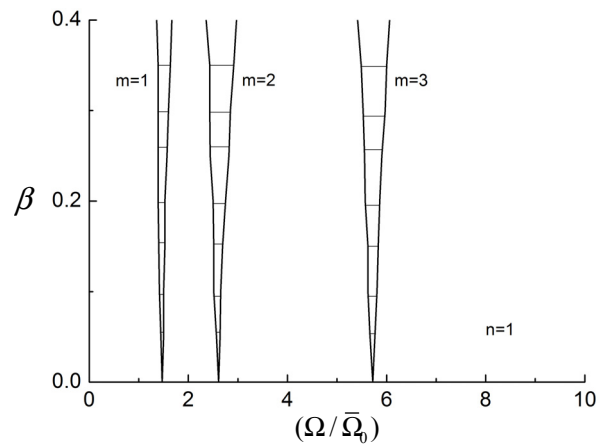
Table에서 알 수 있듯이 식 (21)에서 구한 결과와 산정식에서 구한 식 (26)은 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다.

Table 8 Comparison of dynamic principal instability region

β	Equation (21)		Equation (26)	
	+	-	+	-
0.00	3.562	3.562	3.562	3.562
0.02	3.543	3.581	3.543	3.581
0.04	3.524	3.599	3.524	3.599
0.06	3.505	3.168	3.505	3.618
0.08	3.486	3.636	3.486	3.636



(a) $\alpha=0.0$ Case



(b) $\alpha=0.5$ Case

Fig. 4 Periodic in-plane loading of dynamic principal instability region

5. 결 론

본 논문에서는 좌굴·진동문제의 고유치의 유사성을 이용하여 단순지지된 2변상의 일정한 압축하중이 작용할 경우의 직사각형판과 역대칭 Angle-Ply 적층판의 고유진동수의 산정식을 제시하였다. 산정식은 얇은 판 및 비교적 두꺼운 판에서도 적용 가능하다. 또한 산정식의 표시 방법은 단순지지 방향의 진동모드를 산정하는 파수 및 좌굴모드를 규정하는 파수가 양인 형태로 가져올 수 있다.

그 결과 압축하중 하에서 직사각형판의 고유진동수 특성의 파악이 용이하게 되고, 또 무재하시 진동수 데이터를 집적한 설계 핸드북 자료만 있으면 임의 진동파수에 대한 고유진동수의 산정이 가능하게 된다. 더욱이 산정식은 판의 동적 안정문제에서 주불안정영역의 근사적인 산정에 유효하게 이용 될 수 있다.

더욱이 본 논문의 고유진동수 산정식은 초기응력을 받는 직사각형판 뿐만 아니라, 역대칭 Angle-Ply 적층판, 셸, 회전 셸 등 고유진동수만 구할 수 있다면 본 논문의 산정식을 모두 적용할 수 있기 때문에 논문적인 가치는 충분하다고 판단 된다.

감사의 글

이 논문은 인천대학교 2011년도 자체연구비 지원에 의하여 수행한 것으로 이에 감사드립니다.

References

1. Apala Majumdar, Alain Goriely (2013), Static and dynamic stability results for a class of three-dimensional configurations of Kirchhoff elastic rods Original Research Article Physica D: Nonlinear Phenomena, 253, 91-101.
2. Benson, P. R., and Hinton, E. (1992), A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10, 665-678.
3. Eftekhari, S. A., Jafari, A. A. (2012), Vibration of an initially stressed rectangular plate due to an accelerated traveling mass Original Research Article Scientia Iranica, 19(5), 1195-1213.
4. Ehsan Bahmyari, Mohammad Reza Khedmati (2013), Vibration analysis of nonhomogeneous moderately thick plates with point supports resting on Pasternak elastic foundation using element free Galerkin method Original Research Article Engineering Analysis with Boundary Elements, 37(10), 1212-1238.
5. Hachi, N., Nagai, K. (2004), Periodic plate loading under dynamic principal instability region, *Tohoku Univ.*, 36, 381, 147-169.
6. Hinton, E. (1998), Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method, *Computers & Structures.*, 8, 99-105.
7. Iguchi, S. (1938), Die Eigenwertproblem für die elastische rechteckige platte, *Mem. Fac. Eng., Hokkaido Univ.*, 305-372.
8. Lurie, H. (1952), Lateral Vibrations as related to structural stability, *J. Appl. Mech.*, 74, 195-204.
9. Lurie, H. (1951), Vibrations of rectangular plates, *J. Aeron. Sci.*, 18-2, 139-140.
10. Mindlin, R. D. (1951), Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38.
11. Mohammed Sobhy (2013), Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions Original Research Article Composite Structures, 99, 76-87.
12. Park, S. J., Mikami, T. (1999), Initially stressed under Vibration of Cylindrical Shell, *Journal of Structure*, 45A, 709-717.
13. Sekiya, T., Hamada, M. (2010), *Plate structure design*, Asakura.
14. Sun, C. T. (1972), On the equations of Timoshenko beam under initial stress, *J. of Appl. Mech.*, 39, 282-285.
15. Timoshenko, S. P., and Gere, J. M. (1961), *Theory of elastic Stability* McGraw-Hill, N. Y.
16. Yu, S. D. (2009), Free and forced flexural vibration analysis of cantilever plates with attached point mass, *Original Research Article Journal of Sound and Vibration*, 321(1-2, 20), 270-285.
17. Zhibo Yang, Xuefeng Chen, Xingwu Zhang, Zhengjia He (2013), Free vibration and buckling analysis of plates using B-spline wavelet on the interval Mindlin element Original Research Article Applied Mathematical Modelling, 37(5), 3449-3466.

Received : 11/19/2013

Revised : 12/13/2013

Accepted : 12/16/2013

요 지

본 논문은 초기하중을 받는 직사각형판 및 역대칭 Angle-Ply 적층판의 좌굴 및 진동특성을 무재하시의 고유진동수를 이용하여 산정하는 간편법을 제시하였다. 마주보는 두면이 단순지지된 직사각형판의 운동방정식은 곡률향을 고려한 Mindlin 판이론과 에너지원리를 이용한 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 유도하였다. 초기응력을 받는 직사각형판의 무차원화 고유진동수, 임계좌굴계수 및 동적불안정영역 문제들을 무재하시의 무차원화 고유진동수로서 각각의 특성을 정립하였다. 본 연구에서 제안한 진동특성에 관한 간편산정식의 타당성과 사용성을 입증하기 위해 수치예를 들어 검토하였다.

핵심 용어 : 초기응력을 받는 직사각형판, 자유진동, 좌굴, Mindlin's 판이론
