

# 유한한 열용량의 열원을 활용한 순차적 카르노 사이클의 열역학적 성능 해석에 관한 연구

박한샘

서울대학교 기계항공공학부

(archer18@snu.ac.kr)

## 서론

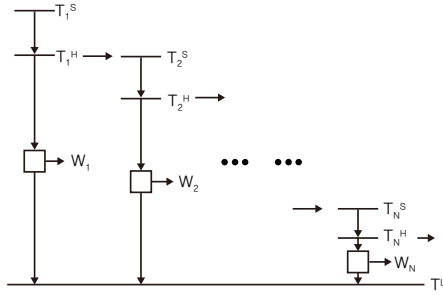
이상적으로 작동하는 카르노 사이클은 하나의 표준으로서 열기관을 평가하거나 열원에서 얻을 수 있는 일의 양을 가늠하기 위하여 오랜 시간 활용되어왔다. 카르노 사이클의 특징 중 하나이자 실제 사이클과의 가장 큰 차이점은 무한한 열용량을 가진 열원을 활용하여 등온 열교환을 한다는 점이다. 물론 지금까지는 활용되는 대부분의 열에너지원이 연소과정이나 핵분열 과정에서 발생하여 고온 및 대용량의 특징을 가지고 있었기 때문에 큰 무리 없이 카르노 사이클을 기준으로 활용할 수 있었다.

하지만 최근 들어 신재생에너지에 대한 연구가 활발해지면서 지열, 태양열, 해수 온도차 및 각종 폐열 등 기존의 열원들보다 온도도 낮고 보다 작은 용량으로 나뉘어 분포하는 새로운 열에너지원이 등장하고 있다. 이러한 열원의 특성 변화는 이를 활용할 열기관에도 영향을 미치게 되며 결과적으로 기존의 카르노 사이클을 대체할 수 있는 새로운 표준 사이클에 대한 요구로 연결된다.

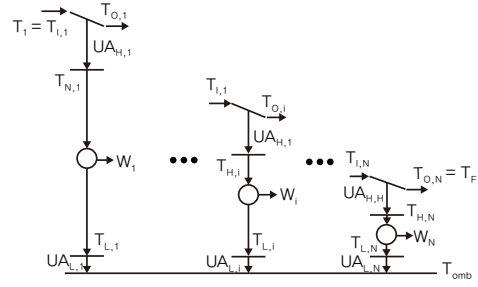
## 순차적 카르노 사이클

Ondrechen 등으로부터 최초로 제안된 순차적 카르노 사이클의 개략도가 그림 1에 나타나 있다. 순차적 카르노 사이클도 기본적으로 카르노 사이클의 원리에 의해 작동되는데 하나의 시스템이 여러 개의 내부 카르노 사이클로 이루어져 있으며 각 카르노 사이클을 지날 때 마다 열원의 온도가 변화하게 된다. 이때, 열원이 유한한 열용량을 가지고 있기 때문에 열원과 내부 카르노 사이클간의 온도 차이가 발생한다. 이렇듯 기존의 카르노 사이클에 비해 열원과 사이클 간의 온도차 및 열원의 온도 감소가 반영되기 때문에 보다 실제와 비슷한 성능 값을 얻게 되는 것이다.

본 연구에서는 최초 제시된 모델로부터 발전시킨 새로운 순차적 카르노 사이클 모델을 활용하였으며 이는 그림 2와 같다. 그림 1의 모델과 달리 열교환이 일어나는 부분에 흔히 활용되는  $NTU$ (number of transfer unit,  $UA/C$ )를 사용하여 열원의 온도가 연속적으로 변화하도록 하였고 열침과 내부 카르노 사이클 간의 온도 차이도 추가로 고



[그림 1] 최초의 순차적 카르노 사이클 모델



[그림 2] 변형된 순차적 카르노 사이클 모델

려하여 주었다. 이때 열침은 대기와 같이 열용량이 무한하여 온도 변화가 생기지 않는다고 가정하였다.

그림 2에 나타난 모델을 이용하여 순차적 카르노 사이클의 성능을 계산하기 위해서는 시스템이 완전히 정의되어야 하며 그를 위해 다음과 같은 추가적인 가정을 하였다.

- 1) 열원의 열용량은 온도 등에 무관하며 항상 일정하다.
- 2) 시스템 내부에서 추가적으로 손실되는 에너지는 없다.
- 3) 열침과 내부 사이클 간의 온도차이는 각 사이클마다 동일하다.
- 4) 열원과 열침 부분의  $NTU$ 는 서로 다를 수 있지만 각 내부 사이클끼리는 똑같은  $NTU$ 가 주어진다.

여기서 3번과 4번의 가정 대신 열침과 내부 사이클 간의 온도차 및 내부 사이클마다  $NTU$ 를 서로 다르게 해주면 동일하게 유지시켜주는 경우보다 발생하는 일량이 항상 적게 되며 이는 라그랑주 승수법(the method of Lagrange multiplier) 등을 통하여 유도할 수 있다.

### 순차적 카르노 사이클의 성능 계산

앞서 언급한 바와 같이 순차적 카르노 사이클의

성능은 아래와 같은 기본적인 열역학 및 열전달 식으로 계산할 수 있다.

$$Q_{Hi} = UA_H \frac{T_{Li} - T_{O,i}}{\ln \frac{T_{Li} - T_{Hi}}{T_{Li} - T_{Hi}}} = C(T_{Li} - T_{O,i}) \quad (1)$$

$$Q_{Li} = UA_L(T_L - T_{amb}) \quad (2)$$

$$\frac{Q_{Li}}{T_L} = \frac{Q_{Hi}}{T_{Hi}} \quad (3)$$

위의 식을 조합하면 미지수로 놓여있는 열원 출구 온도 및 사이클 고온부 온도를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$T_{O,i} = \frac{LdT_L + H - 1}{LHdT_L + H - 1} T_{Li} = C_O T_{Li} \quad (4)$$

$$T_{Hi} = \frac{H - 1}{LHdT_L + H - 1} T_{Li} = C_H T_{Li} \quad (5)$$

이 때 각각  $L = NTU_L = UA_H/C$ ,  $H = e^{NTU_H}$ ,  $dT_L = (T_L - T_{amb})/T_L$ 이다. 이 결과를 이용하면 시스템 내부의  $i$ 번째 카르노 사이클의 효율과 일량을 유도할 수 있다.

$$\eta_i = 1 - \frac{T_L}{T_{Hi}} = 1 - \frac{T_L}{C_H T_{Li}} = 1 - \frac{T_L}{C_O^{i-1} C_H T_1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W_i = \eta_i Q_{Hi} &= C(T_{Li} - T_{O,i}) \left( 1 - \frac{T_L}{C_O^{i-1} C_H T_1} \right) \\ &= C(1 - C_O) \left( T_1 C_O^{i-1} - \frac{T_L}{C_H} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

최종적으로 모든 내부 카르노 사이클의 일량을 합하면 전체 순차적 카르노 사이클의 성능을 도출할 수 있다. 계산과정에는 등비급수의 합을 구하는 원리가 포함되어 있다.

$$W_{tot} = \sum_{i=1}^N W_i = C(1 - C_O) \sum_{i=1}^N \left( T_I C_O^{i-1} - \frac{T_L}{C_H} \right) \quad (8)$$

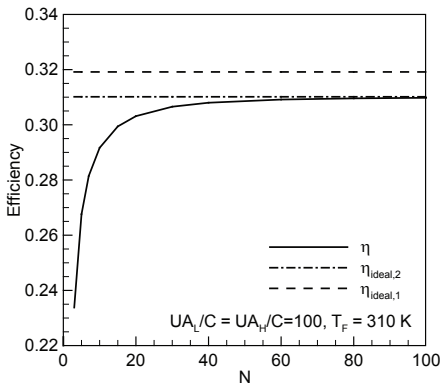
$$= CT_I(1 - C_O^N) - \frac{C}{C_H}(1 - C_O)NT_L$$

$$\eta_{tot} = \frac{W_{tot}}{\sum_{i=1}^N Q_{H,i}} = \frac{W_{tot}}{C(T_I - T_F)} \quad (9)$$

$$= 1 - \frac{N(1 - C_O) T_L}{T_I C_H (1 - C_O^N)}$$

식 (8)과 식 (9)에 사용된  $C_O$ 와  $C_H$ 가 계산의 편의를 위하여 임의로 정의된 변수임을 고려하면 순차적 카르노 사이클 성능의 주요 변수는  $N$ ,  $NTU_L$ ,  $NTU_H$ ,  $T_L$ 로 정리할 수 있다. 단, 본 연구에서는 다른 유사 순차적 카르노 사이클 연구와의 연계성을 유지함과 동시에 좀 더 대표성을 지닌 변수를 활용하기 위하여  $T_L$  대신 열원의 최종 출구온도인  $T_F$ 를 분석에 사용하였다. 둘 간의 관계를 간단한 식으로 표현할 수는 없지만,  $C_O$ 가  $T_L$ 의 함수임을 활용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$T_F = C_O^N T_I \quad (10)$$



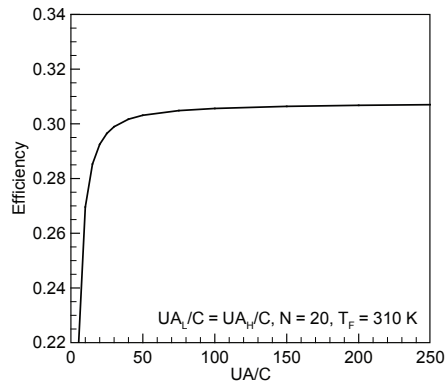
[그림 3] 다양한 N에 대한 사이클 효율

### 순차적 카르노 사이클의 성능 특성

그림 3과 그림 4에는 위의 식을 활용하여 다양한  $N$ 과  $NTU$  조건에서 시스템의 성능을 계산한 결과가 나타나 있다. 이때 열원의 초기 온도는 열침 온도의 두 배,  $NTU_L$ 과  $NTU_H$ 는 같다고 가정하였다. 기본적으로 순차적 시스템에 많은 숫자의 카르노 사이클이 들어갈수록, 열교환기의 성능이 좋을수록 시스템 전체 효율이 상승한다. 다만 그 상승 양상은 일종의 로그 형태의 곡선과 비슷하여 어느 정도 이상의 조건에서는  $N$ 과  $NTU$  값이 증가한다고 해서 성능이 크게 상승하지는 않는다. 이로 미루어 볼 때, 순차적 시스템이 실제 설계될 때 굳이 시스템 내부에 사이클을 다수 집어넣지 않아도 될 것이라는 예상을 해볼 수 있다.

그림 3과 그림 4를 통해 순차적 카르노 시스템의 효율이  $N$ 과  $NTU$ 가 증가함에 따라 함께 무한정으로 커지는 것이 아닌 일정 수준에 수렴하는 듯한 모습을 관찰할 수 있다. 시스템의  $N$ 과  $NTU$ 가 함께 무한대인 경우를 첫 번째 이상적 조건, 시스템의  $NTU$ 는 한정된 상태에서  $N$ 만 무한대로 증가할 경우를 두 번째 이상적 조건이라 가정하고 이때의 시스템 효율을 구해보면 다음과 같다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \lim_{NTU_L, NTU_H \rightarrow \infty} \eta_{tot} \right) = 1 - \frac{T_{amb}}{T_I - T_F} \ln \frac{T_I}{T_F} \quad (11)$$



[그림 4] 다양한 NTU에 대한 사이클 효율

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_{hot} = 1 - \frac{T_{amb}}{T_I - T_F} \ln \frac{T_I}{T_F} \quad (12)$$

$$\frac{1}{1 - \left( \frac{1}{NTU_L} + \frac{1}{NTU_H} \right) \ln \frac{T_I}{T_F}}$$

식 (11)에 제시된 첫 번째 이상적 효율은 Ondrechen 등이 순차적 카르노 시스템을 처음 제안할 때 언급한 값과 동일하며 기존의 카르노 사이클의 효율에 비해서 상당히 낮은 값에 해당한다. 두 번째 이상적 효율은 첫 번째 이상적 효율에 하나의 항이 추가된 형태를 띠고 있으며 추가된 항이 항상 1보다 크기 때문에 두 번째 효율은 항상 첫 번째 효율보다 작다. 이는 특정 상황에서 사용할 수 있는 열교환기의 사양이 제한적일 때 그 조건에 해당하는 값을 입력함으로써 이상적인 효율을 좀 더 현실에 가깝게 낮출 수 있는 용도로 사용될 수 있을 것이다.

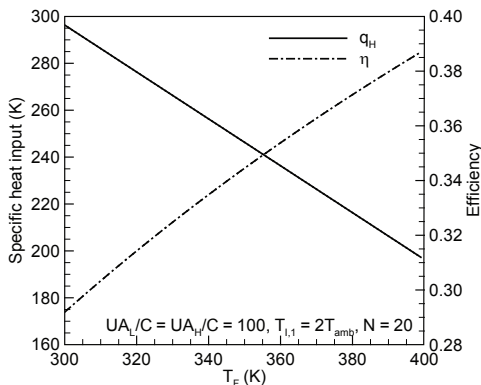
그림 5와 그림 6에는 순차적 카르노 사이클을 최종적으로 빠져나오는 열원의 온도( $T_F$ )가 전체 시스템의 성능에 미치는 영향이 나타나 있다. 이때, 열 및 일의 양은 단위 열용량의 열원에 해당하는 값이 사용되었다. 앞선 경우에는 열원으로부터 시스템이 흡수하는 열량이 동일하게 유지된 채 변수가 바뀌었기 때문에 시스템 효율과 일량이 동일한 형태로 변화하였다. 그러나  $T_F$ 가 변화하면 열원으로부터 전

달되는 열량이 변화하기 때문에 이로 인하여 효율과 일량이 받는 영향이 서로 달라지게 된다. 먼저  $T_F$ 가 증가하면 열원이 겪는 온도 차이가 줄어들며 사이클로 흡수되는 열량이 감소한다. 반면에 이는 사이클의 고온부가 상승하는 효과를 가져오므로 시스템의 전체 효율은 상승하게 된다. 사이클이 생산하는 일의 양은 효율과 흡수하는 열량의 곱이므로  $T_F$ 에 대해 그림 6과 같이 곡선을 그리며 변화하게 된다. 즉, 시스템이 생산하는 일의 양을 최대화할 수 있는 최적의  $T_F$ 가 존재한다는 것이다. 기존의 높은 온도를 가진 열에너지의 경우 폐열 문제를 배제할 수 없기 때문에  $T_F$ 를 임의로 조절하는 것에 어느 정도 한계가 있다. 그러나 최근에 재생에너지로 제시되는 낮은 온도의 열원의 경우는 그러한 문제로부터 자유롭기 때문에 최적  $T_F$ 를 통해 일량을 극대화시키는 것도 중요한 이슈에 해당할 수 있다.

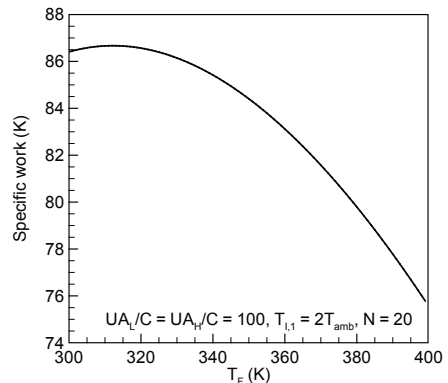
### 순차적 카르노 사이클의 최적화

최적  $T_F$ 는 간단히 식 (8)과 편미분 연산을 이용하여 아래와 같이 구할 수 있다.

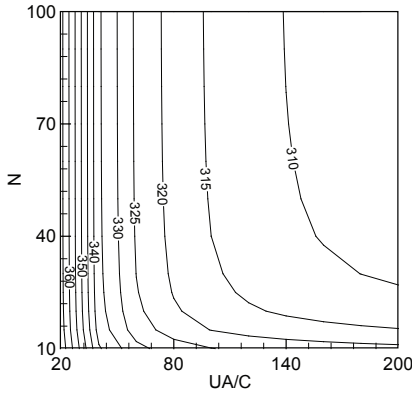
$$\frac{\partial W_{tot}}{\partial T_F} = 0 \quad (13)$$



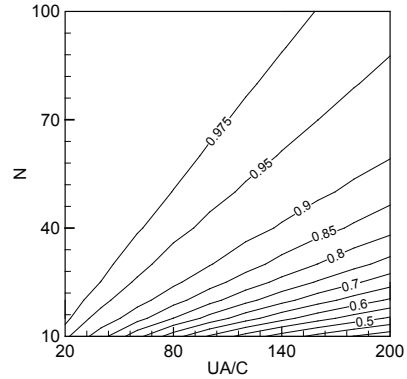
[그림 5] 다양한  $T_F$ 에 대한 사이클 효율 변화



[그림 6] 다양한  $T_F$ 에 대한 사이클 일량 변화



[그림 7] 다양한 조건에서의 최적  $T_F$



[그림 8] 다양한 조건에서의 최적  $NTU_H / NTU_L$

식 (10)에 정리된 것처럼  $T_F$  대신  $C_o$ 로 미분하여도 같은 결과를 얻을 수 있다. 물론 계산 과정은 간단하지만 중간 과정의 식이 다소 복잡하기 때문에 실제 값을 얻기까지는 다른 계산 도구의 도움을 받아야 필요가 있다. 우선적으로 식 (11)에 소개된 첫 번째 이상적 효율을 이용하여 최적  $T_F$ 를 구해보면 최적  $T_F$ 가  $T_{amb}$ 와 같다는 결과를 얻을 수 있다. 즉, 최적  $T_F$ 의 문제는 순차적 시스템이 이상적인 경우에 존재하지 못함으로써 발생하는 것이라고도 볼 수 있다.

그림 7에는 다양한  $N$ 과  $NTU$  조건에서 최적  $T_F$ 를 계산한 결과가 등고선의 형태로 나타나 있다. 그림상에는 최적  $T_F$ 가 오른쪽 위로 갈수록 작아지는 모습을 볼 수 있는데 이는 사이클이 이상적일 때 최적  $T_F$ 가  $T_{amb}$ 로 수렴한다는 앞선 사실과 일치하는 부분이다. 반대로 시스템 내부의 카르노 사이클 및 열교환 능력이 부족하면  $T_F$ 는 급격히 상승하며 실제로 순차적 시스템을 제작하는 경우 이러한 조건하에 놓일 가능성이 크기 때문에 최적  $T_F$ 를 확인하여 설계 및 작동하는 것이 매우 중요하게 될 것이라 예상할 수 있다.

$T_F$  이외에 순차적 카르노 사이클에서 최적화할 수 있는 부분은 사용할 수 있는  $NTU$ 가 한정되어 있는 상황에서 이를  $NTU_L$ 과  $NTU_H$  간에 어떻게 분배하는가의 문제이다. 최적값을 구하는 방법은 아

래와 같이  $T_F$ 의 경우와 동일하다.

$$\frac{\partial W_{tot}}{\partial e^{NTU_H}} = 0 \quad (14)$$

물론 여기에는  $NTU_L$ 과  $NTU_H$ 의 합이 일정하다는 제한조건이 추가된다. 최적  $T_F$ 와는 다르게 식(14)의 계산은 다음과 같이 좀 더 간단한 식으로 정리된다.

$$\left( e^{\frac{ua_H}{C}} \right)^2 - e^{\frac{ua_H}{C}} \left( 2 + \left( \frac{ua_L}{C} \right)^2 \right) - 1 = 0 \quad (15)$$

위의 식에서 한 가지 주목할 점은 최적의  $NTU$  비를 찾는 식에  $T_F$  및  $T_L$ 가 존재하지 않는다는 점이다. 즉, 최적  $NTU$ 분배 비율은 열원의 조건에 영향을 받지 않으며 이는 전체 시스템을 최적화할 때  $T_F$ 와  $NTU$ , 두 종류의 최적화를 동시에 진행하는 대신 한 번에 하나씩 순서대로 수행할 수 있다는 것을 의미한다.

그림 8에는 다양한 조건에서 계산한  $NTU_H / NTU_L$  값이 등고선 형태로 나타나 있다. 모든 조건에서  $NTU_H$ 보다  $NTU_L$ 이 큰 조건에서 최적의 형태를 볼 수 있으며 특히  $N$ 에 비해 전체  $NTU$  값이 클 경우  $NTU_L$ 의 비중이 증가하는 것을 확인할 수 있었다. 참고로 앞에서 언급한 두 가지의 이상적

인 조건 모두에서  $NTU$ 분배 최적비는 1이다. 하지만 앞선  $T_f$ 의 경우  $T_f$ 가 최적인지 아닌지 여부에 따라 전체 일량의 차이가 꽤 발생하였던 것에 비하여  $NTU$ 분배 비율의 경우 최적으로 값을 맞추어 주어도 전체 일량은 그렇지 않은 경우에 비하여 큰 상승 효과가 발생하지 않았다. 즉, 경우에 따라서  $NTU_L$ 과  $NTU_H$ 는 서로 동일한 비율로 유지하여 시스템을 설계하는 것이 안전할 수도 있다.

이렇듯 식으로 정리된 순차적 카르노 사이클의 성능과 그 최적화 결과는 앞으로 새롭게 활용될 다양한 열에너지원을 활용하고 평가하는데 유용하게 사용될 수 있을 것이라 예상한다. 또한, 실제 열기관에 사용되는 주요 부품인 압축기, 터빈, 열교환기 등의 소형화 기술이 좀 더 발전된다면 실제로 이러한 순차적 열시스템이 우리 주변에서 작동할 날도 머지않아 올 수 있을 것이라 생각한다.

## 참고문헌

1. Ondrechen, M.J., Andresen, B., Mozurkewich, M., and Berry, R.S., 1981, Maximum work from a finite reservoir by sequential Carnot cycles, *American Journal of Physics*, Vol. 49, pp. 681-685.
2. Ibrahim, O.M. and Klein, S.A., 1996, Absorption power cycle, *Energy*, Vol. 21, pp. 21-27.
3. Ro, S.T. and Sohn, J.L., 2007, Some issues on performance analysis of fuel cells in thermodynamic point of view, *Journal of Power Sources*, Vol. 167, pp. 295-301.
4. Park, H. and Kim, M.S., 2014, Thermodynamic performance analysis of sequential Carnot cycles using heat sources with finite heat capacity, *Energy*, Vol. 68, pp. 592-598. 