

A Comparison Study of Bayesian Methods for a Threshold Autoregressive Model with Regime-Switching

Taeyoung Roh^a · Seongil Jo^{a,1} · Ryounghwa Lee^a

^aDepartment of Statistics, Korea University

(Received October 2, 2014; Revised November 5, 2014; Accepted November 11, 2014)

Abstract

Autoregressive models are used to analyze an univariate time series data; however, these methods can be inappropriate when a structural break appears in a time series since they assume that a trend is consistent. Threshold autoregressive models (popular regime-switching models) have been proposed to address this problem. Recently, the models have been extended to two regime-switching models with delay parameter. We discuss two regime-switching threshold autoregressive models from a Bayesian point of view. For a Bayesian analysis, we consider a parametric threshold autoregressive model and a nonparametric threshold autoregressive model using Dirichlet process prior. The posterior distributions are derived and the posterior inferences is performed via Markov chain Monte Carlo method and based on two Bayesian threshold autoregressive models. We present a simulation study to compare the performance of the models. We also apply models to gross domestic product data of U.S.A and South Korea.

Keywords: GDP, threshold autoregressive model, parametric Bayesian method, nonparametric Bayesian method, Dirichlet process prior.

1. 서론

계량 경제학에서는 시계열 자료를 분석함에 있어서 경기변동을 확인하는 것은 자료를 분석할 때 중요한 요인으로 작용하게 된다. 경기변동상의 해당되는 위치에 따라 경제 자료 분석이 달라지며 경제 변수의 행태 또한 다르게 나타나므로 이러한 경기변동 각각의 해석을 달리해야 한다. 또한 이러한 경기변동의 과정이 모여 하나의 추세(trend)를 보이므로 추세를 어떻게 분석하느냐에 따라 해당 경제 변수의 미래 값을 정확히 예측할 수 있는지가 결정된다. Burns와 Mitchell (1946)은 경기변동에 대하여 두 가지 특징

Research of Taeyoung Roh was supported by by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Science, ICT & Future Planning(No. 2013R1A1A2074463). Research of Seongil Jo was supported by a Korea University Grant.

¹Corresponding author: Department of Statistics, Korea University, Anam-Dong, Seongbuk-Gu, Seoul 136-701, Korea. E-mail: joseongil@gmail.com

을 정의하였다. 하나는 경기변동의 기간동안 경제 변수들이 유사한 움직임(co-movement)을 보이는 것이고, 다른 하나는 경기변동성의 비대칭성(asymmetric)이다. 최근에는 경기변동에 관한 비대칭성이 심화됨에 따라 이와 관련된 연구가 지속적으로 이루어지고 있으며 컴퓨터를 이용한 방법론이 발전됨에 따라 더욱 가속화되고 있는 상황이다. Hamilton (1989)의 마르코프전환모형(Markov switching model) 또는 국면전환모형(regime switching model)은 비대칭 시계열 자료를 다루는 모형으로, 임의의 시계열 자료를 서로 다른 행태를 보이는 국면(Regime)으로 나누어 각각의 국면에 해당하는 모형을 구축한다. 이 모형의 가장 큰 장점 중 하나는 각각의 모형사이에 교체(switching)를 가능하게 함으로써 시계열 자료의 복잡한 동적 패턴(dynamic patterns)을 파악할 수 있다는 것이다. 최근 이러한 국면전환(regime-switching)모형에서 국면이 나뉘는 것부터 시작해 국면이 교체가 되는지를 확인하는 작업까지 폭 넓게 연구가 진행되고 있으며 더 나아가, 이러한 특성을 확인 이후 어떻게 예측할 수 있는지에 대해서 중점적으로 논의가 되고 있다. 이 중 본 논문에서는 국면전환 모형을 정의하는데 간단하고 가장 보편적으로 사용되는 임계 자기회귀(Threshold autoregressive model) 모형에 대해서 다루고자 한다.

Tong (1978)과 Tong과 Lim (1980)에 의해 처음 소개된 임계 자기회귀 모형은 숨겨진 요인(Level, Slope, Curvature 등)을 찾아 분석하는 일반적인 동적 요인 모형(dynamic factor model)과 달리, 모수(Parameter)의 변화를 직접적으로 실제 데이터와 연계한다는 점에서 이점을 갖는다. 이런 이점으로 인해 임계 자기회귀 모형은 여러 연구가 이루어졌다. Teräsvirta와 Anderson (1992)는 two regime logistic and exponential smooth transition autoregressive (STAR) models을 이용하여 OECD국가를 분석하였고, Potter (1995)에서는 two regime self exciting threshold autoregressive (SETAR) model를 이용하여 미국의 국민총생산(Gross National Product)을 추정하였다. 하지만 기존의 임계 자기회귀 모형은 복잡한 분석적인 작업과 통계적 추론을 하기 위한 수치적인 다중적분을 해야하는 번거로움이 있기 때문에 많은 연구자들은 알려지지 않은 모수(unknown parameters)를 추정하기 위해 베이저안 방법론(Bayesian methods)을 사용해왔다. McCulloch와 Tsay (1993a)는 사후확률 플롯(Posterior probability plot)을 통해서 임계 자기회귀 모형의 임계(Threshold) 변수를 찾기 위한 베이저안 방법론을 제시하였고, Chen과 Lee (1995)는 Geman과 Geman (1984)의 깁스 샘플러(Gibbs sampler)와 Metropolis 등 (1953)과 Hastings (1970)에 의해 제안된 메트로폴리스-헤이스팅스(Metropolis-Hastings) 알고리즘을 통한 베이저안 방법론을 제시하였다. 이뿐 아니라, Geweke과 Terui (1993), Potter (1995), Koop과 Potter (1999)등은 경기변동의 비대칭한 특성을 반영하기 위하여 베이저안 모형을 사용하였고, Koop과 Potter (1996)은 베이저안적 접근을 할 경우, 마르코프 전환모형과 선형 자기회귀 모형(Linear autoregressive model)은 유사하게 실질 국내총생산(Gross Domestic Product) (분기)를 설명할 수 있음을 보였다.

따라서, 본 논문에서는 베이저안 접근법을 사용한다. 특히, Hamilton (1989)의 모형을 기본 모형으로 하는 자기회귀 모형을 이용한다. 고려되는 모형은 일변량(univariate) 모형이며, 내생변수(endogenous variable)만을 고려한다. 또한 경기변동의 비대칭적 특성을 반영하기 위하여 기본적인 임계 자기회귀 모형과 트리거 모수에 대한 임계 자기회귀 모형의 확장에 대해 다룬다. 이때, 모형 적합시 모수적(parametric) 방법뿐만 아니라 비모수적(nonparametric) 방법을 사용하고 두 방법의 성능을 모의실험과 한국과 미국의 국내총생산 성장률 실제 자료를 통해 비교해 본다.

본 논문의 순서는 다음과 같다. 2절에서는 기본적인 자기회귀 모형에 대해 하고 3장에서 임계 자기회귀 모형과 베이저안 분석을 위한 사전분포에 대해 설명한다. 이후 4장에서는 모수적, 비모수적 베이저안 사전분포에 대한 사후분포 계산과정을 설명하고 5장에서 각 사전분포의 성능 비교를 위한 모의실험을 진행한다. 6장에서는 한국과 미국의 실질 국내총생산 성장률 데이터를 통해 실증자료분석을 진행하고 마지막으로 7장에서는 결론에 대해서 기술하였다.

2. 자기회귀 모형

본 절에서는 시계열 자료 분석(time series analysis)에 기초가 되는 자기회귀 모형(autoregressive model)에 대해 설명한다. 먼저 $\{y_t, t = 1, \dots, T\}$ 를 관측 가능한 연속형(continuous)의 일변량(univariate) 시계열 변수라 하자. 그 때 p 차 자기회귀 모형은 아래와 같이 정의된다.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad (2.1)$$

여기서 $\sigma^2 > 0$ 이다. 자기회귀 모형을 이용한 실제 자료 분석시 초기 값(initial conditions)은 복잡한 과정을 통해서 결정된다. 하지만 정태 회귀모형(static regression)에서는 동적 회귀모형(dynamic regression)과 달리 초기값을 고정된 값으로 사용해도 분석시 결과에 큰 차이가 없기 때문에 일반적으로 실제 자료를 분석하기 위해 $\mathbf{y} = (y_{p+1}, \dots, y_T)$ 를 종속변수로, y_1, \dots, y_p 를 고정된 초기 값으로 가정한다. 그때 이러한 가정으로 부터 모형 식 (2.1)을 선형회귀모형의 행렬 표기법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

여기서 $\epsilon = (\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_T)'$ 이고, \mathbf{X} 는 절편과 p 차 종속변수를 포함하는 $(T-p) \times (p+1)$ 행렬로써 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & y_p & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_{T-1} & \dots & y_{T-p} \end{pmatrix}.$$

따라서 위와 같은 p 차 자기 회귀모형은 단순한 정규 선형 회귀모형(normal linear regression model)으로 볼 수 있고 일반적인 회귀 모형에서의 방법을 이용하여 모수(parameter)를 추정할 수 있다. 그러나 만약 분석하고자 하는 시계열 자료에 분절(Structural Break)이 있는 상황에서 이를 고려하지 않은 단순한 p 차 자기 회귀모형으로 분석을 하게 되면 예측오차가 크게 발생하거나 모형의 적합도가 크게 떨어지는 등의 문제점이 발생하게 된다. 그러므로 시계열 자료 분석시 분절을 확인하는 작업이 중요하며 관련된 검정으로는 Chow (1960)에서 소개된 *Chow test*와 Sargan (1958)에서 소개된 *Sargent test*(혹은 *Hansen test*) 등이 있다.

3. 임계 자기회귀 모형

이 절에서는 자료에 분절이 존재할 때 보편적으로 사용되는 two-regime 임계 자기회귀 모형에 대해서 살펴보고, 베이저안 분석을 위한 모수적 사전분포와 디리슈레 과정 사전분포(Dirichlet process prior)에 대해 설명한다.

3.1. 모형 설정

기본적인 two-regime 임계 자기회귀 모형은 임계 모수(threshold parameter) $\tau \in (-\infty, \infty)$ 를 기준으로 두 개의 p 차 자기 회귀모형으로 이루어진 것으로써 Tong (1978)과 Tong과 Lim (1980)에 처음 소개되었다. 구체적인 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$y_t = (\beta_{10} + \beta_{11}y_{t-1} + \dots + \beta_{1p}y_{t-p})I(y_{t-1} \leq \tau) + (\beta_{20} + \beta_{21}y_{t-1} + \dots + \beta_{2p}y_{t-p})I(y_{t-1} > \tau) + \epsilon_t, \quad (3.1)$$

여기서, $I(\cdot)$ 는 0 또는 1의 값을 가지는 지시함수(indicator function)이고 오차항 $\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_T$ 는 평균 0, 분산 $\sigma^2 > 0$ 를 가지는 백색잡음 과정(white noise process)이다. 즉, $\epsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ 이다. 임계 자기회귀 모형도 2절에서 설명한 자기회귀모형과 같이 초기 조건으로 인해 생기는 복잡한 현상을 단순화하기 위하여 일반적으로 첫 번째 p 관측값을 초기 값으로 가정한다. 따라서 자기회귀모형처럼 다음과 같이 선형 회귀모형으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad (3.2)$$

위 식에서 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_j = (\beta_{10}, \dots, \beta_{1p})'$, $j = 1, 2$ 이고, $\text{MVN}(\mathbf{0}, \Sigma)$ 는 평균이 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)'$ 이고 공분산이 $\Sigma = \sigma^2 I$ 인 $(T-p)$ 차 다변량 정규분포(multivariate normal distribution)을 나타낸다. 그리고 \mathbf{X} 는 t 번째 행이 $[D_{t,\tau}, D_{t,\tau}y_{t-1}, \dots, D_{t,\tau}y_{t-p}, (1-D_{t,\tau}), (1-D_{t,\tau})y_{t-1}, \dots, (1-D_{t,\tau})y_{t-p}]$ 인 $(T-p) \times 2(p+1)$ 행렬이다. 이때 $D_{t,\tau}$ 는 $y_{t-1} \leq \tau$ 일 때는 1이고, $y_{t-1} > \tau$ 는 0인 가변수(dummy variable)이다. 즉, $D_{t,\tau} = I(y_{t-1} \leq \tau)$ 이다.

위에서 설명한 임계 자기회귀 모형은 종속변수의 첫 번째 시차에서만 국면이 전환된 것으로 가정하고 분석을 진행한다. 하지만 국면을 촉발하는 요인인 임계 트리거(threshold trigger)은 한 시차이상의 변수들 또는 다른 외생변수(exogenous variable)에 의해서 영향을 받을 수 있다. 예를 들면, 미국의 국내총생산 자료의 경우 이러한 특성이 나타난다 (Potter, 1995; Koop과 Potter, 1999). 이러한 특성을 반영하기 위해 최근에는 지연모수(delay parameter)와 외생변수를 포함한 모형으로 확장하여 연구가 이루어지고 있다. 구체적인 모형은 다음과 같다.

$$y_t = (\beta_{10} + \beta_{11}y_{t-1} + \dots + \beta_{1p}y_{t-p})I(z_{t-d} \leq \tau) + (\beta_{20} + \beta_{21}y_{t-1} + \dots + \beta_{2p}y_{t-p})I(z_{t-d} > \tau) + \epsilon_t, \quad (3.3)$$

여기서 d 는 지연모수를 나타내고, z_{t-d} 는 외생변수 혹은 $(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ 의 함수이다. 모형 식 (3.3)는 $D_{z,t,\tau} = I(z_{t-d} \leq \tau)$ 인 가변수를 가지고 식 (3.2)에서 정의된 일반적인 선형 회귀모형으로 표현할 수 있다. 본 논문에서는 외생변수 z_{t-d} 를 Koop 등 (2007)에서 정의된 것과 같이 $(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ 의 함수로 가정한다. 구체적인 함수형태는 아래와 같다.

$$z_{t-d} = \frac{\sum_{i=1}^d y_{t-i}}{d}.$$

이 식은 지난 d 시점까지의 평균이 국면 요인임을 의미한다.

3.2. 모수적 사전분포

모수적 사전분포로써 베이시안이 가장 먼저 고려하는 것은 유한차원(finite dimension)의 공액 사전분포(conjugate prior distribution)이다. 공액 사전분포는 베이시안 정리(Bayes' theorem)을 이용하여 구한 사후분포(posterior distribution)가 사전분포와 같은 분포족(family of distributions)에 속하는 분포를 의미한다 (Gelman 등, 2014). 유한 차원의 공액 사전분포가 가지는 가장 큰 장점은 사후분포가 알려진 형태의 분포로 계산이 가능하기 때문에 마코프 체인 몬테 카를로(Markov chain Monte Carlo)와 같은 복잡한 형태의 알고리즘 구현을 신경쓰지 않아도 된다. 본 논문에서는 3.1절에 정의된 임계 자기회귀모형의 계수와 분산에 대해 베이시안 선형모형에서 가장 보편적으로 사용되는 공액 사전분포인 정규-감마분포(normal-gamma distribution)를 사용한다. 구체적인 형태는 다음과 같다.

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \pi(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) \pi(\sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{N}(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\beta}_0, \sigma^2 Q_0) \text{Gamma}(\sigma^{-2}; \nu, s^2) \\
&= \mathbf{NG}(\boldsymbol{\beta}_0, Q_0, s^{-2}, \nu),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

여기서 $\boldsymbol{\beta}_0 \in \mathcal{R}^{2(p+1)}$, Q_0 는 양정치(positive definite) 행렬이고, ν 와 s^2 는 양의 실수값을 갖는다. 회귀 계수와 분산외에 지연모수 d 와 임계 모수 τ 에 대해서는 아래와 같이 무정보적 사전분포(noninformative prior distribution)을 사용한다 (Koop, Poirier, and Tobias, 2007).

$$\pi(\tau) \sim \mathbf{Unif}(a_\tau, b_\tau), \quad \Pr(d = i) = \frac{1}{p}, \quad i = 1, \dots, p, \tag{3.5}$$

여기서 $\mathbf{Unif}(a_\tau, b_\tau)$ 는 (a_τ, b_τ) 의 범위에서 정의된 균등분포(uniform distribution)을 나타낸다. 본 논문의 나머지 부분에서는 사전분포 식 (3.4)와 식 (3.5)를 사용한 모형을 BTAR으로 부르기로 한다.

3.3. 디리슈레 과정 사전분포

디리슈레 과정 사전분포(Dirichlet process prior)는 Ferguson (1973)에 의해 처음 제안된 무한차원(infinite dimension)의 사전분포로써 비모수 베이지안 사회에서 가장 널리 사용된다. 디리슈레 과정 사전분포는 Sethuraman (1994)의 stick-breaking 표현법으로 부터 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{h=1}^{\infty} \left[v_h \prod_{l < h} (1 - v_l) \right] \delta_{\theta_h}, \\
v_h &\stackrel{iid}{\sim} \mathbf{Beta}(1, M), \\
\theta_h &\stackrel{iid}{\sim} F_0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

여기서 F_0 는 $F(\cdot)$ 의 평균인 기저분포(base distribution)를 나타내고 $M > 0$ 는 정밀도 모수(precision parameter) 또는 총질량 모수(total mass parameter)를 나타낸다. 일반적으로 분포 F 가 디리슈레 과정을 따를 때 $F \sim \mathbf{DP}(M, F_0)$ 로 표현한다. 디리슈레 과정 사전분포가 보편화가 된 이유는 크게 두 가지로 볼 수 있다. 첫째는 사후분포가 디리슈레 과정이 되기 때문에 무한차원의 공액 사전분포이고 둘째는 확률변수(random variable)가 디리슈레 과정 분포를 따를 때 확률변수의 주변밀도함수(marginal distribution)가 Polya's urn sequence로 따르게 된다. 따라서 사후분포 계산을 위한 알고리즘 구현이 매우 쉽다는 것이 알려져 있다 (Hjort 등, 2010; Müller와 Rodríguez, 2013).

본 논문에서는 디리슈레 과정 사전분포의 확장된 형태인 종속 디리슈레 과정 사전분포(Dependent Dirichlet Processes)를 기반으로 한 비모수 베이지안 two-regime 임계 자기 회귀모형을 고려하고자 한다. MacEachern (1999, 2000)의 의해 제안된 종속 디리슈레 사전분포는 공변량(covariate) $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 에 종속된 랜덤 확률 측도(random probability measure)들의 집합위에 정의되는 사전분포로써 서로 독립인 2개의 확률 과정(stochastic processes), $\{v_h(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, h \geq 1\}$, $v_h(\mathbf{x}) \sim \mathbf{Beta}(1, M)$ 와 $\{\theta_h(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, h \geq 1\}$, $\theta_h(\mathbf{x}) \sim F_{0, \mathbf{x}}$ 를 이용하여 Sethuraman (1994)의 stick-breaking 표현법으로 부터 다음과 같이 정의된다.

$$F_{\mathbf{x}}(\cdot) = \sum_{h=1}^{\infty} w_h(\mathbf{x}) \delta_{\theta_h(\mathbf{x})}(\cdot), \quad w_h(\mathbf{x}) = v_h(\mathbf{x}) \prod_{l=1}^{h-1} [1 - v_l(\mathbf{x})], \tag{3.7}$$

여기서 M 은 양의 값을 가지는 정밀도 모수이고 $F_{0, \mathbf{x}}$ 는 기저 분포이다. 위에서 정의된 모형 식 (3.7)은 각 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 에 대한 주변 확률 측도가 디리슈레 과정을 따른다는 것이 알려져 있으며 (MacEachern;

1999, 2000), 즉, $F_{\mathbf{x}} \sim \text{DP}(M, F_{0,\mathbf{x}})$ 이다. 적절한 조건 하에서 연속성(continuity)이 보장되고 큰 받침(large support)을 가지게 된다 (Barrientos 등, 2012).

중속 디리슈레 사전분포(DDP) 중 가장 널리 사용되는 것은 “single- p ” DDP 또는 “common-weights” DDP로 불리는 사전분포로 가중치를 구성하는 확률 과정이 \mathbf{x} 에 의존하지 않도록 공통 가중치(common weights)를 사용하는 모형이다. 즉, $v_h(\mathbf{x}) = v_h$, $h = 1, 2, \dots$,을 사용한다. “common-weights” DDP모형의 가장 큰 장점은 사후 분포로부터의 표본 추출 방법이 기존 디리슈레 사전분포와 같이 매우 단순하고 parsimony한 특성을 갖는다는 것이다 (Di Lucca 등, 2013). 또한 모형의 자연스러운 해석이 가능하고 (Rodríguez와 ter Horst, 2008) 다음과 같이 일반적으로 널리 사용되는 디리슈레 과정 혼합모형(Dirichlet process mixture model)을 이용하여 \mathbf{x} 의 중속성은 유지되도록 표현할 수 있다.

$$y|\mathbf{x} \sim \int N(y|\theta(\mathbf{x}), \sigma^2) dF(\theta), \quad F \sim \text{DP}(M, F_{0,\mathbf{x}}). \quad (3.8)$$

본 논문에서는 “common-weights” DDP모형의 특별한 경우로써 $\theta_h(\mathbf{x})$ 에 대해 \mathbf{x} 의 요소들로부터 선형 결합을 적용한 모형을 고려한다. 구체적으로 고려하는 DDP모형은 De Iorio 등 (2009)에 소개된 선형 중속 DDP모형으로 반응시차가 $p(t-1, \dots, t-p)$ 인 벡터 $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) \in \mathcal{Y}$ 가 주어졌을 때 선형 회귀모형 식 (3.2)를 이용하여 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} y_t|\mathbf{X} &\stackrel{iid}{\sim} \int N(y_t|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) dF(\boldsymbol{\beta}), \\ F &= \sum_{h=1}^{\infty} w_h \delta_{\boldsymbol{\beta}_h^*}, \quad w_h = v_h \prod_{l=1}^{h-1} (1 - v_l), \quad v_h \sim \text{Beta}(1, M), \\ \boldsymbol{\beta}_h^* &\sim \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_0, Q_0), \quad \sigma^{-2} \sim \text{Gamma}(\nu, s^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

회귀계수와 분산외에 지연모수 d 와 임계 모수 τ 에 대해서는 식 (3.5)에서와 같이 무정보적 사전분포를 사용하고 $\boldsymbol{\beta}_h^*$ 의 초모수(hyperparameter) $(\boldsymbol{\beta}_0, Q_0)$ 와 정밀도 모수 M 는 다음과 같은 사전분포를 가정한다.

$$\boldsymbol{\beta}_0 \sim \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_{00}, Q_{00}), \quad Q_0^{-1} \sim \text{Wish}(\nu_{00}, W_{00}^{-1}), \quad M \sim \text{Gamma}(a_M, b_M), \quad (3.10)$$

여기서 $\boldsymbol{\beta}_{00} \in \mathcal{R}^{2(p+1)}$, Q_{00} 와 W_{00} 는 양정치 행렬이고, ν_{00}, a_M, b_M 는 양의 실수값을 갖는다. 그리고 $\text{Wish}(\nu_{00}, W_{00}^{-1})$ 는 평균이 $\nu_{00}W_{00}^{-1}$ 인 위샤프 분포(Wishart distribution)를 나타낸다. 본 논문의 나머지 부분에서는 비모수 임계 자기 회귀모형 식 (3.9)을 TAR-LDDP로 나타낸다.

4. 사후분포의 계산

이 절에서는 3.1절에서 설명한 임계 자기회귀 모형에 3.2절과 3.3절에서 소개된 모수적 사전분포와 디리슈레 사전분포에 대해 계층적 모형으로 표현하고 사후분포를 계산하는 알고리즘에 대해 설명한다. 그리고 각각의 사전분포를 적용한 모형으로부터 미래 관측값에 대한 사후 예측분포(posterior predictive distribution)를 계산하는 방법에 대해 설명한다.

4.1. BTAR의 사후분포 계산

3.2절에서 설명된 모수적 사전분포 식 (3.4)와 무정보적 사전분포 식 (3.5)를 이용한 p 차 베이지안 임계 자기 회귀모형 BTAR은 다음과 같이 계층적 모형(hierarchical model)으로 표현할 수 있고 ($[\cdot]$ 는 분

포를 나타낸다),

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \sigma^2] &\sim \text{MVN}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I), \\
 [\boldsymbol{\beta}|\sigma^2] &\sim \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_0, \sigma^2 Q_0), \\
 [\sigma^{-2}] &\sim \text{Gamma}(\nu, s^2), \\
 [\tau] &\sim \text{Unif}(a_\tau, b_\tau), \\
 \Pr(d=i) &= \frac{1}{p}, \quad i = 1, \dots, p,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

위의 계층적 모형으로 부터 모수들의 결합 사후분포(joint posterior distribution)는 아래와 주어진다.

$$\begin{aligned}
 [\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \tau, d|\mathbf{y}, \mathbf{X}] &\propto \text{MVN}(\mathbf{y}; \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\beta}_0, \sigma^2 Q_0) \text{Gamma}(\sigma^{-2}; \nu, s^2) \\
 &\times \text{Unif}(\tau; a_\tau, b_\tau) \text{Discrete}(d; p, \alpha),
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

여기서 $\alpha = (1/p, \dots, 1/p)'$ 이다. 위의 결합 사후 분포로 부터 사후표본(posterior sample)을 뽑기위한 알고리즘은 두 단계로 이루어 진다. 첫 번째 단계에서는 회귀계수 $\boldsymbol{\beta}$ 와 분산 σ^2 를 적분하여 임계 모수 τ 와 지연모수 d 의 주변분포(marginal distribution)를 구하고 그 분포로 부터 사후표본을 추출한다. 그 다음 두 번째 단계에서 가능한 모든 τ 와 d 를 고려하여 $\boldsymbol{\beta}$ 와 σ^2 의 주변 사후분포로 부터 표본을 추출한다. 구체적인 사후표본 추출 방법은 다음과 같다.

- (1) 먼저 임계 모수 τ 와 지연모수 d 를 추출하기 위해 $\boldsymbol{\beta}$ 와 σ^2 를 적분하여 τ 와 d 의 주변우도(marginal likelihood)를 다음과 같이 계산한다.

$$f(\mathbf{y}|\tau, d) = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}) (\nu s^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \pi^{\frac{T-p}{2}}} \left(\frac{\hat{Q}_0}{Q_0} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{\nu} \hat{s}^2]^{-\frac{\nu}{2}}, \tag{4.3}$$

여기서, $\hat{Q}_0 = (Q_0^{-1} + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \hat{Q}_0(Q_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ 이고, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$, $\hat{\nu} = \nu + T - p$,

$$\hat{s}^2 = \frac{\nu s^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)' \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{Q}_0 Q_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)}{\hat{\nu}}$$

이다. 그 다음으로 τ 를 $a_\tau = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{T^*} = b_\tau$ 로 잘게 나누고 모든 가능한 조합($\tau_i, d = j$), $i = 0, \dots, T^*, j = 1, \dots, p$ 에 대하여 주변 우도함수 식 (4.3)의 값을 계산한다. 그때 b 번째 사후 표본은 계산된 주변 우도함수 식 (4.3)의 값이 가장 큰 값으로 한다.

- (2) 첫 번째 단계에서 계산된 주변우도 함수 식 (4.3)에서 \mathbf{X} 는 τ 와 d 에 의존하기 때문에 τ 와 d 의 값마다 다른 값을 가진다. 따라서 $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2$ 의 사후분포를 구하기 위해 가능한 모든 τ 와 d 를 고려하여 아래와 같은 가중합을 이용해 계산한다.

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{T^*} \pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\tau = \tau_i, d = j, \mathbf{y}) \pi(\tau = \tau_i, d = j|\mathbf{y}),$$

여기서 $\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\tau = \tau_i, d = j, \mathbf{y})$ 는 사전분포와 같은 정규-감마 분포이다. 즉, $\text{NG}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0, \hat{Q}_0, \hat{\nu}, \hat{s}^2)$ 이다.

위에서 설명된 τ 의 표본 추출방법은 수치적으로 안정적(stable)이라는 것이 잘 알려져 있다 (Tang, 1998). 그러나 τ 가 가지는 범위에서 그리드(grid)의 갯수와 정해지는 그리드에 따라 민감하게 반응하

는 단점을 가지고 있다. 반면에 메트로폴리스-헤스팅스(Metropolis-Hastings)방법은 이러한 단점을 극복할 수 있다. 하지만 수렴이 느려지는 단점을 가지고 있다. 메트로폴리스-헤스팅스 방법은 아래와 주어진 세 단계를 반복적으로 실행하여 사후표본추출을 한다.

(1) 먼저 d 의 사후표본을 다음과 같이 주어진 분포로부터 추출한다.

$$\Pr(d = i | \tau, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y} | \tau, i)}{\sum_{j=1}^p f(\mathbf{y} | \tau, j)}, \quad i = 1, \dots, p.$$

(2) τ 를 추출하기 위해 우선 새로운 τ' 값을 $\text{Unif}(a_\tau, b_\tau)$ 에서 추출한다. 그 다음 추출된 τ' 를 이용하여 아래와 같이 합격률(acceptance rate)을 계산한다.

$$\pi_\tau = \min \left\{ 1, \frac{f(\mathbf{y} | \tau', d)}{f(\mathbf{y} | \tau, d)} \right\},$$

그때 τ 의 사후표본은 π_τ 의 확률로 새로운 값 τ' 를 선택하거나 $1 - \pi_\tau$ 의 확률로 기존의 τ 를 선택한다.

(3) 이전 두 단계에서 추출된 τ 와 d 를 가지고 다음의 조건부 사후분포인 정규-감마 분포로부터 β 와 σ^2 의 사후표본을 추출한다.

$$[\beta, \sigma^2 | \tau, d, \mathbf{y}] \sim \text{NG}(\hat{\beta}_0, \hat{Q}_0, \hat{\nu}, \hat{s}^2).$$

추출된 각 모수의 사후표본을 $(\beta^{(b)}, \sigma^{2(b)}, \tau^{(b)}, d^{(b)})$, $b = 1, \dots, B$ 라 하자. 그때 $T+1$ 시점에서 y_{T+1} 의 사후예측분포는 다음과 같이 몬테칼로 적분(Monte carlo integration)방법을 사용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(y_{T+1} | \mathbf{x}_{T+1}, \mathbf{y}) &= E [p(y_{T+1} | \mathbf{x}_{T+1}, \mathbf{y}, \beta, \sigma, \tau, d) | \mathbf{y}] \\ &\approx \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B p(y_{T+1} | \mathbf{x}_{T+1}^{(b)}, \mathbf{y}, \beta^{(b)}, \sigma^{2(b)}, \tau^{(b)}, d^{(b)}) \\ &= \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B p(y_{T+1} | \mathbf{x}_{T+1}^{(b)}, \beta^{(b)}, \sigma^{2(b)}, \tau^{(b)}, d^{(b)}), \\ &= \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \text{N}(y_{T+1}; \mathbf{x}_{T+1}^{(b)'} \beta^{(b)}, \sigma^{2(b)}), \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{x}_{T+1}^{(b)} = [D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}}, D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}} y_{p+1}, \dots, D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}} y_T, (1 - D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}}), (1 - D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}}) y_{p+1}, \dots, (1 - D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}}) y_T]'$ 이고 $D_{T+1, \tau^{(b)}, d^{(b)}} = I(z_{t-d^{(b)}} \leq \tau^{(b)})$ 이다.

4.2. TAR-LDDP의 사후분포 계산

이 절에서는 p 차 TAR-LDDP모형 식 (3.9)의 사후 분포로부터 표본을 추출하는 마코프 체인 몬테 칼로 알고리즘을 설명한다. 구체적으로는 Ishwaran과 James (2001)에서 제시된 블럭 깁스 샘플링(Blocked Gibbs sampling) 알고리즘을 사용한다. 블럭 깁스 샘플링을 이용한 표본 추출 방법의 기본적인 아이디어는 무한개의 구성요소로 이루어진 디리슈레 혼합모형을 처음 H 개 만큼의 구성요소를 이용하여 구성하는 것으로써 무한 차원의 모형을 유한 차원의 모형으로 단순화하기 때문에 사후 분포의 계산을 더 쉽고 빠르게 할 수 있다. 본 논문에서는 $H = 20$ 을 사용한다. 실제 자료분석에서 분석 결과는 H 의 값에 영향을 받지 않는 것을 확인하였다.

구체적인 알고리즘을 설명하기 위해 $\boldsymbol{\beta}^* = (\boldsymbol{\beta}_1^*, \dots, \boldsymbol{\beta}_H^*)'$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_H)'$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_T)$, $\Pr(s_t = h) = w_h$ 라 하고 \mathbf{x}_t 를 \mathbf{X} 의 t 번째 행이라 하자. 그때, TAR-LDDP모형 식 (3.9)은 다음과 같이 계층적 모형으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
[y_t | \mathbf{X}, s_t = h, \boldsymbol{\beta}_h^*, \sigma^2] &\stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}(\mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_h^*, \sigma^2), \quad t = p+1, \dots, T, \\
[s_t | \mathbf{v}] &\stackrel{iid}{\sim} \sum_{h=1}^H w_h \delta_h, \quad w_h = v_h \prod_{l < h} (1 - v_l), \\
[v_h | M] &\stackrel{iid}{\sim} \text{Beta}(1, M), \quad h = 1, \dots, H, \\
[M] &\sim \text{Gamma}(a_M, b_M), \\
[\boldsymbol{\beta}_h^* | \boldsymbol{\beta}_0, Q_0] &\stackrel{iid}{\sim} \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_0, Q_0), \quad h = 1, \dots, H, \\
[\boldsymbol{\beta}_0] &\sim \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_{00}, Q_{00}), \\
[Q_0^{-1}] &\sim \text{Wish}(\nu_{00}, W_{00}^{-1}), \\
[\sigma^{-2}] &\sim \text{Gamma}(\nu, s^2), \\
[\tau] &\sim \text{Unif}(a_\tau, b_\tau), \\
\Pr(d = i) &= \frac{1}{p}, \quad i = 1, \dots, p,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

여기서 $[\cdot]$ 는 분포를 나타낸다. 위에서 제시된 계층적 분포로부터 계산된 결합 사후 확률 분포는 아래와 같고

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\beta}^*, \mathbf{v}, \mathbf{s}, \sigma^2, \tau | Y_t, \mathbf{y}] &\propto \prod_{t=p+1}^T \mathbf{N}(y_t; \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_h^*, \sigma^2) \\
&\times \prod_{t=p+1}^T \left[\prod_{h=1}^H \left\{ v_h \prod_{l < h} (1 - v_l) \right\}^{I(s_t=h)} \right] \\
&\times \prod_{h=1}^H \text{Beta}(v_h; 1, M) \text{Gamma}(M; a_M, b_M) \\
&\times \prod_{h=1}^H \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_h^*; \boldsymbol{\beta}_0, Q_0) \text{Gamma}(\sigma^{-2}; \nu, s^2) \\
&\times \text{MVN}(\boldsymbol{\beta}_0; \boldsymbol{\beta}_{00}, Q_{00}) \text{Wish}(Q_0^{-1}; \nu_{00}, W_{00}^{-1}) \\
&\times \text{Unif}(\tau; a_\tau, b_\tau) \text{Discrete}(d; p, \alpha).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

블럭 깃스 샘플링 알고리즘은 위의 결합 사후 확률 분포로부터 계산된 다음의 완전 조건부 사후분포(full conditional distribution)들을 이용하여 반복적으로 사후표본을 추출한다.

(1) 각 $t = p+1, \dots, T$ 에 대하여 s_t 의 조건부 사후분포는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
[s_t | \text{others}] &\sim \sum_{h=1}^H p_h \delta_h(s_t), \\
p_h &= \frac{w_h \mathbf{N}(y_t; \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_h^*, \sigma^2)}{\sum_{l=1}^H w_l \mathbf{N}(y_t; \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_l^*, \sigma^2)},
\end{aligned}$$

여기서 $w_1 = v_1, w_h = v_h \prod_{l=1}^{h-1} (1 - v_l), h = 2, \dots, H$ 이고, $v_H = 1$ 이다.

(2) $v_h, h = 1, \dots, H - 1$ 의 조건부 사후 분포는 다음과 같다.

$$[v_h | \text{others}] \sim \text{Beta} \left(1 + \sum_{t=1}^T I(s_t = h), M + \sum_{t=1}^T I(s_t > h) \right).$$

(3) 정밀도 모수인 M 의 조건부 사후분포는 다음과 같이 주어진다.

$$[M | \text{others}] \sim \text{Gamma} \left(a_M + H - 1, b_M + \sum_{h=1}^{H-1} \log(1 - v_h) \right).$$

(4) 각 클래스(class) h 에 해당되는 모수 β_h^* 의 조건부 사후분포는 아래와 같이 다변량 정규분포이다.

$$[\beta_h^* | \text{others}] \sim \text{MVN} \left(\hat{\beta}_0, \hat{Q}_0 \right),$$

여기서 $\hat{Q}_0^{-1} = Q_0^{-1} + \sum_{t:s_t=h} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' / \sigma^2$ 이고 $\hat{\beta}_0 = \hat{Q}_0 (Q_0^{-1} \beta_0 + \sum_{t:s_t=h} \mathbf{x}_t y_t / \sigma^2)$ 이다.

(5) 초모수 β_0 에 대한 조건부 사후 분포는 아래와 같다.

$$[\beta_0 | \text{others}] \sim \text{MVN} \left(\hat{\beta}_{00}, \hat{Q}_{00} \right),$$

여기서 $\hat{Q}_{00}^{-1} = Q_{00}^{-1} + H Q_0^{-1}$ 이고 $\hat{\beta}_{00} = \hat{Q}_{00} (Q_{00}^{-1} \beta_{00} + Q_0^{-1} \sum_{h=1}^H \beta_h^*)$ 이다.

(6) Q_0^{-1} 에 대한 완전 조건부 사후 분포는 다음과 같이 위샤트 분포를 따른다.

$$[Q_0^{-1} | \text{others}] \sim \text{Wish} \left(\nu_{00} + H, \hat{W}_{00}^{-1} \right),$$

위 식에서 $\hat{W}_{00} = W_{00} + \sum_{h=1}^H (\beta_h^* - \beta_0)(\beta_h^* - \beta_0)'$ 이다.

(7) y_t 의 분산 σ^{-2} 의 완전 조건부 사후분포는 다음과 같이 사전분포와 같은 형태의 감마 분포를 따른다.

$$[\sigma^{-2} | \text{others}] \sim \text{Gamma} \left(\nu + \frac{T-p}{2}, s^2 + \sum_{t=p+1}^T \frac{R_t^2}{2} \right),$$

위 식에서 $R_t = y_t - \mathbf{x}_t' \beta_{s_t}^*$ 이다.

(8) 임계 모수 τ 의 조건부 사후 분포는 아래와 같이 알려지지 않은 형태로 주어진다.

$$[\tau | \text{others}] \propto \exp \left[- \sum_{t=p+1}^T \frac{\{(y_t - \mathbf{x}_t' \beta_{s_t}^*)\}^2}{2\sigma^2} \right].$$

따라서, τ 의 사후 표본을 추출하기 위해 모수적 방법과 같이 그리드 탐색 방법과 메트로폴리스-헤스팅스 방법 등 두 가지를 고려한다.

(8-a) (그리드 탐색) 임의의 큰 T^* 을 정하고 a_τ 와 b_τ 의 사이를 T^* 개 만큼 잘게 쪼갠다. 즉, $a_\tau = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{T^*} = b_\tau$. 그 때, 위의 조건부 사후 분포를 $\tau_i, i = 0, \dots, T^*$ 의 값을 이용하여 $w_i^* = [\tau_i | \text{others}]$ 을 계산한 후 $w_i^* / \sum_{j=1}^{T^*} w_j^*, i = 1, \dots, T^*$ 의 값이 제일 큰 것을 τ 의 표본으로 채택한다.

(8-b) (매트로폴리스-헤스팅스) 새로운 τ^* 를 사전분포인 $\mathbf{Unif}(a_\tau, b_\tau)$ 로 부터 뽑는다. 그 때, 확률 π_τ 을 이용하여 새로운 τ^* 을 표본으로 채택하거나 $1 - \pi_\tau$ 의 확률로 기존의 값을 채택한다. 여기서 확률 값 π_τ 는 다음과 같이 τ 의 조건부 사후 분포를 이용하여 계산된다.

$$\pi_\tau = \min \left\{ 1, \frac{[\tau^* \mid \text{others}]}{[\tau \mid \text{others}]} \right\}.$$

(9) 마지막으로 지연모수 d 의 완전 조건부 사후 분포는 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$\Pr(d = i \mid \text{others}) = \frac{\prod_{t=p+1}^T \mathbf{N}(y_t; \mathbf{x}'_{i,t} \boldsymbol{\beta}_{s_t}, \sigma^2)}{\sum_{l=1}^p \prod_{t=p+1}^T \mathbf{N}(y_t; \mathbf{x}'_{l,t} \boldsymbol{\beta}_{s_t}, \sigma^2)}, \quad i = 1, \dots, p,$$

위 식에서 $D_{i,t,\tau} = I(z_{t,i} \leq \tau)$ 이고 $\mathbf{x}_{i,t} = [D_{i,t,\tau}, D_{i,t,\tau}y_{t-1}, \dots, D_{i,t,\tau}y_{t-p}, (1 - D_{i,t,\tau}), (1 - D_{i,t,\tau})y_{t-1}, \dots, (1 - D_{i,t,\tau})y_{t-p}]$ 이다.

위에서 블럭 깃스 샘플링을 이용하여 추출한 사후표본 $(\boldsymbol{\beta}^{*(b)}, \sigma^{2(b)}, \tau^{(b)}, d^{(b)})$, $b = 1, \dots, B$ 으로 부터 $T + 1$ 시점에서 y_{T+1} 의 조건부 예측 사후 분포는 다음과 같이 계산이 가능하다.

$$p(y_{T+1} | \mathbf{x}_{T+1}, y) \approx \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \sum_{h=1}^H w_h^{(b)} \mathbf{N}(y_{T+1} | \mathbf{x}'_{T+1} \boldsymbol{\beta}_h^{*(b)}, \sigma^{2(b)}), \quad (4.6)$$

여기서 $\mathbf{x}_{T+1}^{(b)'}$ 는 $D_{T+1,\tau^{(b)},d^{(b)}} = I(z_{T+1-d^{(b)}} \leq \tau^{(b)})$ 를 이용하여 정의된다.

5. 모의 실험

본 절에서는 3.2절에서 제시된 모수적 사전분포를 사용한 BTAR모형과 3.3절의 디리슈레 사전분포를 사용한 TAR-LDDP모형의 성능을 비교하기 위해 모의 실험(Simulation) 연구를 진행하였다. 모의 실험에서는 빈도론적인(Frequentist) 방법을 이용한 임계 자기 회귀모형 (Tong, 1990) 방법도 비교 대상에 포함하였다. 빈도론적 방법은 R(<http://cran.r-project.org>)에서 제공하는 “TSA” 패키지를 이용하였다. 먼저 국면전환이 있는 시계열 자료를 생성하기 위하여 다음과 같은 모형을 설정하였다.

$$\begin{aligned} y_t &= 0.8 + 0.9y_{t-1} + \epsilon_t, & \text{if } y_{t-1} \leq -0.2, \\ y_t &= -0.7 - 0.8y_{t-1} + \epsilon_t, & \text{if } y_{t-1} > -0.2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

여기서 각 국면별 선형모형의 회귀계수는 정상성(stationality) 조건을 만족시키기 위해 절대값이 1보다 작은 값으로 설정하였고, 오차항은 평균이 0, 분산이 0.3²인 정규 분포를 따른다고 가정하였다. 즉, $\epsilon_t \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}(0, 0.3^2)$ 으로 설정하였다. 또한 지연모수는 1로 설정하여 임계 모수가 한 시점전에 의해서만 영향을 받는다고 가정하였다. 모의실험은 전체적으로 50번을 진행하였다. 각 모의실험에서는 초기값을 $y_1 = 1, y_2 = 1.5$ 로 설정하고 200개의 관측치를 생성하였다.

베이저안 방법론을 이용한 BTAR과 TAR-LDDP의 추론을 위해 임계 모수인 τ 에 대한 사전분포의 모수 a_τ 와 b_τ 는 각각 자료의 하위 15%, 상위 15%의 값으로 설정하였다. 이것은 국면전환모형을 추정함에 있어서 한 국면에 최소한 15%이상의 자료가 포함되어야 한다는 가정을 충족시키기 위함이다 (Koop, Poirier, and Tobias, 2007). 그 외의 다른 초모수(hyperparameter)들은 무정보적 사전분포를 표현하기 위해 분산을 크게 하는 값을 사용하였다. 사후표본은 처음 10,000번의 소각과정(burnin)과정을 거치고 다섯 번마다 하나의 표본을 추출하여 2,000개의 표본을 얻었다.

Table 5.1. 임계 모수와 적합 값의 제공근 평균제곱오차: G-S는 그리드 탐색 방법을 나타내고, M-H는 메트로 폴리스 헤스팅스 방법을 의미한다

| | parametric | | nonparametric | | FTAR |
|-------------------|------------|--------|---------------|---------------|--------|
| | G-S | M-H | G-S | M-H | |
| RMSE _y | 1.0733 | 1.4662 | 0.6758 | 0.6753 | 1.2781 |
| RMSE _τ | 0.0305 | 0.0358 | 0.0244 | 0.0167 | 0.0254 |

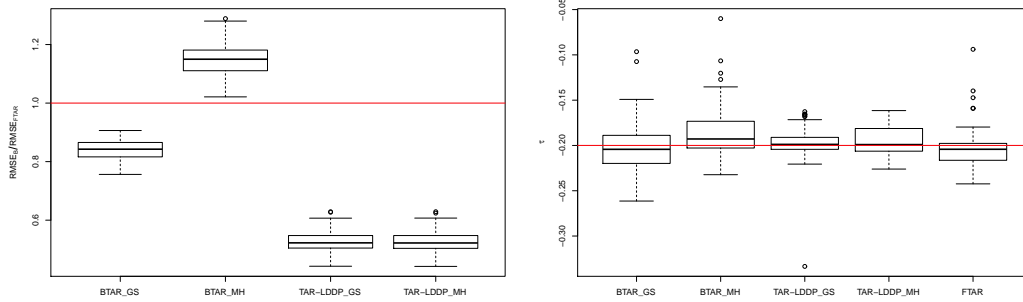


Figure 5.1. 베이지안 방법과 빈도론적 방법간 제공근 평균제곱오차의 비(왼쪽)와 각 방법에서 추정된 임계 모수 값(오른쪽)

각 방법의 성능을 평가하기 위해 제공근 평균제곱오차(root mean squared error)를 사용하였다. 제공근 평균제곱오차는 통계학에서 가장 널리 사용되는 측도로써 실제 값과 추정된 값의 차이를 직접적으로 측정한다. 본 논문에서는 다음의 식을 이용해 임계 모수와 적합 값(fitted value)의 제공근 평균제곱오차를 계산하였다. 또한 모형들의 예측력(forecasting)을 비교하기 위해 $T + 1$ 시점의 제공근 평균제곱오차도 계산하였다.

$$\text{RMSE}_{y,i} = \sqrt{\frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T (y_{it} - \hat{y}_{it})^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

$$\text{RMSE}_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau - \hat{\tau}_i)^2}, \quad (5.3)$$

여기서 N 은 모의실험 횟수이고, τ 와 y_{it} 는 각각 임계 모수와 관측치의 실제 값을 나타내고 $\hat{\tau}$ 와 \hat{y}_{it} 는 각 방법을 통해 추정한 값을 나타낸다.

Table 5.1는 각 방법에 대한 제공근 평균제곱오차 값을 나타내고 Figure 5.1의 왼쪽 패널은 베이지안 방법을 이용한 RMSE_B 값과 빈도론적 방법 FTAR을 이용한 RMSE_{FTAR} 값의 비율(ratio)에 대한 상자그림(box plot)을 나타내고 오른쪽 패널은 각 방법에 대해서 추정된 임계 모수 $\hat{\tau}$ 에 대한 상자그림을 나타낸다. Figure 5.1에서 왼쪽 패널에서의 빨간색 선은 비교되는 두 방법이 차이가 없음을 나타내고 오른쪽 패널의 빨간색 선은 실제 τ 값을 나타낸다. 비교대상이 되는 세 가지 방법중 y 의 적합 값과 추정된 임계 모수 τ 모두 비모수 베이지안 방법이 제일 좋은 결과를 보이고 있다. 그러나 모수적 베이지안 방법과 빈도론적 방법의 비교에서는 그리드 탐색을 통한 사후추출 방법에서는 모수적 베이지안 방법이 좋은 결과를 보였지만 메트로 폴리스 헤스팅스 방법을 이용한 사후표본추출 방법에서는 빈도론적 방법이 좋은 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

각 모형의 예측력에 대한 비교값은 Table 5.2와 Figure 5.2에 나타난다. $T + 1$ 시점의 예측값은 200개의

Table 5.2. 예측 값의 RMSE: G-S는 그리드 탐색 방법을 나타내고, M-H는 매트릭스 폴리스 헤스팅스 방법을 의미한다

| | parametric | | nonparametric | | FTAR |
|------------|------------|--------|---------------|---------------|--------|
| | G-S | M-H | G-S | M-H | |
| RMSE(yhat) | 0.6720 | 0.6938 | 0.4295 | 0.4342 | 0.7118 |

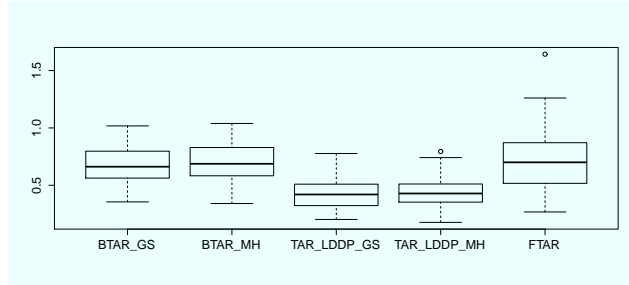


Figure 5.2. 각 방법에서 추정된 예측값의 RMSE값

Table 6.1. 국가별 국내 총 생산(로그차분)의 기초통계량

| 국가 | Mean | Median | Max. | Min. | Std. | Skewness | Kurtosis |
|----|--------|--------|---------|--------|--------|----------|----------|
| 한국 | 67.945 | 62.700 | 110.200 | 32.800 | 24.538 | 0.230 | 1.642 |
| 미국 | 56.679 | 59.195 | 116.451 | 4.273 | 36.742 | -0.022 | 1.590 |

관측치 중 마지막 30개의 값을 이용하여 계산하였다. 즉, 170개의 자료를 이용하여 171번째의 값을 예측하고, 172번째의 값을 예측하기 위하여 이전 시점 171개의 자료를 이용하는 방식으로 RMSE값을 계산하였다. 표와 그림에서 알 수 있듯이 예측력에 있어서도 비모수 베이지안 방법인 TAR-LDDP방법이 제일 좋은 결과를 보이고 있고 빈도론적 모형 FTAR과 모수적 베이지안 모형 BTAR은 비슷한 성능을 나타내고 있다. 또한 표본추출 방법에 따른 성능은 모수적 방법과 비모수적 방법 모두에서 비슷하였다.

6. 실증 자료 분석

본 절에서는 베이지안 모형인 BTAR, TAR-LDDP과 빈도론적인 방법인 FTAR를 이용하여 미국과 한국의 실질 국내 총 생산 분기 자료를 분석한다. 국내 총 생산은 거시경제변수 중에서도 한 국가의 경제 상황을 파악하거나 각 국가간의 경제 규모를 비교하는 등 여러 분석에 사용되는 중요한 지표이고 자료에 분절이 있다는 것이 알려져 있다. 따라서 이러한 분절을 고려한 임계 자기 회귀모형을 통해 국면을 두개로 나누어서 분석하여, 경기가 호황일때와 불황일때 각 국면의 추세와 예측값을 추정하고자 한다. 분석에서 사용한 자료는 1970년 1분기부터 2013년 3분기까지 계절조정 된 실질 국내 총 생산 자료이며, 미국의 경우 2009년도 국내 총 생산값을 100을 기준으로한 자료가 사용되었으며 한국의 경우는 2005년도 국내 총 생산값을 100을 기준으로한 자료가 사용하였다. Table 6.1는 각 국가별 국내 총 생산 자료의 기초통계량을 나타내고 Figure 6.1는 원자료와 로그 차분한 값의 시계열 그림을 나타낸다.

미국과 한국의 국내 총 생산 자료의 정상성(stationary)에 대한 분석은 Lee 등 (2014)에 설명되어 있고, 본 논문에서는 두 국가의 자료가 정상성을 가진다는 가정하에 분석을 실시하였다. 또한 충분한 시차를 주어 오차가 독립이라는 가정하였다. 즉, $[y_t|X_t, \beta, \sigma^2]$ 와 $[y_s|X_s, \beta, \sigma^2]$, $t \neq s$ 는 서로 독립을 가정하였다. 따라서 이러한 가정하에 각 행의 순서는 서로 독립이 되고, 이전시점 y_{t-1} 을 기준으로 자료를 오

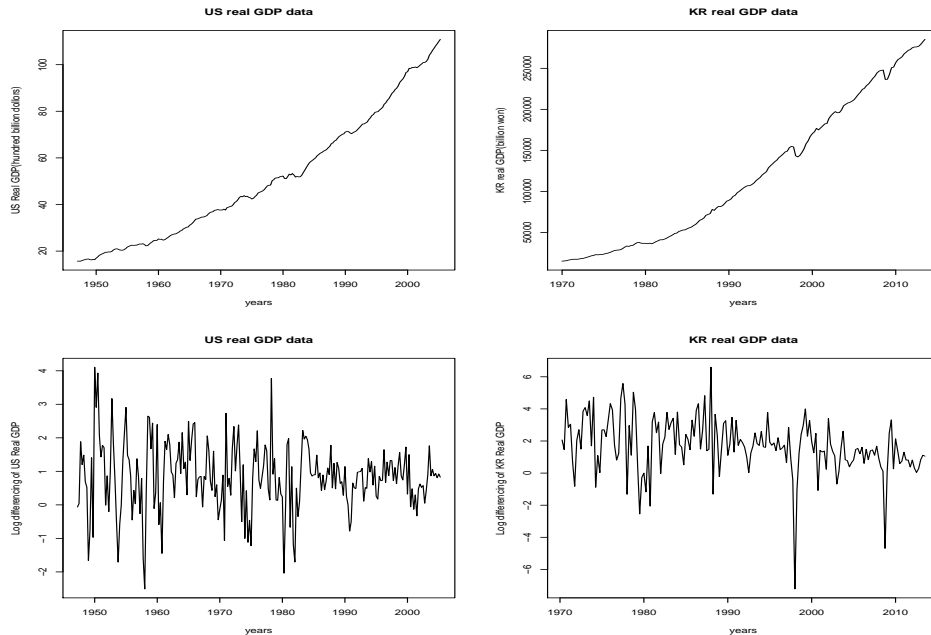


Figure 6.1. 미국과 한국의 GDP 자료의 시계열 그림 및 로그 차분한 자료의 시계열 그림

림차순으로 정렬 후 분석을 진행할 수 있다. 이것은 일종의 정태 회귀분석을 진행하는 것과 같으며, 서론에서 언급한 부분 선형 모형(piecewise linear model)에 대한 분석과 같다고 할 수 있다. 이러한 분석 방법의 장점은 정렬된 값을 통한 분석결과는 정렬 전후가 같음에 있다.

베이지안 모형의 사전분포에 대한 모수의 값을 모의실험에서 처럼 임계 모수의 초모수 a_τ, b_τ 에 대해 각 국가 별 국내 총 생산 자료의 하위 15%, 상위 15%의 자료 값을 설정하였고, 그 외의 다른 모수들에 대해서는 약한 정보적사전분포(weak informative prior)를 표현하기 위해 적당히 큰 분산을 가정하였다. 또한 각 국가에 대해 차수를 $p = 4$ 로 가정하였다. 이러한 가정은 국내 총 생산자료가 분기별 자료이기 때문에 t 시점의 국내 총 생산 성장률을 예측하기 위해서 각 분기별로 t 시점에 미치는 효과를 보기 위한 것이다.

Figure 6.2는 BTAR모형과 TAR-LDDP모형을 이용한 지연모수의 사후분포를 나타낸다. 그림을 통해 미국의 경우는 지난 2분기의 평균값이 임계 트리거이고 한국의 경우는 지난 4분기의 평균값이 임계 트리거가 됨을 알 수 있다. 빈도론적인 방법 FTAR 모형은 AIC(Akaike Information Criterion) 기준으로 d 를 선택하였고 두 자료 모수 $d = 1$ 일때 가장 작은 AIC값이 나왔다. 즉, FTAR모형의 경우 1분기 값이 임계 트리거로 판단하고 있다. Table 6.2는 모수적 방법론으로 추정한 계수의 추정치이다.

Table 6.3은 임계 모수 τ 의 추정량을 나타낸다. BTAR모형을 이용한 방법에서 미국의 경우는 τ 사후분포의 평균은 사후표본 추출 방법에 따라 0.164과 0.215이며, 한국의 경우는 1.364와 1.406으로 추정 되어 약간의 차이를 보였다. τ 추정 결과를 바탕으로 각 국가의 최근 4분기의 자료를 바탕으로 t 시점의 국면은 미국은 호황($0.875 > 0.164$)으로 나타나고 한국은 불황($0.821 < 1.363$)으로 나타남은 알 수 있다. 이때 몬테칼로 적분을 통해 사후예측분포를 계산하면 미국은 $t + 1$ 시점에 각각 0.786의 성장률을 기록할 것으로 예측되고, 한국은 $t + 1$ 시점에 0.631의 성장률을 기록할 것으로 예측된다. TAR-

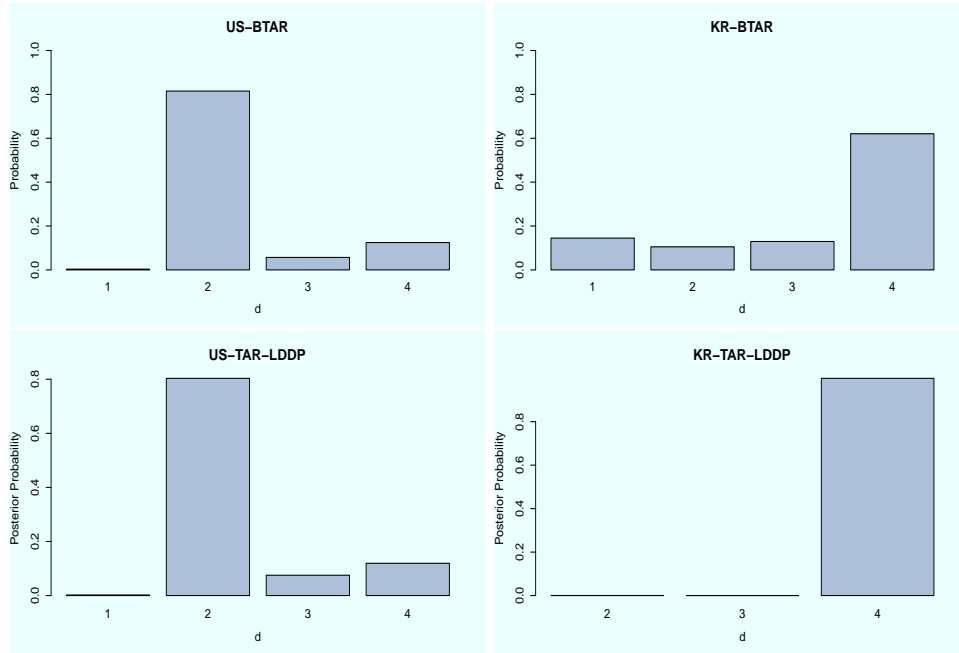


Figure 6.2. BTAR모형과 TAR-LDDP모형을 이용한 지연모수의 사후분포

Table 6.2. 모수적 방법론을 이용한 임계 자기 회귀모형의 회귀계수 추정량

| | US real GDP growth | | | KR real GDP growth | | |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| | G-S | M-H | FTAR | G-S | M-H | FTAR |
| β_{10} | 0.2548 (0.2257) | 0.6447 (0.4596) | 1.7310 (0.7950) | 0.7150 (0.2952) | 0.6932 (0.5738) | 0.9583 (0.2353) |
| β_{11} | 0.0802 (0.1743) | 0.1835 (0.0752) | 0.6089 (0.5589) | 0.2669 (0.1604) | 0.1598 (0.0547) | 0.3115 (0.0875) |
| β_{12} | -0.3302 (0.1956) | 0.1126 (0.0306) | -0.1033 (0.2517) | -0.0538 (0.1993) | 0.1845 (0.0468) | 0.1427 (0.0795) |
| β_{13} | -0.3400 (0.1673) | 0.0249 (0.0314) | -0.1453 (0.3215) | -0.2484 (0.1643) | -0.2327 (0.0832) | -0.0272 (0.0784) |
| β_{14} | -0.2638 (0.1656) | -0.3387 (0.1495) | 0.2470 (0.2470) | -0.0010 (0.2029) | 0.1733 (0.0505) | 0.0283 (0.0776) |
| β_{20} | 0.5556 (0.1585) | 0.4851 (0.2727) | 0.5592 (0.1153) | 1.2757 (0.5503) | 1.4160 (2.2217) | 13.3960 (3.3213) |
| β_{21} | 0.2533 (0.0871) | 0.3409 (0.1269) | 0.3206 (0.0785) | 0.1430 (0.1343) | 0.1802 (0.0630) | -2.0905 (0.5899) |
| β_{22} | 0.2699 (0.0801) | 0.2212 (0.0563) | 0.1921 (0.0693) | 0.1453 (0.1314) | 0.0697 (0.0205) | -0.5205 (0.2827) |
| β_{23} | -0.1100 (0.0755) | -0.1455 (0.0282) | -0.1576 (0.0675) | 0.0600 (0.1309) | 0.0632 (0.0158) | -0.9295 (0.3293) |
| β_{24} | -0.0833 (0.0072) | -0.0493 (0.0094) | -0.0257 (0.0660) | -0.08508 (0.1179) | -0.0971 (0.0202) | -0.7022 (0.2589) |

Table 6.3. 임계 모수 τ 에 대한 추정량

| τ | parametric | | nonparametric | | FTAR |
|--------|------------|-------|---------------|-------|--------|
| | G-S | M-H | G-S | M-H | |
| 미국 | 0.164 | 0.215 | 0.095 | 0.101 | -0.576 |
| 한국 | 1.364 | 1.406 | 3.265 | 3.263 | 3.803 |

Table 6.4. 적합값의 제공근 평균 제곱합

| RMSE | parametric | | nonparametric | | FTAR |
|------|------------|--------|---------------|---------------|--------|
| | G-S | M-H | G-S | M-H | |
| 미국 | 1.5944 | 1.0888 | 0.8831 | 0.8768 | 2.8938 |
| 한국 | 1.9471 | 1.7549 | 1.5119 | 1.5136 | 2.3380 |

Table 6.5. 예측값의 RMSE

| RMSE(yhat) | parametric | | nonparametric | | FTAR |
|------------|------------|--------|---------------|---------------|--------|
| | G-S | M-H | G-S | M-H | |
| 한국 | 0.5888 | 0.5064 | 0.5012 | 0.4794 | 0.7547 |
| 미국 | 0.3160 | 0.3104 | 0.1986 | 0.1993 | 0.5057 |

LDDP모형을 이용한 방법에서는 미국의 경우는 τ 사후평균으로 사후표본 추출 방법에 따라 0.094와 0.101이고 한국의 경우는 3.265와 3.263으로 나와 추출 방법에 따라 큰 차이가 없었다. 위 결과로 부터 최근 4분기의 자료를 바탕으로 t 시점의 미국의 국면은 호황 ($0.8745 > 0.09455$)임을 알 수 있고 한국의 경우에는 τ 사후평균이 3.265가 나왔기 때문에 최근 4분기의 자료를 바탕으로 t 시점의 국면은 불황 ($0.8214 < 3.265$)임을 알 수 있다.

한국과 미국의 데이터를 통해 계산된 적합값과 예측값의 제공근 평균 제곱합이 Table 6.4과 Table 6.5에 각각 제시되어있고 예측값과 신뢰구간(credible interval)은 Figure 6.3에 제시되어 있다. 예측은 가장 최근 10년의 자료를 이용하여 분석하였다. 이것으로 부터 모수적인 방법보다는 비모수적 베이저안 방법이 예측에 있어서도 성능이 좋다는 것을 알 수 있다.

7. 결론 및 논의

본 논문에서는 지연모수를 포함한 two-regime 임계 자기 회귀모형을 살펴보았다. 특히, 베이저안 임계 자기 회귀모형으로 공액 사전분포를 사용한 모수적인 모형과 디리슈레 과정 사전분포를 이용한 비모수 모형을 고려하였고 모의실험 자료와 미국과 한국의 국내 총 생산 실질 자료 분석을 통해 두 모형의 성능을 빈도론적 방법을 사용하는 모형과 비교하였다. 그 결과 제공근 평균제곱합의 기준으로 비모수 베이저안 모형이 모수적 베이저안 모형과 빈도론적 모형에 비해 좋은 성능을 나타내는 것을 알 수 있었다.

임계 자기 회귀모형에서 두 국면을 나누는 임계 모수 τ 는 국내 총 생산 성장률(국내 총 생산 자료의 변동성)을 평균이상의 국면(호황)과 평균이하의 국면(불황)을 나누어주는 기준이 되는 값이다. 즉, τ 값이 높다는 것은 국가의 국내 총 생산 변동성이 크다는 것을 의미하고, τ 값이 0에 가까울수록 국내 총 생산의 변동성이 작음을 의미한다. 일반적으로 선진국가에 비해서 신흥국가의 국내 총 생산 성장률의 변동성이 큰 것으로 알려져 있다. 본 논문에서 제시한 방법을 통해 예측한 τ 값을 살펴보면 미국에 비해 한국의 τ 값이 더 크게 추정됨을 알 수 있었다. 즉, 한국이 미국에 비해서 국내 총 생산의 변동성이 더 큰 것을 알 수 있다. 또한 최근 자료의 사후예측분포를 통해 미국은 호황국면에 있음을 알 수 있었고 한국은 불황국면에 있음을 알 수 있었다.

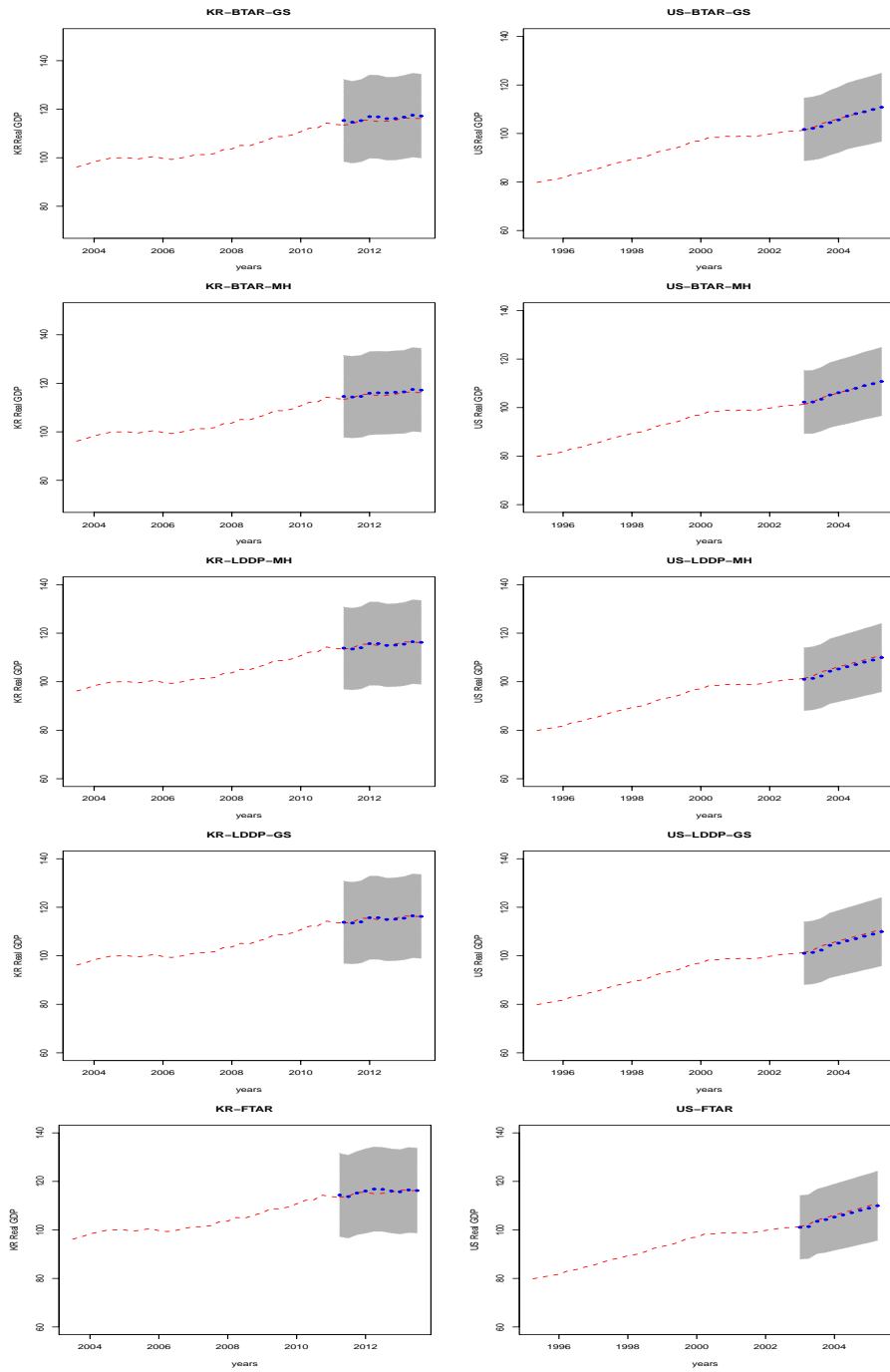


Figure 6.3. 예측값과 신뢰구간

일반적으로 호황에서 불황으로 국면이 바뀔 것이라 예상되는 경우, 정부와 통화당국은 확장적 정책을 시

행하게 된다. 정부의 경우 조세를 낮추어 가처분소득을 증가시킴으로써 소비를 촉진할 수 있으며, 통화당국의 경우는 단기 금리의 변화를 통해 일반적으로 경기 부양을 이끌게 된다. 반면에 불황에서 호황으로 넘어가는 경우는 위와 정반대의 상황을 예상해 볼 수 있다. 즉, 경기 부양이 적절히 이루어지는 시점을 추정하여 이자율을 상승 시켜 정책을 선제적으로 시행 할 수 있게 된다. 그 외에 호황에서 호황으로, 불황에서 불황으로 국면이 교체 되지 않는 경우는 t 시점 뿐아니라 몇 기 후의 예측치들을 파악하여 현 정책을 유지하거나 예측치들에 따른 정책을 시행하게 된다. 따라서 본 논문에서 제시한 결과들을 통해서 각 국면들의 교체 여부 및 예측된 국면들의 예측분포를 통한 예측값들을 알 수 있으며, 정부와 통화당국은 정책을 선제적으로 시행 할 수 있을 것이다. 더 나아가 마코프 스위칭(Markov Switching)을 통해 잠재변수(latent variable) 인 τ 의 전이행렬(transition matrix)을 추정함으로써 즉, 각 국면의 지속 기간 및 호황에서 불황, 불황에서 호황으로 이동하는 확률값들을 예측함으로써, 각 국가별 기초경제여건이 얼마나 근본적(fundamental)인지 등에 대해서 파악할 수 있을 것이다.

본 논문에서 다루고 있는 일변량 모형은 경기변동의 두 가지 특징 중 하나인 경제 변수들이 유사한 움직임에 대한 설명을 하지 못하는 단점을 가지고 있다. 최근 이것을 해결하기 위해 단순한 자기회귀모형이 아닌 벡터자기회귀모형(vector autoregressive model)으로 확장된 임계 벡터자기회귀모형(threshold vector autoregressive model)이 다수 다루지고 있으며, 향후 본 논문의 추가적인 논의사항으로 다루어질 수 있는 부분이다. 즉, 붐(boom), 위기(crisis) 시기에 연관된 지수를 함께 보면 경기변동의 양상을 더 확실하게 확인할 수 있을 것이다. 또한 현재 다루고 있는 자기회귀모형 대신 이동평균(moving average)을 포함한 자기회귀이동평균모형(autoregressive moving-averaging model)을 통한 TARMA모형으로의 확장과 내생변수 뿐만 아니라 외생변수 까지 포함된 TARMAX모형으로 확장하여 모형의 설명 폭을 넓히는 작업도 가능할 것이다.

References

- Barrientos, A. F., Jara, A. and Quintana, F. A. (2012). On the support of MacEachern's dependent Dirichlet processes and extensions, *Bayesian Analysis*, **7**, 277–309.
- Burns, A. and Mitchell, W. (1946). *Measuring Business Cycles*, New York: NBER.
- Chen, C. W. S. and Lee, J. C. (1995). Bayesian inference of threshold autoregressive models, *J. Time Ser. Anal.*, **16**, 483–492.
- Chow, G. C. (1960). Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions, *Econometrica*, **28**, 591–605.
- De I, M., Johnson, W. O., Müller, P. and Rosner, G. L. (2009). Bayesian nonparametric nonproportional hazards survival modeling, *Biometrics*, **65**, 762–771.
- Di Lucca, M, A., Guglielmi, A., Müller, P. and Quintana, F. A. (2013). A Simple class of Bayesian nonparametric autoregression models, *Bayesian Analysis*, **8**, 63–88.
- Ferguson, T. S. (1973). A Bayesian analysis of some nonparametric problems, *Annals of Statistics*, **1**, 209–230.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A. and Rubin, D. B. (2014). *Bayesian Data Analysis, Third Edition*, CRC press, New York.
- Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, 721–741.
- Geweke, J. F. and Terui, N. (1993). Bayesian threshold autoregressive models for nonlinear time series, *Journal of Time Series Analysis*, **14**, 441–454.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica*, **57**, 357–384.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, **57**, 97–109.

- Hjort, N. L., Holmes, C., Müller, P. and Walker, S. G. (2010). *Bayesian nonparametrics*, Cambridge University Press, New York.
- Ishwaran, H. and James, L. F. (2001). Gibbs sampling methods for stick-breaking priors, *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 161–173.
- Koop, G., Pesaran, M. H. and Potter, S. (1996). Impulse response analysis in nonlinear multivariate models, *Journal of Econometrics*, **74**, 119–147.
- Koop, G. and Potter, S. M. (1999). Dynamic asymmetries in US unemployment, *Journal of Business and Economic Statistics*, **17**, 298–312.
- Koop, G., Poirier, D. J. and Tobias, J. L. (2007). *Bayesian Econometric Methods*, Cambridge University Press, New York.
- Lee, R. H., Choi, T. R., No, T. Y. and Jo, S. I. (2014). Regime switching research of GDP for Korea and the United States using Bayesian analysis, *Proceeding of Korean Data Analysis Society*, April 25–26, 221–226.
- MacEachern, S. N. (1999). Dependent nonparametric process, In *Proceedings of the American Statistical Association, Section on Bayesian Statistical Science*, 50–55.
- MacEachern, S. N. (2000). Dependent Dirichlet processes, *Technical Paper*, Department of Statistics, Ohio State University.
- McCulloch, R. E. and Tsay, R. S. (1993a). *Bayesian Analysis of Threshold Autoregressive Processes with a Random Number of Regimes*, Computing Science and Statistics Proc. 25th Symp. Interface. Fairfax Station, VA: Interface Foundation of North America, 253–262.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines, *The Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087–1092.
- Müller, P. and Rodríguez, A. (2013). *Nonparametric Bayesian inference*, NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Volume 9, USA.
- Potter, S. M. (1995). A nonlinear approach to US GNP, *Journal of Applied Econometrics*, **10**, 109–126.
- Rodríguez, A. and ter Horst, E. (2008). Bayesian dynamic density estimation, *Bayesian Analysis*, **3**, 339–365.
- Sargan, J. D. (1958). The estimation of economic relationships using instrumental variables, *Econometrica*, **26**, 397–415.
- Sethuraman, J. (1994). A constructive definition of Dirichlet priors, *Statistica Sinica*, **4**, 639–650.
- Tang, M. A. (1998). *Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions*, Springer, New-York.
- Terasvirta, T. and Anderson, H. M. (1992). Characterizing nonlinearities in business cycle using smooth transition autoregressive models, *Journal of Applied Econometrics*, **7**, S119–S136.
- Tong, H. (1978). *On A Threshold Model*, In: Chen, C. H., ed. *Pattern Recognition and Signal Processing*, Amsterdam: Sijthoff and Noordhoff, 101–141.
- Tong, H. and Lim, K. S. (1980). Threshold autoregressions, limit cycles, and data. *J. Roy. Statist. Soc.*, **42**, 245–292.
- Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford University Press, Oxford.

국면전환 임계 자기회귀 분석을 위한 베이지안 방법 비교연구

노태영^a · 조성일^{a,1} · 이령화^a

^a고려대학교 통계학과

(2014년 10월 2일 접수, 2014년 11월 5일 수정, 2014년 11월 11일 채택)

요약

자기회귀 모형(autoregressive model)은 일변량(univariate) 시계열자료의 분석에서 널리 사용되는 방법 중 하나이다. 그러나 이 방법은 자료에 일정한 추세가 있다고 가정하기 때문에 자료에 분절(structural break)이 존재할 때 적절하지 않을 수 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법으로 국면전환(regime-switching) 모형인 임계자기회귀 모형(threshold autoregressive model)이 제안되었는데 최근 지연 모수(delay parameter)를 포함한 이 국면전환(two regime-switching) 모형으로 확장되어 많은 연구가 활발히 진행되고 있다. 본 논문에서는 이 국면전환 임계자기회귀 모형을 베이지안(Bayesian) 관점에서 살펴본다. 베이지안 분석을 위해 모수적 임계자기 회귀 모형 뿐만 아니라 디리슈레 과정(Dirichlet Process) 사전분포를 이용하는 비모수적 임계자기 회귀 모형을 고려하도록 한다. 두 가지 베이지안 임계자기 회귀 모형을 바탕으로 사후분포를 유도하고 마코프 체인 몬테 카를로(Markov chain Monte Carlo) 방법을 통해 사후추론을 실시한다. 모형 간의 성능을 비교하기 위해 모의실험을 통한 자료 분석을 고려하고, 더 나아가 한국과 미국의 국내 총생산(Gross Domestic Product)에 대한 실증적 자료 분석을 실시한다.

주요용어: GDP, 자기회귀 모형, 임계 자기회귀 모형, 국면전환, 베이지안 방법.

노태영의 연구는 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NO. 2013R1A1A2074463). 조성일의 연구는 고려대학교에서 지원된 연구비로 수행되었음.

¹교신저자: (136-701) 서울특별시 성북구 안암로 145, 고려대학교 통계학과. E-mail: joseongil@gmail.com