

직교격자상에서 효율적인 비압축성 자유표면유동 해법

고 광 수, 안 형 택*

울산대학교 조선해양공학부

AN EFFICIENT ALGORITHM FOR INCOMPRESSIBLE FREE SURFACE FLOW ON CARTESIAN MESHES

G.S. Go and H.T. Ahn*

School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Ulsan Univ.

An efficient solution algorithm for simulating free surface problem is presented. Navier-Stokes equations for variable density incompressible flow are employed as the governing equation on Cartesian meshes. In order to describe the free surface motion efficiently, VOF (Volume Of Fluid) method utilizing THINC (Tangent of Hyperbola for Interface Capturing) scheme is employed. The most time-consuming part of the current free surface flow simulations is the solution step of the linear system, derived by the pressure Poisson equation. To solve a pressure Poisson equation efficiently, the PCG (Preconditioned Conjugate Gradient) method is utilized. This study showed that the proper application of the preconditioner is the key for the efficient solution of the free surface flow when its pressure Poisson equation is solved by the CG method. To demonstrate the efficiency of the current approach, we compared the convergence histories of different algorithms for solving the pressure Poisson equation.

Key Words : 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics), 자유표면유동(Free Surface Flow), 직교격자(Cartesian Mesh), 압력 포아송 방정식(Pressure Poisson Equation), 예조건화된 켈레구배법(Preconditioned Conjugate Gradient Method)

1. 서 론

선박유체역학에서 자유표면(free surface)이란 물과 대기 사이의 경계를 뜻한다. 잠수함을 제외한 모든 선박은 자유표면에 위치하고 있기 때문에 자유표면 문제에 대한 연구는 선박유체역학 분야에서 지속적으로 이루어지고 있다. 자유표면유동을 해석하기 위해서는 특성이 다른 두 유체 사이에 발생하는 비선형적인 현상을 고려해야 된다. 그러나 선박유체역학 분야에서 유체 유동해석에 가장 많이 쓰이는 포텐셜 이론(potential theory)은 유체의 점성과 회전성을 무시하기 때문에 유체의 비선형성을 구현할 수 없다. 따라서 자유표면유동을 정확히 해석하기 위해서는 유체의 비선형성을 고려할 수 있는 접근방법이 필요하다. 이를 전산유체역학(computational

fluid dynamics)에 기반한 선박유체역학이라고 한다. 전산유체역학에서 자유표면을 구현하는 대표적인 기법은 VOF (Volume Of Fluid)법[1]이다. 이외에도 Level Set법[2], MOF (Moment Of Fluid)법[3]과 같이 여러 방법들이 개발되면서 자유표면문제를 해석하는데 많은 기여를 하고 있다.

전산유체역학 분야의 새로운 알고리즘은 a) 정확도 향상과 b) 계산시간 단축에 관한 것으로 분류될 수 있다. 본 논문은 그 중 두 번째 주제인 계산시간의 효율성을 증대시키는 방안에 대해서 소개 하고자 한다. 비압축성 유동해석에서 계산시간의 가장 많은 비율(약 90%)을 차지하는 부분은 압력 포아송 방정식(pressure Poisson equation)으로부터 유도된 선형방정식(linear equation)의 해법이다. 직교격자상에서 선형방정식의 계수 행렬(coefficient matrix)은 일반적으로 풀이에 용이한 성질을 가지는 대칭양정치(symmetric positive-definite)이다. 자유표면 유동해석일 경우 약 1000:1에 가까운 물:공기의 밀도비로 인하여 계수 행렬의 조건이 악화될 수 있다. 이를 극복하기 위한 시도로 선형방정식의 예조건화(pre-conditioning)에 대한 연구가 Gibuo and Min[4]에 의하여 단일 유체 유동해석에

Received: September 16, 2014, Revised: December 12, 2014,
Accepted: December 12, 2014.

* Corresponding author, E-mail: htahn@ulsan.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/ksce.2014.19.4.020>

© KSCFE 2014

시도된 바가 있다. 본 연구에서는 선형방정식 해법으로 계수 행렬이 대칭양정치일 때 수렴성이 매우 뛰어나다고 알려진 켈레구배(Conjugate Gradient, CG)법[5]을 사용하였다. 또한, 물과 공기를 포함하는 자유표면 유동을 효율적으로 해석하기 위해 켈레구배에 예조건화 기법을 적용하였다. 이는 예조건화된 켈레구배(Preconditioned Conjugate Gradient, PCG)법이라 한다.

비압축성 유동해석시간의 약 90%가 선형방정식을 푸는데 소요되기 때문에 전체 계산시간의 단축효과는 선형방정식의 수렴도(convergence history)로 나타내었다. 일반적으로 반복횟수의 감소는 곧 계산시간의 단축을 의미한다. 그러나 복잡한 예조건화 과정이 추가되면 반복횟수가 감소하더라도 계산시간은 오히려 증가하게 된다. 본 연구는 전체 계산시간 단축이 목적이기 때문에 타 예조건화 방법에 비해 과도한 추가적인 계산시간이 필요하지 않은 Jacobi 예조건화 방법을 사용하여 반복횟수의 감소가 계산시간의 단축으로 직결되도록 하였다.

본 논문에서는 직교격자상의 효율적인 자유표면 구현기법을 제시하고자 한다. 시간에 따라 변화하는 자유표면의 거동을 표현하기 위하여 VOF법을 사용하였으며, 유체 유동에 따라 volume-fraction의 변화를 표현하기 위하여 THINC(Tangent of Hyperbolic for Interface Capturing)법[6,7,8]을 적용하였다. THINC법을 사용하면 자유표면을 구현하는데 기하학적 재구성(geometrical reconstruction)과정이 생략되어 기존의 VOF법[3]에 비해 계산 시간을 단축할 수 있다.

본 논문에서는 단상유동을 효율적으로 해석하기 위해 타 연구자에 의해 수행된 기존의 연구[4]를 자유표면유동으로 확장하였다. 자유표면유동 해석시 단상유동 해석에 비하여 선형 방정식의 수렴성이 저하된다는 사실을 확인하였으며, 이는 예조건화 기법으로 극복 가능함을 보여준다. 본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 본 연구에 적용된 직교격자상의 효율적인 비압축성 자유표면유동 해법이 제시된다. 3절에서는 연구 결과를 검증하기 위하여 다양한 자유표면 문제의 해석 결과가 제시된다. 마지막으로, 4절에서는 본 해석방법의 효율성과 신뢰성이 정리된다.

2. 자유표면유동 해법

2.1 지배 방정식

본 연구에서는 지배방정식으로 다음과 같은 비압축성 유동의 Navier-Stokes 방정식을 고려한다.

Continuity equation :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \tag{1}$$

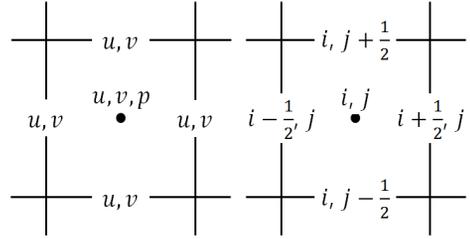


Fig. 1 Schematic figures of the cartesian grid in 2-D case

Momentum equation :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} p \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV \end{aligned} \tag{2}$$

\mathbf{u} 는 유체의 속도벡터, Ω 는 검사체적, \mathbf{n} 은 검사체적의 법선 벡터, Γ 는 검사체적의 표면, p 는 압력, ρ 는 밀도, \mathbf{f} 는 중력과 같은 외력 항 그리고 $\boldsymbol{\tau}$ 는 viscous stress tensor를 뜻한다. τ 는 index 표기법을 사용하여 식 (3)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{3}$$

2.2 직교 격자

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 직교격자를 사용했다. 속도 값은 격자의 경계와 중심에 위치하고, 압력 값은 격자의 중심에만 위치하는 준 엇갈림(semi-staggered) 격자 체계이다. 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 풀기위해 SIA(Surface Integrated Average)값과 VIA(Volume Integrated Average)값을 이용하는 VSIAMB(Volume/Surface Integrated Average based Multi-Moment Method)[9]를 사용했다. SIA값은 격자 경계의 평균 값을 뜻하고, VIA값은 격자 체적의 평균 값을 뜻한다. 3차원 직교격자에서 식 (4)는 VIA 그리고 식 (5)-(7)은 각각의 경계에 대한 SIA를 뜻한다.

$$u_{i,j,k} = \frac{1}{V} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} u(x,y,z) dV \tag{4}$$

$$u_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} = \frac{1}{S_{jk}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} u(x_{i \pm \frac{1}{2}}, y, z) dS_{jk} \tag{5}$$

$$u_{i, j \pm \frac{1}{2}, k} = \frac{1}{S_{ik}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} u(x, y_{j \pm \frac{1}{2}}, z) dS_{ik} \tag{6}$$

$$u_{i,j,k \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{S_{ij}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,y,z_{k \pm \frac{1}{2}}) dS_{ij} \quad (7)$$

여기서 i, j, k는 각각 x, y, z 방향에 대한 index를 뜻한다. V는 $\Delta x \Delta y \Delta z$, S_{ij} 는 $\Delta x \Delta y$, S_{jk} 는 $\Delta y \Delta z$, S_{ik} 는 $\Delta x \Delta z$ 를 뜻한다.

2.3 압력 포아송 방정식

비압축성 유동의 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위해 식 (2)를 식 (8)-(11)과 같이 분할하여 계산하는 다단계(Fractional Step)법[10]을 사용했다. 분할함에 따라 발생하는 오차는 시간 간격을 줄임으로써 극복할 수 있다.

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{***} - \mathbf{u}^{**}}{\Delta t} = \int_{\Omega} \mathbf{f} dV \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{***}}{\Delta t} = - \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} p \mathbf{n} dS \quad (11)$$

위의 식들을 순차적으로 풀게 되며, 식 (8)-(10)을 통해 구하게 되는 속도는 물리적인 의미를 가지지 않는 속도이다. 이를 중간속도(intermediate velocity)라고 정의하며 *를 사용하여 나타낸다. *의 개수는 중간속도의 순서를 의미하며 현재와 다음단계 속도사이에는 총 3개의 중간속도가 존재하게 된다. 식 (11)에 divergence($\nabla \cdot$)를 적용하면 divergence theorem에 의해 식 (13)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

Divergence Theorem :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{***}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\Gamma} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} p \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

비압축성 유동이기 때문에 \mathbf{u}^{n+1} 는 식 (1)을 만족한다. 그러나 물리적인 의미를 가지지 않는 중간속도 \mathbf{u}^{***} 는 식 (1)을 만족하지 않는다. 따라서 식 (13)은 식 (14)와 같은 압력 포아송 방정식(pressure Poisson equation)으로 표현된다.

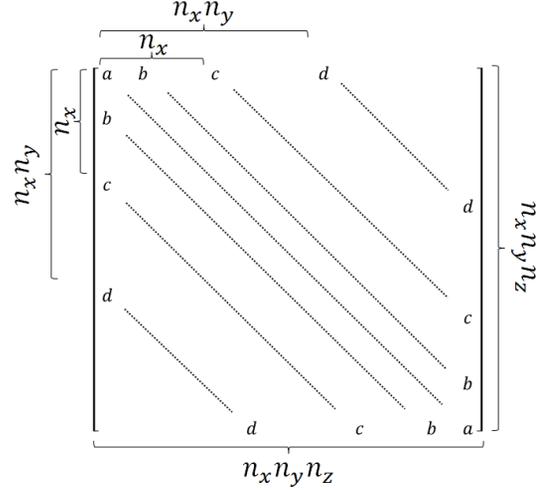


Fig. 2 A system of A matrix. n_i means number of grids about i-direction

$$- \int_{\Gamma} \left(\frac{\mathbf{u}^{***} \cdot \mathbf{n}}{\Delta t} \right) dS = - \int_{\Gamma} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} p \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (14)$$

압력 포아송 방정식인 식 (14)를 공간에 대해 중심 차분하게 되면 식 (15)와 같이 표현된다. 식 (15)를 전체 격자 시스템에 대하여 정리하면 $Ax=b$ 형태의 선형방정식(linear equation)이 된다. 여기서 A는 밀도 값으로 이루어진 계수 행렬(coefficient matrix), b는 중간속도의 divergence 값으로 이루어진 벡터 그리고 x는 압력 값으로 이루어진 미지수 벡터이다. 3차원 직교격자 상에서 계수행렬(coefficient matrix)은 Fig. 2와 같이 일곱 개의 diagonal로 이루어진 대칭양정치(symmetric positive-definite) 행렬이다.

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{1}{\rho} \partial_x p \right)_{i+1/2,j,k} - \left(\frac{1}{\rho} \partial_x p \right)_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} \\ & + \frac{\left(\frac{1}{\rho} \partial_y p \right)_{i,j+1/2,k} - \left(\frac{1}{\rho} \partial_y p \right)_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} \\ & + \frac{\left(\frac{1}{\rho} \partial_z p \right)_{i,j,k+1/2} - \left(\frac{1}{\rho} \partial_z p \right)_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} \\ & = - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1/2,j,k}^* - u_{i-1/2,j,k}^*}{\Delta x} \right. \\ & \left. + \frac{v_{i,j+1/2,k}^* - v_{i,j-1/2,k}^*}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1/2}^* - w_{i,j,k-1/2}^*}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\left(\frac{1}{\rho} \partial_x p\right)_{i+1/2,j,k} \equiv -\frac{2}{\rho_{i+1,j,k}^{n+1} + \rho_{i,j,k}^{n+1}} \frac{p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \quad (16)$$

2.4 예조건화된 켈레구배법

켈레구배(CG)법[5]을 적용하기 위해서는 선형방정식(linear equation)의 계수행렬(coefficient matrix)이 식 (17)과 같은 대칭 양정치(symmetric positive-definite) 조건을 만족해야 한다.

$$A^T = A, \quad x^T A x > 0 \text{ for arbitrary } x \quad (17)$$

식 (18)의 벡터함수 $E(x)$ 를 미분하게 되면 식 (19)와 같다. 미분 값이 0이 되는 점에서 함수는 최소 값을 가지게 됨으로 $E(x)$ 는 $Ax=b$ 를 만족하는 x 값에서 최소 값을 가지게 된다. 켈레구배법은 임의의 초기 점으로부터 벡터함수 $E(x)$ 의 최소 값을 가지는 x 값에 반복적인 과정을 통해 접근하여 선형방정식을 푸는 방법이다.

$$E(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax - b \cdot x \quad (18)$$

$$\nabla E(x) = Ax - b \quad (19)$$

해로 접근하는 방향은 식 (20)과 같이 식 (18)의 음의 기울기 값을 활용하여 결정한다. 음의 기울기 값은 선형방정식의 residual 벡터인 r 과 같다. 켈레구배법에서는 해로 접근하는 방향을 최적화하기 위하여 식 (18)의 현재단계 음의 기울기 값과 이전단계에서의 방향성을 동시에 고려한다. 식 (28)의 p 가 해를 추적하는 방향성을 가진 벡터이다.

$$-\nabla E(x) = r = b - Ax \quad (20)$$

켈레구배법의 알고리즘을 순차적으로 나열하면 식 (21)-(28)과 같다.

$$\text{Initial Value} = x^0 \quad (21)$$

$$r^0 = b - Ax^0 \quad (22)$$

$$p^0 = r^0 \quad (23)$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha^n = \frac{r^n \cdot p^n}{p^n \cdot Ap^n} \quad (24)$$

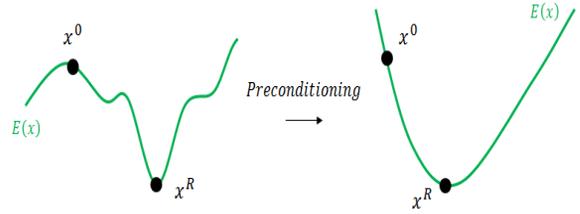


Fig. 3 Pre-conditioning effect

$$x^{n+1} = x^n + \alpha^n p^n \quad (25)$$

$$r^{n+1} = b - Ax^{n+1} \quad (26)$$

$$\beta^{n+1} = \frac{r^{n+1} \cdot r^{n+1}}{r^n \cdot r^n} \quad (27)$$

$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^{n+1} p^n \quad (28)$$

예조건화(pre-conditioning)는 예조건화 행렬 P 를 활용하여 식 (29)와 같이 수행한다. 이를 통해 벡터함수 $E(x)$ 도 식 (30)과 같이 변하게 된다.

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b \quad (29)$$

$$E(x) = \frac{1}{2} x \cdot (P^{-1}Ax) - (P^{-1}b) \cdot x \quad (30)$$

기하학적 관점에서 켈레구배법에 적용된 적절한 예조건화는 Fig. 3와 같이 벡터함수 $E(x)$ 의 형상을 단순화시킨다. 해를 추적하는 방향이 $E(x)$ 의 기울기에 의해 결정되기 때문에 단순한 형상일 경우 임의의 초기값 x^0 에서 해인 x^R 로 보다 빠르게 수렴하게 한다. 여기서 x^0 와 x^R 의 위치는 예조건화 전후에서 각각 동일하다. 본 연구에서는 예조건화 행렬 중 A 계수행렬(coefficient matrix)의 diagonal 만으로 이루어진 Jacobi 예조건화 행렬을 사용했다. Jacobi 예조건화 행렬은 아주 단순하지만 diagonal이 지배적인 행렬에 적용하면 수렴성 향상에 큰 효과가 있다.

$$\text{Jacobi preconditioner, } P = \text{diag}(A) \quad (31)$$

켈레구배법의 수렴성을 식 (32)와 같은 간단한 포아송 방정식(Poisson equation)에 대한 수렴도로 검증했다. 포아송 방정식의 기본조건은 Fig. 4와 같다. 비교대상은 대표적인 선형 방정식 해법인 SOR(Successive Over Relaxation)법과 Gauss-Seidal법이다. tolerance 값은 10^{-6} 이다.

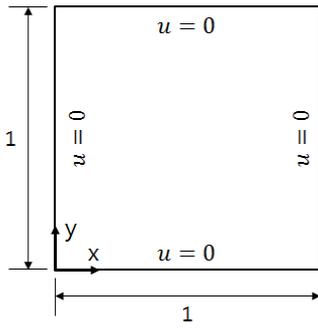


Fig. 4 Layout of equation (32)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -10 \quad (32)$$

Fig. 5를 보면 반복횟수가 증가함에 따라 켈레구배법의 경우 타 방법에 비해 residual 값이 급격하게 감소하는 것을 확인할 수 있다. 이 경우 선형방정식의 계수행렬을 구성하는 각각의 diagonal이 일정한 값으로 이루어지기 때문에 Jacobi 예조건화 과정을 거쳐도 전체 시스템의 변화가 발생하지 않는다. 그래서 Fig. 5에서 CG법과 PCG법이 동일한 수렴도를 가지게 된다.

2.5 자유표면구현 방법

자유표면(free surface)을 구현하기 위해 VOF(Volume Of Fluid)법을 기반으로 한 THINC(Tangent of Hyperbola Interface Capturing)법[6,7,8]을 사용했다. VOF법은 유체의 특성함수(characteristic function) χ 를 기본으로 한다. χ 는 유체의 특성에 따라 0과 1의 사이 값을 가지는 스칼라 함수로써 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\chi) - \chi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (33)$$

\mathbf{u} 는 유체의 속도 벡터이다. 식 (33)을 적분형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \chi dV + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}\chi) \cdot \mathbf{n} dS \\ + \int_{\Gamma} \chi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Ω 는 검사체적, \mathbf{n} 은 검사체적의 법선벡터, Γ 는 검사체적의 표면이다. 격자를 구성하는 셀에서 χ 의 평균값을 volume-

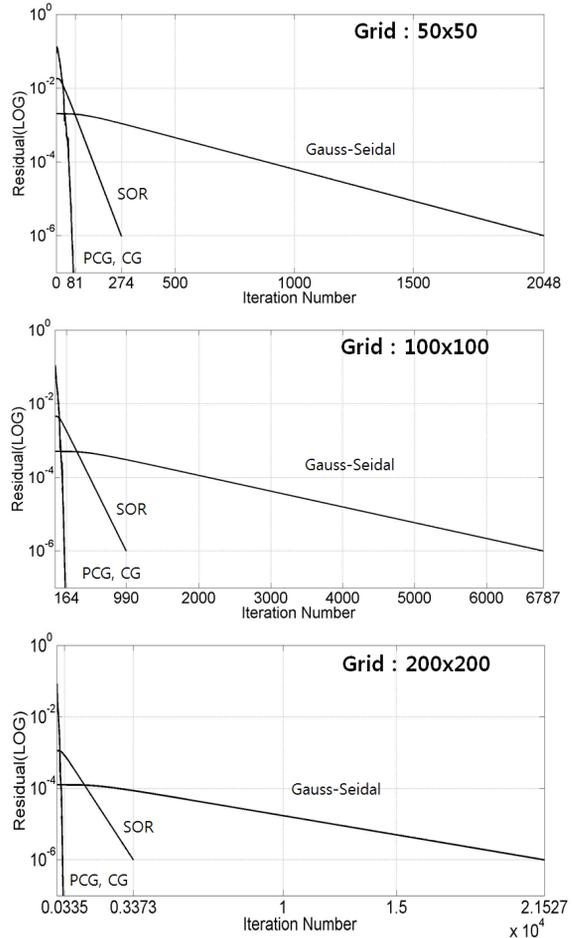


Fig. 5 Convergence histories of equation (32)

fraction 함수 C 라고 정의한다. 함수 C 는 셀이 물로 가득차 있으면 1, 공기로 가득차 있으면 0 그리고 경계(자유표면)에서 0과 1의 사이 값을 가진다.

$$C = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \chi dV \quad (35)$$

2차원에서 식 (34)은 중간단계 개념을 도입하여 다음과 같이 분할하여 계산한다.

$$\begin{aligned} C_{i,j}^* = C_{i,j}^n - \frac{F_{x,i+1/2,j}^n - F_{x,i-1/2,j}^n}{\Delta x} \\ + C_{i,j}^n \frac{u_{x,i+1/2,j}^n - u_{x,i-1/2,j}^n}{\Delta x} \Delta t \end{aligned} \quad (36)$$

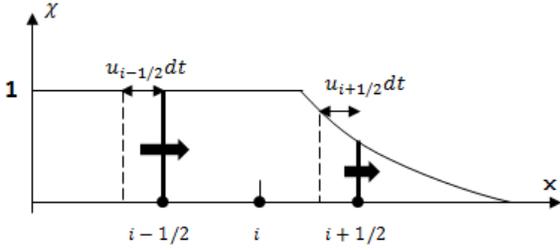


Fig. 6 Schematic figure of 1-D THINC scheme

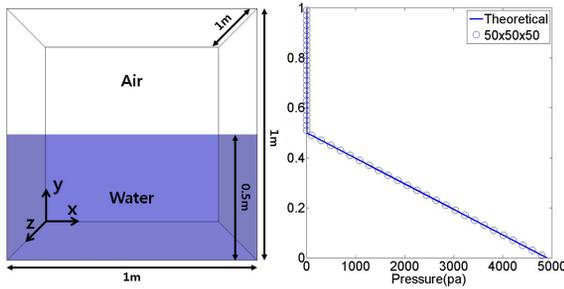


Fig. 7 Layout of the hydrostatic pressure problem(left) and pressure variation along y-direction(right)

$$C_{i,j}^{m+1} = C_{i,j}^* - \frac{F_{y,i,j+1/2}^* - F_{y,i,j-1/2}^*}{\Delta y} + C_{i,j}^* \frac{u_{y,i,j+1/2}^n - u_{y,i,j-1/2}^n}{\Delta y} \Delta t \quad (37)$$

식 (34)의 두 번째 적분 항은 식 (36)-(37)에서 Δt 동안의 x 의 flux값 F 로 표현되었다. THINC법은 flux값 F 를 계산하는데 hyperbolic tangent 함수를 사용한다. 셀이 가지는 함수 C 의 값을 바탕으로 셀 내부에서 x 의 분포를 hyperbolic tangent 함수로 나타내고 Fig. 6와 같이 Lagrangian 접근으로 flux값을 계산한다. hyperbolic tangent 함수는 선형과 비선형적인 형상을 모두 구현 가능할 수 있고 직접연산에 적용될 수 있기 때문에 flux 값을 효율적으로 계산할 수 있다. 식 (36)-(37)에서 flux값 F 를 구하게 되면 다음단계의 함수 C 는 explicit하게 계산할 수 있기 때문에 각각의 셀이 가지는 유체의 특성을 파악하여 자유표면을 구현할 수 있다.

3. 결 과

3.1 정수압 문제

정수압(hydrostatic pressure) 문제의 조건과 해석결과는 Fig. 7과 같다. 정수압 문제에 대한 이론값은 식 (38)과 같다. 위쪽

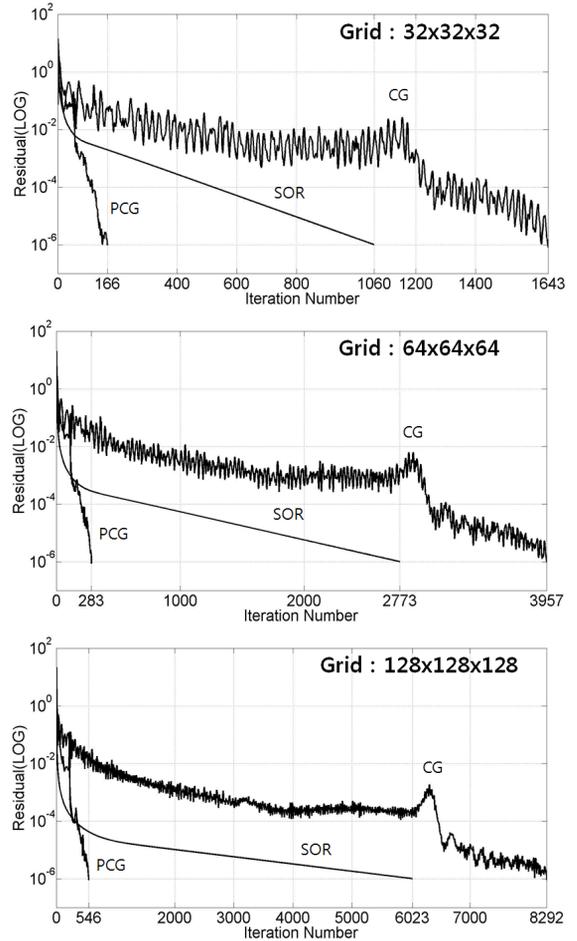


Fig. 8 Convergence histories of pressure Poisson equation in the hydrostatic pressure problem

경계조건은 대기압 값의 pressure outlet이고 나머지 경계조건은 벽(wall)으로 지정하였다.

$$\text{Hydrostatic pressure, } p = \rho gh \quad (38)$$

정수압 문제에 대한 압력 포아송 방정식의 수렴도는 Fig. 8과 같다. 여기서 tolerance 값은 10^{-6} 이다. Fig. 8을 보면 켈레구배(CG)법의 경우 오히려 SOR법 보다 수렴성이 좋지 않다. 이는 물과 공기 사이의 밀도차이로 인하여 압력 포아송 방정식으로 부터 유도된 선형방정식의 계수 행렬에서 불연속이 발생했기 때문이라고 판단된다. 반면, 예조건화된 켈레구배(PCG)법의 경우에는 높은 수렴성이 나타나 반복횟수가 증가함에 따라 residual 값이 급격하게 감소하는 것을 확인할 수 있다. 이는 예조건화가 자유표면문제에서 발생하는 불리함을 극복

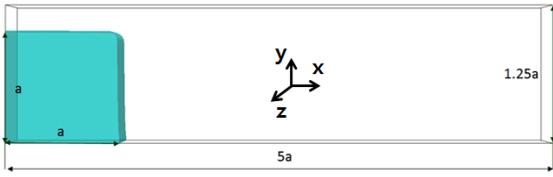


Fig. 9 Layout of the dam-breaking problem

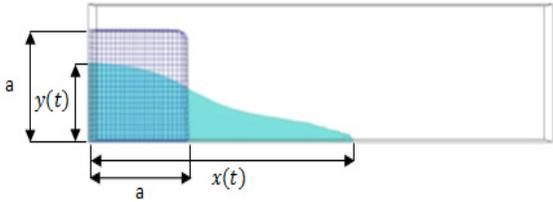


Fig. 10 Definition of $x(t)$, $y(t)$ and a . The initial configuration of the water column is indicated by the mesh lines



Fig. 11 Snapshot of the dam-breaking simulation at $T=3$ (top), $T=5$ (middle) and $T=7$ (bottom). Where T is nondimensional time expressed at equation (41)

한 것으로 판단된다. 이를 통해 컬레구배법을 자유표면 문제에 적용하기 위해서는 예조건화가 필수임을 알 수 있다.

3.2 댐 붕괴 문제

댐 붕괴(dam-breaking) 문제의 조건은 Fig. 9과 같다. 폭(z) 방향 길이는 $0.25a$ 이며 a 값은 0.05715 m이다. 색칠된 부분은 물이고 나머지는 공기이다. 경계조건은 정수압 문제와 동일하다.

결과를 검증하기 위해 결과 값을 검증된 시뮬레이션 값[3]과 실험 값[11]에 비교하였다. 비교변수로 다음과 같이 무차

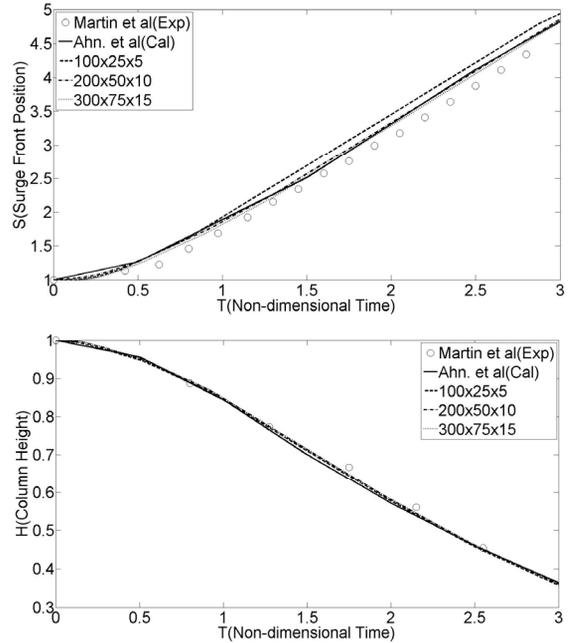


Fig. 12 Surge front position(up) and column height(down) comparison with experimental[11] and other CFD simulation[3] data

원화된 값을 사용했다.

$$\text{Surge front position, } S = \frac{x(t)}{a} \tag{39}$$

$$\text{Column height, } H = \frac{y(t)}{a} \tag{40}$$

$$\text{Non-dimensional time, } T = t\sqrt{\frac{g}{a}} \tag{41}$$

여기서 t 는 실제시간, g 는 중력가속도이다. $x(t)$, $y(t)$, a 에 대한 정의는 Fig. 10과 같다.

시간에 따른 시뮬레이션 결과는 Fig. 11과 같다. 댐 붕괴 문제에서 해석시 가장 어려운 부분은 붕괴된 물이 전진하여 벽과 충돌하는 부분이다. Fig. 11을 통해 붕괴된 물이 벽과 충돌한 이후에도 안정적으로 해석되는 것을 확인할 수 있다.

시뮬레이션 결과 비교는 Fig. 12와 같다. 실험값의 부재로 붕괴된 물이 벽과 충돌하기 전까지 결과만 비교되었다. surge front position의 경우 시간에 따른 변화율이 크기 때문에 셀의 개수가 적은 경우 오차가 크게 발생하였지만, 셀의 개수가 증가함에 따라 실험값으로 수렴하였다. column height의 경우 시간에 따른 변화율이 작기 때문에 셀의 개수에 크게 영향을

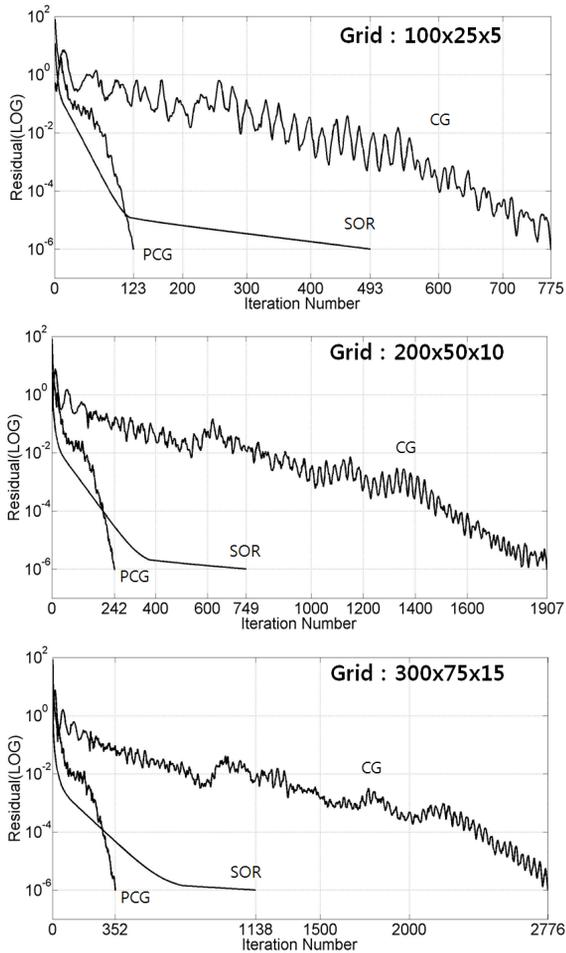


Fig. 13 Convergence history of pressure Poisson equation in the dam-breaking problem

받지 않고 오차가 거의 발생하지 않았다.

댐 붕괴 문제에 대한 압력 포아송 방정식의 수렴도는 Fig. 13과 같다. 여기서 tolerance 값은 10^{-6} 이다. 정수압 문제와 동일하게 켈레구배(CG)법이 SOR법보다 수렴성이 좋지 않음을 확인할 수 있다. 하지만 예조건화된 켈레구배(PCG)법은 매우 뛰어난 수렴성을 보여준다. 이를 통해 동적인 자유표면유동도 효율적으로 해석할 수 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 효율적인 비압축성 자유표면 유동해법을 제시하였다. 이와 더불어 해법의 결과 또한 매우 신뢰할 수 있음을 나타냈다. 해법의 효율성은 비압축성 유동해석에서 계산

시간의 가장 많은 비율을 차지하는 압력 포아송 방정식의 수렴도로 나타났다. 결과에 대한 신뢰성은 정수압과 댐 붕괴 문제를 통해 나타났다. 이에 대한 자세한 내용은 다음과 같다.

(1) 효율적인 CFD 시뮬레이션

압력 포아송 방정식으로부터 유도된 선형방정식을 푸는 과정에서의 수렴도를 비교해보면 다른 방법들과 달리 예조건화된 켈레구배(PCG)법의 경우 반복횟수가 증가함에 따라 residual 값이 급격하게 감소하는 것을 확인할 수 있다. 격자의 개수가 증가함에 따라 선형방정식을 풀기위해 1번 반복하는데 소요되는 시간은 기하급수적으로 늘어나기 때문에 반복횟수를 절반으로만 줄여도 그 효율성은 매우 뛰어나다. 타 방법에 비해 예조건화된 켈레구배법의 반복횟수가 절반이하로 줄어들기 때문에 향후 수많은 대형문제를 풀어야하는 입장에서 본 연구의 가치는 매우 크다고 판단된다. 이와 더불어 자유표면 유동해석에서 예조건화 과정이 필수임을 확인했다.

(2) 자유표면유동 시뮬레이션 결과의 신뢰성

정수압과 댐 붕괴와 같이 가장 기본적인 자유표면 문제를 통해 자유표면의 효과와 유동의 형상 변화를 본 연구의 시뮬레이션이 매우 정확히 표현하고 있음을 확인했다. 이를 통해 본 논문에서 제시한 자유표면 유동해법을 매우 신뢰할 수 있다고 판단된다.

후 기

본 연구는 한국연구재단(과제번호 : 2013-007924)의 지원을 받아 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

References

- [1] 1981, Hirt, C.W. and Nicholls, B.D., "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225.
- [2] 1988, Osher, S. and Sethian, J.A., "Front Propagating with Curvature Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton Jacobi Formulations," *Journal of Computational Physics*, Vol.79, pp.12-49.
- [3] 2009, Ahn, H.T., Shashkov, M. and Chiston, M.A., "The Moment-of-Fluid Method.," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol.25, pp.1009-1018.
- [4] 2012, Gibou, F. and Min, C.H., "Efficient symmetric positive definite second-order accurate monolithic solver for fluid/solid interactions," *Journal of Computational Physics*,

- Vol.231, pp.3246-3263.
- [5] 1995, Kelly, C.T., *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [6] 2003, Xiao, F. and Ikebata, A., "An Efficient Method for Capturing Free Boundaries in Multi-Fluid Simulation," *International Journal for Numerical Method in Fluids*, Vol.42, pp.187-210.
- [7] 2005, Xiao, F., Honma, Y. and Kono, K., "A Simple Algebraic Interface Capturing Scheme using Hyperbolic Tangent Function," *International Journal for Numerical Method in Fluids*, Vol.48, pp.1023-1040.
- [8] 2008, Yokoi, K., "A Numerical Method for Free-Surface Flows and Its Application to Droplet Impact on a Thin Liquid Layer," *Journal of Scientific Computing*, Vol.35, pp.372-396.
- [9] 2005, Xiao, F., Ikebata, A. and Hasegawa, T., "Numerical Simulations of Free-Interface Fluids by a Multi-Integrated Moment Method," *Computers and Structures*, Vol.83, pp.409-423.
- [10] 1985, Kim, J. and Moin, P., "Applications of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.59, pp.308-323.
- [11] 1952, Martin, J.C. and Moyce, W.J., "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Mathematical and Physical Sciences*, Vol.244, Issue.882, pp.312-324.