

# Efficient Bayesian Inference on Asymmetric Jump-Diffusion Models

Taeyoung Park<sup>a,1</sup> · Youngeun Lee<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Applied Statistics, Yonsei University

(Received October 6, 2014; Revised October 24, 2014; Accepted October 30, 2014)

---

## Abstract

Asset pricing models that account for asymmetric volatility in asset prices have been recently proposed. This article presents an efficient Bayesian method to analyze asset-pricing models. The method is developed by devising a partially collapsed Gibbs sampler that capitalizes on the functional incompatibility of conditional distributions without complicating the updates of model components. The proposed method is illustrated using simulated data and applied to daily S&P 500 data observed from September 1980 to August 2014.

Keywords: Gibbs sampler, Markov chain Monte Carlo, Pareto-Beta jump diffusion, partial collapse, Wiener process.

---

## 1. 서론

지난 20여년간 마르코프 연쇄 몬테카를로(Markov chain Monte Carlo; MCMC) 방법은 자료 분석 방법의 발전에 혁신을 가져왔다. 이미 정형화된 모형과 방법을 사용하는 대신 MCMC 방법을 이용한 모의실험을 통해 자료가 발생하는 복잡한 과정을 설명할 수 있는 응용모형을 개발하고 이를 쉽게 분석하는 것이 가능해졌기 때문이다. 특히 최근 컴퓨터 성능의 급격한 향상으로 인해 예전에는 불가능하던 모의실험이 가능해짐에 따라 MCMC 방법을 통한 베이지안 추론 방법이 점차 각광을 받고 있고 비약적인 발전을 하고 있다. 즉, 자연과학, 생물과학, 사회과학, 물리학, 의학 및 공학 등의 다양한 분야에 널리 퍼져있는 자료발생 구조의 복잡성을 직접적으로 나타내는 응용모형을 쉽게 분석할 수 있는 능력으로 인해 베이지안 MCMC 방법이 많은 분야에서 폭발적인 인기를 얻게 된 것이다. 그러나 현실적이고 복잡한 모형의 추론이 수월함에도 불구하고, 일반적인 MCMC 방법인 깁스 샘플러(Gibbs sampler)나 메트로폴리스-헤스팅즈(Metropolis-Hastings; MH) 방법이 모형 요소들 간의 강한 사후 상관성으로 인한 비효율성의 문제를 해결할 수 없다는 것은 사실이다. 특히 MH 방법의 제안분포는 다봉(multimodal) 분포나 모형 요소들 간에 강한 사후 상관성을 보이는 목표분포를 잘 다루지 못해 비효율적일 수 있다는 것이 알려져 있다 (van Dyk와 Park, 2011).

강한 사후 상관성으로 인한 일반적인 MCMC 방법의 비효율성을 해결하기 위해서 최근까지 효율적인 MCMC 방법의 개발을 위한 많은 연구가 진행되었다. 깁스 샘플러의 경우 블록화 또는 그룹화 (Liu 등, 1994), 내재화 (van Dyk, 2000), 붕괴 또는 소외화 (Liu, 1994, Meng과 van Dyk, 1999), 보조변

---

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Applied Statistics, Yonsei University, 50 Yonsei-Ro, Seodaemun-Gu, Seoul 120-749, Korea. E-mail: [tpark@yonsei.ac.kr](mailto:tpark@yonsei.ac.kr)

수의 사용 (Besag과 Green, 1993), 특정한 모수변환 (Gelfand 등, 1995, Yu와 Meng, 2011), 모수확장 (Liu와 Wu, 1999), 부분붕괴 (van Dyk과 Park, 2008), 잔차확장 (Xu 등, 2013) 등의 방법들이 수렴속도의 향상을 위해 개발되었다. MH 샘플러의 경우 무작위 행보 제안분포(random walk proposal distribution)의 최적화 척도 (Roberts등, 1997; Roberts and Rosenthal, 2001), 알고리즘의 진행에 따른 조율모수의 갱신 (Roberts와 Rosenthal, 2007), 알고리즘의 경로표본에 따른 조정 (van Dyk과 Park, 2011) 등이 마르코프 연쇄의 빠른 혼합을 위해 개발되었다. 동일한 전략들은 깁스 샘플러 내에 MH를 포함하고 한 번에 하나의 요소를 갱신하는 보다 일반적인 형태의 MCMC 방법인 MH-within-Gibbs 샘플러에 사용되었다 (van Dyk과 Park, 2011; Park 등, 2012b).

본 논문에서는 비대칭적 점프확산 모형의 효율적인 베이지안 추론을 위해 부분붕괴(van Dyk과 Park, 2008)를 유도하고, 일반적인 MCMC 방법인 깁스 샘플러와 비교 평가할 것이다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 부분붕괴 기법을 소개하고, 3절에서는 비대칭적 점프확산 모형인 파레토-베타(Pareto-Beta) 점프확산 모형의 효율적인 베이지안 추론과정을 설명하며, 4절에서는 본 논문에서 제안된 효율적인 베이지안 방법을 검증하기 위해 모의실험을 실시한다. 5절에서는 S&P 500의 실제 자료에 본 논문에서 제안된 효율적인 베이지안 방법을 적용하고, 6절에서는 결론을 맺는다.

## 2. 부분붕괴 기법

일반적인 MCMC 방법의 때때로 느린 수렴속도의 문제를 해결하기 위해 개발된 대부분의 전략은 MCMC 방법을 구성하는 조건부 분포들이 함수적으로 호환적인 경우에 국한되었다. 즉, MCMC 방법을 구성하는 모든 조건부 분포들은 동일한 목표 결합분포로부터 유도된다는 전제를 가지고 있는 것이다. 이에 반해 최근 개발된 부분붕괴 기법(van Dyk과 Park, 2008; Park와 van Dyk, 2009)은 조건부 분포들이 동일한 목표 결합 분포의 서로 다른 주변분포로부터 유도되는 것을 허용함으로써 MCMC 방법을 구성하는 조건부 분포들이 서로 비호환적인 경우로 일반화하였다. 함수적으로 비호환적인 조건부 분포들로 형성되는 마르코프 연쇄의 수렴속도는 조건부 분포들이 함수적으로 호환적인 경우에 비해 향상되는 것이 기대되나, 마르코프 연쇄의 정상분포가 목표 결합분포와 같아지기 위해서는 특별한 주의가 요구된다. 이러한 부분붕괴 기법의 잠재적인 이점과 위험한 점을 예제를 통해 살펴보자.

간단한 예로서 다음과 같은 혼합효과모형을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} Y &= \theta + Z + \epsilon, \\ Z &\sim N(0, \sigma^2), \\ \epsilon &\sim N(0, 1), \end{aligned}$$

여기서  $\theta$ 는 고정효과를 나타내고,  $Z$ 는 임의효과를 나타내며,  $\sigma^2$ 은 상수라고 가정하자. 이러한 혼합효과모형을 추론하기 위해서,  $\theta$ 에 대한 사전분포를  $p(\theta) \propto 1$ 로 놓고, 목표 결합분포인  $p(Z, \theta|Y)$ 로부터 다음과 같은 일반적인 MCMC 방법을 구성할 수 있다.

1단계:  $Z^{(t+1)} \sim p(Z|\theta^{(t)}, Y)$ , 여기서 (샘플러 1)

$$Z|\theta, Y \sim N\left(\frac{Y - \theta}{1 + 1/\sigma^2}, \frac{1}{1 + 1/\sigma^2}\right),$$

2단계:  $\theta^{(t+1)} \sim p(\theta|Z^{(t+1)}, Y)$ , 여기서

$$\theta(Z, Y) \sim N(Y - Z, 1).$$

샘플러 1의 수렴속도는  $\sigma^2$ 의 크기에 좌우된다는 점에 주목하자. 특히, 이와 같이 두 개의 단계를 가지는 MCMC 방법의 경우 수렴속도를 정확히 계산하는 것이 가능하며, 다음과 같이 구할 수 있다 (Liu 등, 1994).

$$\begin{aligned} r &= 1 - \frac{E[\text{Var}(\theta|Z, Y)|Y]}{\text{Var}(\theta|Y)} \\ &= \frac{1}{1 + 1/\sigma^2}, \end{aligned}$$

여기서  $r$ 이 1에 가까울수록 MCMC 방법의 수렴속도는 느리다. 따라서  $\sigma^2 \rightarrow \infty$ 일 경우,  $r \rightarrow 1$ 이 되어 샘플러 1은 매우 느린 수렴속도를 가진다.

샘플러 1의 수렴속도를 향상시키기 위해 모형 요소의 일부를 부분붕괴하는 것을 생각해 보자. 즉, 샘플러 1의 2단계의 조건부 분포를 목표 결합분포의 주변분포로부터 유도된

$$p(\theta|Y) = \int p(Z, \theta|Y) dZ$$

로 대체하는 것을 고려할 수 있다. 하지만 조건항이 줄어든 조건부 분포의 단순한 대체는 MCMC 방법을 구성하고 있는 조건부 분포들이 서로 함수적으로 비호환적이 되는 결과를 낳게 되고, 정상분포가 목표 결합분포와 같아진다는 보장을 할 수 없게 된다. 조건항이 줄어든 조건부 분포의 단순한 대체 결과 다음과 같은 샘플러 2가 구성될 수 있다.

$$1\text{단계: } Z^{(t+1)} \sim p(Z|\theta^{(t)}, Y), \quad (\text{샘플러 2})$$

$$2\text{단계: } \theta^{(t+1)} \sim p(\theta|Y), \text{ 여기서}$$

$$\theta|Y \sim N(Y, 1 + \sigma^2).$$

하지만, 샘플러 2의 1단계에서 추출된  $Z^{(t+1)}$ 와 2단계에서 추출된  $\theta^{(t+1)}$ 는 서로 독립이므로 샘플러 2를 사용하는 경우  $Z$ 와  $\theta$ 간의 상관구조는 잃어버리게 된다. 즉, 샘플러 2의 정상분포는 목표 결합분포와 같지 않게 되는 것이다. 따라서 van Dyk과 Park (2008)에서 개발된 세 가지 도구인 소외화(marginalization), 순열(permutation), 가지치기(trimming)를 통해 비호환적인 조건부 분포를 사용하면서 동시에 정상분포가 목표 결합분포와 같게 되는 부분붕괴된 MCMC 방법을 구성할 수 있다. 이를 샘플러 3이라고 하자.

$$1\text{단계: } \theta^{(t+1)} \sim p(\theta|Y), \quad (\text{샘플러 3})$$

$$2\text{단계: } Z^{(t+1)} \sim p(Z|\theta^{(t+1)}, Y).$$

여기서 2단계의  $Z^{(t+1)}$ 는 1단계에서 추출된  $\theta^{(t+1)}$ 가 조건항으로 주어진 상태에서 추출되기 때문에  $Z$ 와  $\theta$ 가 올바른 상관구조를 가지게 되고, 정상분포도 목표 결합분포와 같아지게 된다. 또한 샘플러 3의 수렴속도는  $\sigma^2$ 의 값과 상관없이  $r = 0$ 이 되어 단 한 번의 반복(iteration) 수행으로 수렴을 하게 된다. 이러한 간단한 예제로부터 샘플러를 구성하는 조건부 분포들이 서로 비호환적일 경우, 조건부 분포들이 실행되는 순서에 따라서 올바른 정상분포를 가지기도 하고 그렇지 않기도 한다는 사실을 알 수 있다. 이는 함수적으로 호환된 조건부 분포로 구성되어 있는 일반적인 MCMC 방법이 조건부 분포들이 실행되는 순서와 상관없이 항상 올바른 정상분포를 가지는 것과 상반되는 것이다. 여기서 예로 든 샘플러 3은 두 개의 단계가 하나의 단계로 블록화 (Liu 등, 1994) 되는 단순한 형태를 가지나, 단계의 개수가 늘어나고 각 모형 요소가 벡터인 경우 부분붕괴 기법은 블록화 기법을 특별한 형태로 갖는 보다 일반적

인 전략이 된다. 부분붕괴 기법은 준항성에서 발산되는 광자의 에너지 스펙트럼에서 좁은 배출선의 위치를 찾는 문제 (Park 등, 2008; Park과 van Dyk, 2009; Park, 2009), 총합 자료를 이용해 개별 정보를 분석하는 문제 (Park, 2011), 비균질 포아송 과정에서 기준 발생률의 변화점을 찾는 문제 (Park 등, 2012b), 비례위험모형 하에서 분위수 잔여수명을 추정하는 문제 (Park 등, 2012a; Park과 Bae, 2014), 선형 혼합 모형을 효율적으로 분석하는 문제 (Park과 Min, 2014) 등에 성공적으로 사용되어 일반적인 MCMC 방법의 효율성을 향상시켰다.

### 3. 파레토-베타 점프확산 모형의 효율적인 베이지안 추론

자산 가격의 불연속적 움직임과 변동성을 표현하기 위해 가장 널리 사용되는 모형은 점프확산 모형이다 (Merton, 1976). 최근 이러한 점프확산 모형을 선형 혼합효과 모형으로 표현하고 재모수화를 통한 부분붕괴 기법을 사용하여 점프확산 모형의 효율적인 베이지안 추론 방법이 개발되었다 (Park과 Min, 2014). 점프확산 모형은 자산 가격의 변동을 연속적인 확산과정과 불연속적인 점프과정으로 나누어 자산 가격의 움직임에 나타나는 갑작스러운 변화를 설명할 수 있는 모형이다. 자산가격의 점프과정은 어닝 서프라이즈(earning surprise)와 같은 긍정적인 효과에 의한 양의 방향으로의 큰 움직임과 경제적 충격(economic shock)과 같은 부정적인 효과에 의한 음의 방향으로의 큰 움직임으로 나뉘볼 수 있고, Merton (1976)에서 제안된 점프확산 모형은 점프과정이 대칭적임을 가정한다. 이러한 모형의 한계를 극복하고자 비대칭적인 점프과정을 갖는 파레토-베타 점프확산 모형 (Ramezani와 Zeng, 1998)과 이중 지수(double exponential) 점프확산 모형 (Kou, 2002)이 제안되었다. 이러한 두 개의 비대칭적 점프확산 모형에서 한 모형의 모수는 다른 모형의 모수의 함수로 표현이 가능하다 (Ramezani와 Zeng, 2007).

본 논문에서는 부분붕괴 기법을 이용하여 비대칭적 점프확산 모형인 파레토-베타 점프확산 모형의 효율적인 베이지안 추론 방법을 개발할 것이다. 먼저  $S(t)$ 를  $t$ 시점에서의 자산의 가격이라고 하면, 파레토-베타 점프확산 모형은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \gamma dt + \sigma dW(t) + \sum_{i=1}^2 \left( e^{J_i(t)} - 1 \right) dN_i(t).$$

여기서  $S(t-)$ 는 자산 가격의 점프 간 불연속성을 나타내고,  $\gamma$ 와  $\sigma$ 는 추세 및 변동성을 나타내는 모수이고,  $W(t)$ 는 위너(Wiener) 과정을 나타내고,  $e^{J_1(t)}$ 는 Pareto( $\eta_1, 1$ )를 따르는 윗방향의 점프 크기를 나타내고,  $e^{J_2(t)}$ 는 Beta( $\eta_2, 1$ )를 따르는 아랫방향의 점프 크기를 나타내며,  $N_1(t)$ 와  $N_2(t)$ 는 각각 윗방향의 점프 발생률이  $\lambda_1$ 와 아랫방향의 점프 발생률이  $\lambda_2$ 이며 독립인 포아송 과정을 나타낸다. 여기서 이토의 보조정리(Ito's lemma)를 이용하여 파레토-베타 점프확산 모형의 확률 미분방정식을 적분하고  $\mu = \gamma - \sigma^2/2$ 라고 하면, 다음과 같은 파레토-베타 점프확산 과정을 얻을 수 있다.

$$d \log S(t) = \mu dt + \sigma dW(t) + \sum_{i=1}^2 J_i(t) dN_i(t),$$

이를 일별 시간 구간에 대해 적분하고,  $t$ 시점과  $(t-1)$ 시점 간 로그 자산 가격의 차이인  $Y_t = \log(S(t)/S(t-1))$ 에 대해 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$Y_t = \mu + \sigma \epsilon_t + \sum_{i=1}^2 J_i(t) Z_{it}, \quad t = 1, \dots, T,$$

여기서  $\mathbf{Z}_t = (Z_{1t}, Z_{2t}, Z_{3t})$ 는  $\sum_{i=1}^3 Z_{it} = 1$ 을 만족하는  $t$ 시점에서의 점프지시변수를 나타내고, 확률이  $(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2)$ 인 다항(multinomial) 분포를 따른다.

파레토-베타 점프확산 모형의 베이저안 추론을 위해  $(\mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$ 의 모수에 대해 다음과 같은 진(proper) 사전분포(prior distribution)를 가정하자.

$$\begin{aligned}\mu|\sigma^2 &\sim N(a_0, b_0\sigma^2), \\ \sigma^2 &\sim \nu\tau_0^2/\chi_\nu^2, \\ \eta_i &\sim \text{Gamma}(a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \\ (\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) &\sim \text{Dirichlet}(c_1, c_2, c_3).\end{aligned}$$

이 때, 목표 사후분포(posterior distribution)는 다음과 같이 계산된다.

$$p(\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2) p(\mathbf{Z} | \boldsymbol{\lambda}) p(\mathbf{J} | \mathbf{Z}, \boldsymbol{\eta}) p(\mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}),$$

여기서  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^T$ ,  $\mathbf{J} = \{(J_1(t), J_2(t))\}_{t=1}^T$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_t\}_{t=1}^T$ 이다. 파레토-베타 점프확산 모형의 목표 사후분포로부터 추출을 하는데 사용되는 깁스 샘플러는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}1\text{단계: } \mathbf{Z}^{(t+1)} &\sim p(\mathbf{Z} | \mathbf{J}^{(t)}, \mu^{(t)}, (\sigma^2)^{(t)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}), & (\text{샘플러 } 4) \\ 2\text{단계: } \mathbf{J}^{(t+1)} &\sim p(\mathbf{J} | \mathbf{Z}^{(t+1)}, \mu^{(t)}, (\sigma^2)^{(t)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}), \\ 3\text{단계: } (\sigma^2)^{(t+1)} &\sim p(\sigma^2 | \mathbf{Z}^{(t+1)}, \mathbf{J}^{(t+1)}, \mu^{(t)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}), \\ 4\text{단계: } \mu^{(t+1)} &\sim p(\mu | \mathbf{Z}^{(t+1)}, \mathbf{J}^{(t+1)}, (\sigma^2)^{(t+1)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}), \\ 5\text{단계: } (\boldsymbol{\eta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t+1)}) &\sim p(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{Z}^{(t+1)}, \mathbf{J}^{(t+1)}, \mu^{(t+1)}, (\sigma^2)^{(t+1)}, \mathbf{Y}),\end{aligned}$$

1단계에서  $\mathbf{Z}^{(t+1)}$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는  $\sum_{i=1}^3 Z_{it} = 1$ 이고  $(p_{1t}, p_{2t}, p_{3t})$ 를 확률로 갖는 다항 분포이다. 즉,

$$\mathbf{Z}_t | (\mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \sim \text{Multinomial}(1; p_{1t}, p_{2t}, p_{3t})$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned}p_{1t} &= p(Z_{1t} = 1 | \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \propto \lambda_1 \eta_1 e^{-\eta_1 J_1(t)} \phi\left(\frac{Y_t - \mu - J_1(t)}{\sigma}\right), \\ p_{2t} &= p(Z_{2t} = 1 | \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \propto \lambda_2 \eta_2 e^{-\eta_2 J_2(t)} \phi\left(\frac{Y_t - \mu - J_2(t)}{\sigma}\right), \\ p_{3t} &= p(Z_{3t} = 1 | \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \propto (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \phi\left(\frac{Y_t - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이고,  $\sum_{i=1}^3 p_{it} = 1$ 을 만족하며,  $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수를 나타낸다. 2단계에서  $\mathbf{J}^{(t+1)}$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는 다음과 같이 독립인 절단정규분포를 따른다. 즉,

$$p(\mathbf{J} | \mathbf{Z}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^2 \prod_{t=1}^T p(J_i(t) | \mathbf{Z}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y})$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned}J_1(t) | (\mathbf{Z}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) &\sim \text{TN}^+\left(\hat{J}_1(t), \sigma^2\right), \quad \text{if } Z_{1t} = 1, \\ J_2(t) | (\mathbf{Z}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) &\sim \text{TN}^-\left(\hat{J}_2(t), \sigma^2\right), \quad \text{if } Z_{2t} = 1\end{aligned}$$

이고,  $TN^+(\mu, \sigma^2)$ 와  $TN^-(\mu, \sigma^2)$ 는 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\sigma^2$ 이며 각각 0보다 큰 구간과 0보다 작은 구간에서 정의되는 절단정규분포를 나타내고,  $\hat{J}_1(t) = Y_t - \mu - \sigma^2\eta_1$ 이며  $\hat{J}_2(t) = Y_t - \mu + \sigma^2\eta_2$ 이다. 3단계에서  $(\sigma^2)^{(t+1)}$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\sigma^2 | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \sim \frac{S + \frac{(\mu - a_0)^2}{b_0} + \nu\tau_0^2}{\chi_{\nu+T+1}^2}$$

와 같은 역카이제곱 정규분포이고, 여기서

$$S = \sum_{t=1}^T Z_{1t}(Y_t - \mu - J_1(t))^2 + \sum_{t=1}^T Z_{2t}(Y_t - \mu - J_2(t))^2 + \sum_{t=1}^T Z_{3t}(Y_t - \mu)^2$$

이다. 4단계에서  $\mu^{(t+1)}$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\mu | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \sim N\left(\hat{\mu}, \frac{\sigma^2}{1/b_0 + T}\right)$$

와 같은 정규분포이고, 여기서

$$\hat{\mu} = \frac{a_0/b_0 + \sum_{t=1}^T Z_{1t}(Y_t - J_1(t)) + \sum_{t=1}^T Z_{2t}(Y_t - J_2(t)) + \sum_{t=1}^T Z_{3t}Y_t}{1/b_0 + T}$$

이다. 마지막으로 5단계에서  $(\boldsymbol{\eta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t+1)})$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$p(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^2 p(\eta_i | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \mathbf{Y}) p(\boldsymbol{\lambda} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \mathbf{Y})$$

와 같이 표현할 수 있고, 여기서 각  $\eta_i^{(t+1)}$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\begin{aligned} \eta_1 | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \mathbf{Y}) &\sim \text{Gamma}\left(a_1 + \sum_{t=1}^T Z_{1t}, b_1 + \sum_{t=1}^T J_1(t)Z_{1t}\right) \\ \eta_2 | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \mathbf{Y}) &\sim \text{Gamma}\left(a_2 + \sum_{t=1}^T Z_{2t}, b_2 - \sum_{t=1}^T J_2(t)Z_{2t}\right) \end{aligned}$$

와 같이 독립인 감마분포이고,  $\boldsymbol{\lambda}^{(t+1)}$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \mu, \sigma^2, \mathbf{Y}) \sim \text{Dirichlet}\left(c_1 + \sum_{t=1}^T Z_{1t}, c_2 + \sum_{t=1}^T Z_{2t}, c_3 + \sum_{t=1}^T Z_{3t}\right)$$

와 같이 디리클레분포이다.

파레토-베타 점프확산 모형의 추론을 위해 사용되는 깃스 샘플러의 효율성을 향상시키기 위해 일부 모형 요소를 부분붕괴하는 전략을 채택할 수 있다. 즉, 샘플러 4의 1단계에서  $\mathbf{J}$ 를 그리고 3단계에서  $\mu$ 를 부분붕괴함으로써 여전히 닫힌 해를 갖는 조건부 분포로 구성된 부분붕괴 깃스 샘플러를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$1\text{단계: } \mathbf{Z}^{(t+1)} \sim p(\mathbf{Z} | \mu^{(t)}, (\sigma^2)^{(t)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}), \quad (\text{샘플러 5})$$

$$2\text{단계: } \mathbf{J}^{(t+1)} \sim p(\mathbf{J} | \mathbf{Z}^{(t+1)}, \mu^{(t)}, (\sigma^2)^{(t)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}),$$

$$3\text{단계: } (\sigma^2)^{(t+1)} \sim p(\sigma^2 | \mathbf{Z}^{(t+1)}, \mathbf{J}^{(t+1)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y}),$$

4단계:  $\mu^{(t+1)} \sim p(\mu|\mathbf{Z}^{(t+1)}, \mathbf{J}^{(t+1)}, (\sigma^2)^{(t+1)}, \boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t)}, \mathbf{Y})$ ,

5단계:  $(\boldsymbol{\eta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(t+1)}) \sim p(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Z}^{(t+1)}, \mathbf{J}^{(t+1)}, \mu^{(t+1)}, (\sigma^2)^{(t+1)}, \mathbf{Y})$ ,

특히, 샘플러 5의 1단계에서  $\mathbf{J}$ 에 대한 조건항이 줄어든  $\mathbf{Z}$ 의 조건부 분포는

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Z}|\mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) &= \frac{p\left(\mathbf{Z}, \left\{\hat{J}_1(t)\right\}_{t=1}^T, \left\{\hat{J}_2(t)\right\}_{t=1}^T \mid \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}\right)}{\prod_{i=1}^2 \prod_{t=1}^T p\left(\hat{J}_i(t) \mid \mathbf{Z}, \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}\right)} \\ &= p\left(\mathbf{Z}, \left\{\hat{J}_1(t)\right\}_{t=1}^T, \left\{\hat{J}_2(t)\right\}_{t=1}^T \mid \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}\right) \prod_{t=1}^T \Phi\left(\frac{\hat{J}_1(t)}{\sigma}\right)^{Z_{1t}} \Phi\left(-\frac{\hat{J}_2(t)}{\sigma}\right)^{Z_{2t}} \end{aligned}$$

와 같이 표현된다. 따라서  $\mathbf{Z}^{(t+1)}$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는  $\sum_{i=1}^3 Z_{it} = 1$ 이고  $(\tilde{p}_{1t}, \tilde{p}_{2t}, \tilde{p}_{3t})$ 를 확률로 갖는 다항분포이다. 즉,

$$\mathbf{Z}_t \mid (\mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \sim \text{Multinomial}(1; \tilde{p}_{1t}, \tilde{p}_{2t}, \tilde{p}_{3t})$$

이고,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1t} &= p(Z_{1t} = 1 \mid \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \propto \lambda_1 \eta_1 e^{-\eta_1 \hat{J}_1(t)} \phi\left(\frac{Y_t - \mu - \hat{J}_1(t)}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\hat{J}_1(t)}{\sigma}\right) \\ \tilde{p}_{2t} &= p(Z_{2t} = 1 \mid \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \propto \lambda_2 \eta_2 e^{\eta_2 \hat{J}_2(t)} \phi\left(\frac{Y_t - \mu - \hat{J}_2(t)}{\sigma}\right) \Phi\left(-\frac{\hat{J}_2(t)}{\sigma}\right) \\ \tilde{p}_{3t} &= p(Z_{3t} = 1 \mid \mu, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \propto (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \phi\left(\frac{Y_t - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

이고,  $\sum_{i=1}^3 p_{it} = 1$ 을 만족하며,  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수를 나타낸다. 샘플러 5의 3단계에서  $\mu$ 에 대한 조건항이 줄어든  $\sigma^2$ 의 조건부 분포는

$$p(\sigma^2 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) = \frac{p(\hat{\mu}, \sigma^2 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y})}{p(\hat{\mu} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \sigma^2, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y})}$$

와 같이 표현되므로,  $(\sigma^2)^{(t+1)}$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\sigma^2 \mid (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}) \sim \frac{\hat{S} + \frac{(\hat{\mu} - a_0)^2}{b_0} + \nu \tau_0^2}{\chi_{\nu+T}^2}$$

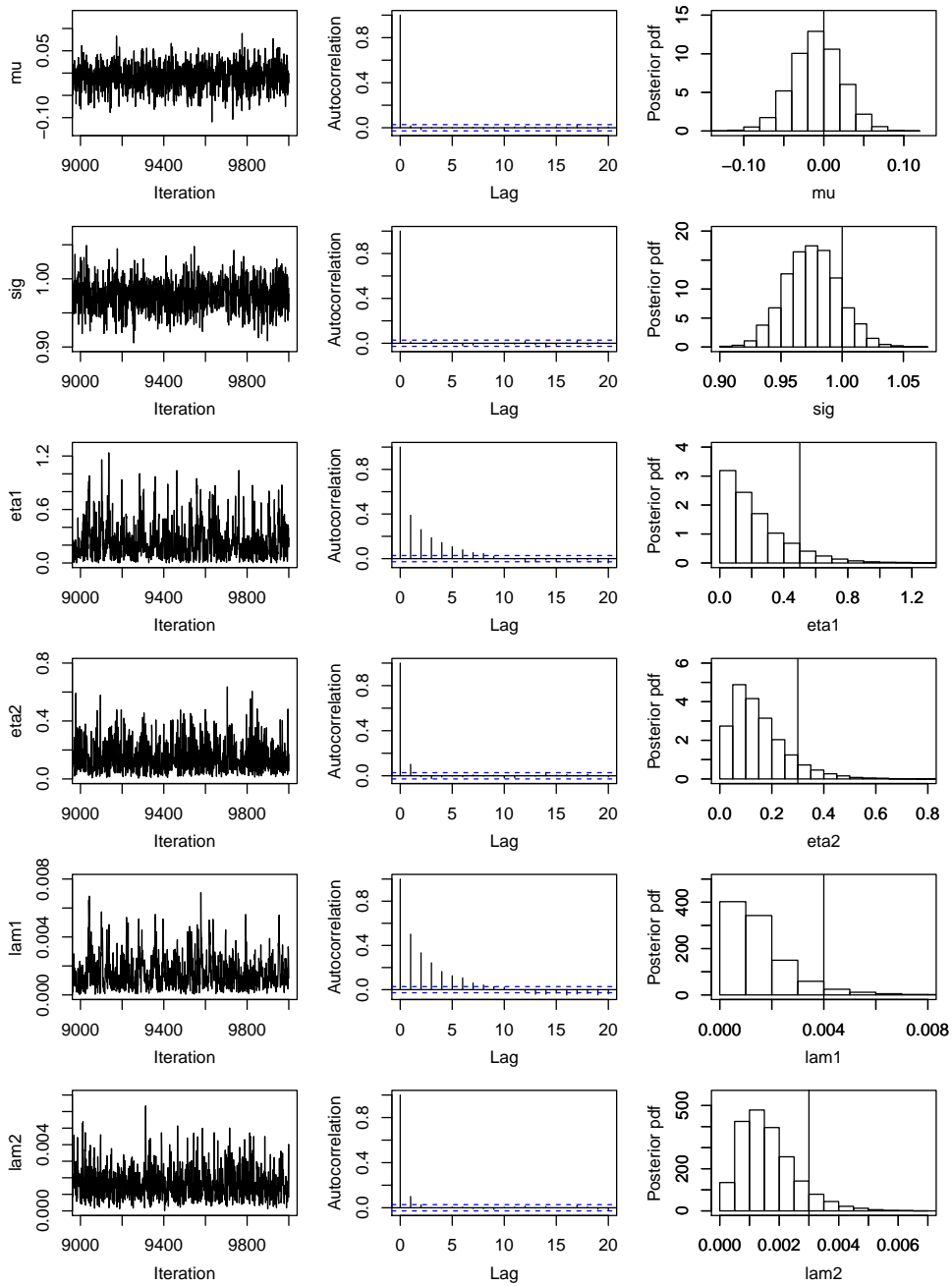
와 같은 역카이제곱 정규분포이고, 여기서

$$\hat{S} = \sum_{t=1}^T Z_{1t} (Y_t - \hat{\mu} - J_1(t))^2 + \sum_{t=1}^T Z_{2t} (Y_t - \hat{\mu} - J_2(t))^2 + \sum_{t=1}^T Z_{3t} (Y_t - \hat{\mu})^2$$

이다. 샘플러 5의 다른 단계는 샘플러 4와 동일하다.

#### 4. 모의실험

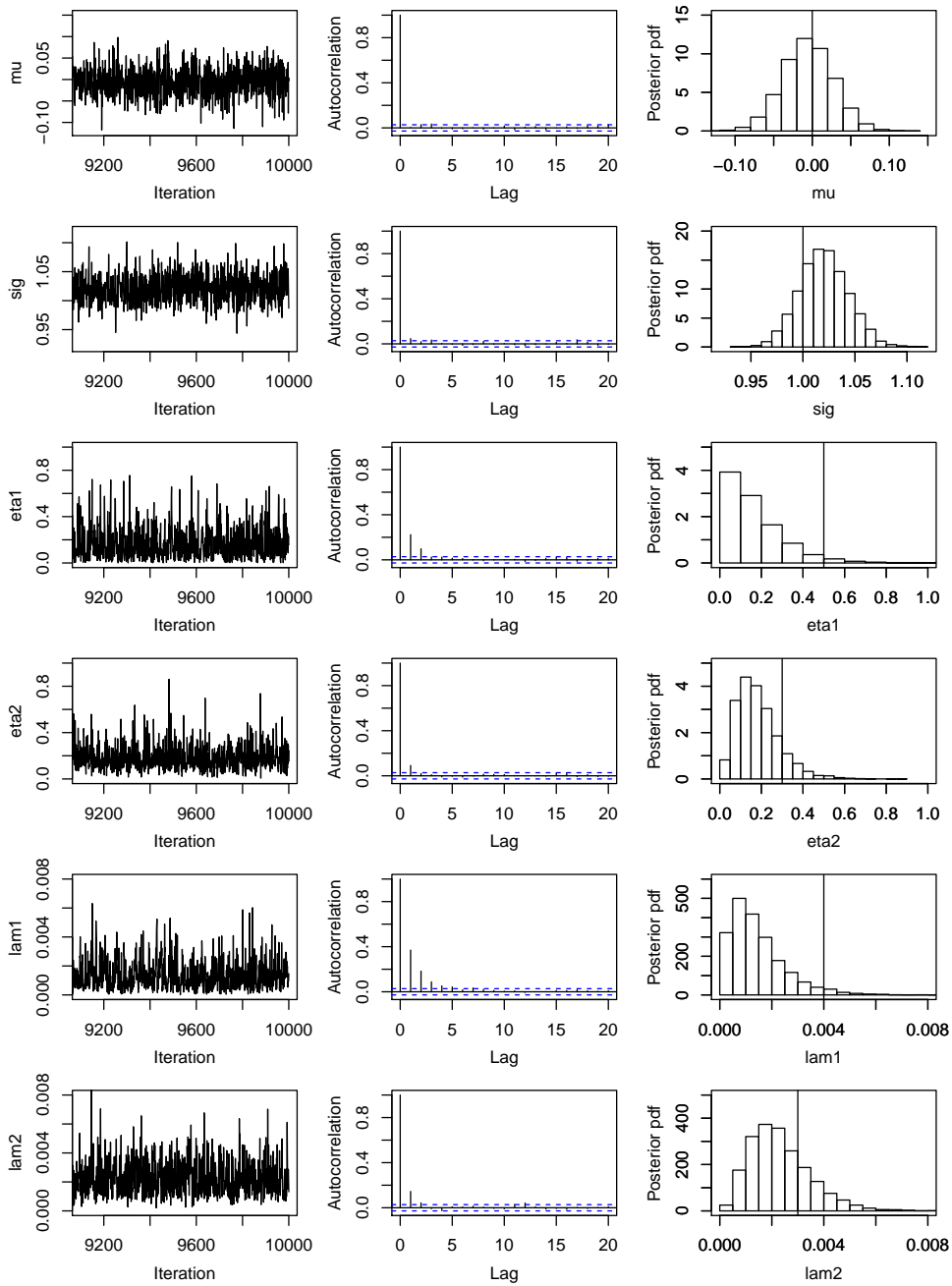
본 논문에서 제안된 파레토-베타 점프확산 모형의 효율적인 베이저안 방법을 검증하기 위해 모의실험을 수행하였다. 먼저 연속적 시간  $t = 1, \dots, T$  동안 비대칭적 점프확산 과정에서 얻어진 관찰값  $Y_t$ 를 생



**Figure 4.1.** Mixing plot, autocorrelation plot, and marginal posterior probability distribution function for model parameters of the Pareto-Beta jump diffusion model via the Gibbs sampler

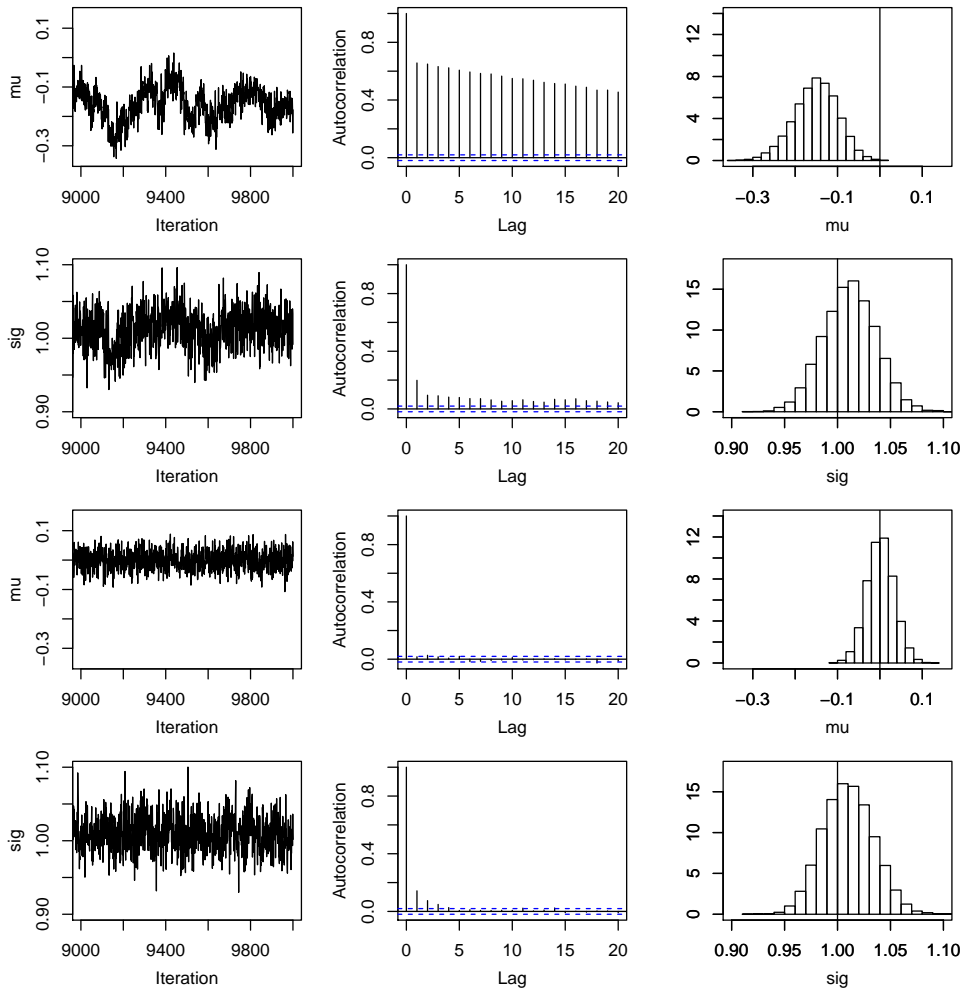
성하기 위해  $T = 1000$ 이고 점프지시변수  $\mathbf{Z}_t$ 가 윗방향 점프의 발생확률이  $\lambda_1 = 0.004$ 이고 아랫방향





**Figure 4.2.** Mixing plot, autocorrelation plot, and marginal posterior probability distribution function for model parameters of the Pareto-Beta jump diffusion model via the partially collapsed Gibbs sampler

점프의 발생확률이  $\lambda_2 = 0.003$ 인 다항분포를 따른다고 가정하자. 점프가 발생하지 않은 경우 평균이



**Figure 4.3.** Comparison of convergence characteristics between the Gibbs sampler and the partially collapsed Gibbs sampler

$\mu = 0$ 이고 분산이  $\sigma^2 = 1$ 인 정규분포를 따르고 점프가 발생하는 경우 윗방향의 로그점프 크기  $J_1$ 은  $\eta_1 = 0.5$ 인 로그-파레토 분포를 따르며, 아랫방향의 로그점프 크기  $J_2$ 는  $\eta_2 = 0.3$ 인 로그-베타 분포를 따른다. 파레토-베타 점프확산 모형의 모수에 대한 진 사전분포는 영향을 최소화하기 위해 다음과 같이 퍼지도록 선정한다.

$$\begin{aligned} \mu | \sigma^2 &\sim N(0, \sigma^2) \\ \sigma^2 &\sim 1/\chi^2_\nu \\ \eta_i &\sim \text{Gamma}(0.1, 1), \quad i = 1, 2 \\ (\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) &\sim \text{Dirichlet}(1, 1, 1000). \end{aligned}$$

일반적인 MCMC 방법인 깁스 샘플러와 부분붕괴된 깁스 샘플러를 비교하고자 모의실험 자료에 대해

**Table 5.1.** Posterior summary statistics for parameters associated with S&P 500 data.

	평균	표준편차	2.5%	중앙값	97.5%	$\hat{R}^{1/2}$
$\mu$	-0.0005	0.0001	-0.0007	-0.0005	-0.0002	1.0000
$\sigma^2$	0.0106	0.0001	0.0104	0.0106	0.0108	1.0002
$\eta_1$	0.0356	0.0070	0.0233	0.0352	0.0505	1.0003
$\eta_2$	0.0177	0.0053	0.0088	0.0172	0.0290	1.0004
$\lambda_1$	0.0038	0.0007	0.0025	0.0038	0.0054	1.0000
$\lambda_2$	0.0019	0.0006	0.0010	0.0019	0.0031	1.0000
$\sum_{t=1}^{8560} Z_{1t}$	35.6657	3.4990	29	36	43	1.0002
$\sum_{t=1}^{8560} Z_{2t}$	17.5967	3.2453	12	17	24	1.0004

서로 다른 두 개의 초기값을 이용하여 각 샘플러를 10000번씩 반복 수행하였다. 두 샘플러의 수렴 여부를 확인하기 위해  $\hat{R}^{1/2}$ 으로 표시되는 잠재적 척도축소인자(Potential Scale Reduction Factor)를 계산하였다 (Gelman과 Rubin, 1992). 모든 모형 변수에 대한  $\hat{R}^{1/2}$ 의 값이 1에 충분히 가까우면 모형이 수렴한다고 진단할 수 있다.

Figure 4.1과 Figure 4.2는 각각 깃스 샘플러와 부분붕괴된 깃스 샘플러의 결과이다. 첫째 열과 둘째 열은 각각 마르코프 연쇄의 마지막 1000번의 마르코프 연쇄에 대한 시계열 그림과 전체 마르코프 연쇄의 자기상관 그림을 보여준다. 이를 통해 마르코프 연쇄의 수렴 속도를 시각적으로 진단할 수 있다. 여기서 깃스 샘플러와 부분붕괴된 깃스 샘플러의 수렴속도는 비슷한 것으로 보이나,  $\eta_1$ 과  $\lambda_1$ 의 경우 부분붕괴된 깃스 샘플러가 상대적으로 약한 자기상관계수 값을 가지므로 빠른 수렴속도를 보여줄 수 있다. Figure 4.1과 Figure 4.2의 셋째 열은 각각 깃스 샘플러와 부분붕괴된 깃스 샘플러를 이용한 두 개의 마르코프 연쇄에서 각각 후반 5000번의 마르코프 연쇄를 취합하여 얻어진 사후분포이다. 이를 통해 깃스 샘플러와 부분붕괴된 깃스 샘플러에서 모든 변수가 참값에 근사하게 추정되었음을 확인할 수 있다. 몇몇 모의실험 자료에서는 깃스 샘플러가 부분붕괴된 깃스 샘플러에 비해 특히 느린 수렴속도와 강한 자기상관을 가지는 경우가 발생한다. Figure 4.3은 이러한 자료에 대해 깃스 샘플러와 부분붕괴된 깃스 샘플러를 비교한 결과이다. 첫째 행과 둘째 행은 깃스 샘플러를 통한 관심 변수  $\mu$ 와  $\sigma$ 의 수렴 특성을, 셋째 행과 넷째 행은 부분붕괴된 깃스 샘플러를 통한 관심 변수의 수렴 특성을 보여준다. Figure 4.3의 첫째 열과 둘째 열에서 보여지듯이 관심변수인  $\mu$ 와  $\sigma$ 의 수렴속도가 깃스 샘플러에 비해 부분붕괴된 깃스 샘플러에서 월등히 향상됨을 볼 수 있다. 특히 4.3의 셋째 열은  $\mu$ 의 부분 마르코프 연쇄가 깃스 샘플러를 10000번 반복 수행한 뒤에도 여전히 실제 값에 제대로 수렴하지 못하고 있음을 보여준다. 따라서 모형의 일부 요소를 부분붕괴하는 기법이 깃스 샘플러의 효율성을 높여 느린 수렴 속도의 문제를 해결함을 확인할 수 있다.

## 5. 사례연구

본 논문에서 제안한 부분붕괴된 깃스 샘플러를 실제 금융시장의 자료에 적용하여 분석하였다. 사례연구를 위한 자료로는 1980년 9월 8일부터 2014년 8월 13일까지 총 8560일간 관찰된 일별 S&P 500 지수를 사용하였다. 일별 로그-수익률인  $Y_t$ 는 S&P 500 지수를 로그변환 후 차분하여 산출하였다. 일별 로그-수익률의 실증적 분포는 정규분포에 비하여 첨도가 크고 (비대칭적인) 양쪽 꼬리는 더 두꺼운 급침적(leptokurtic) 분포를 가지고 있는 것으로 알려져 있다. 비대칭적 점프확산 모형은 이러한 실증적 현

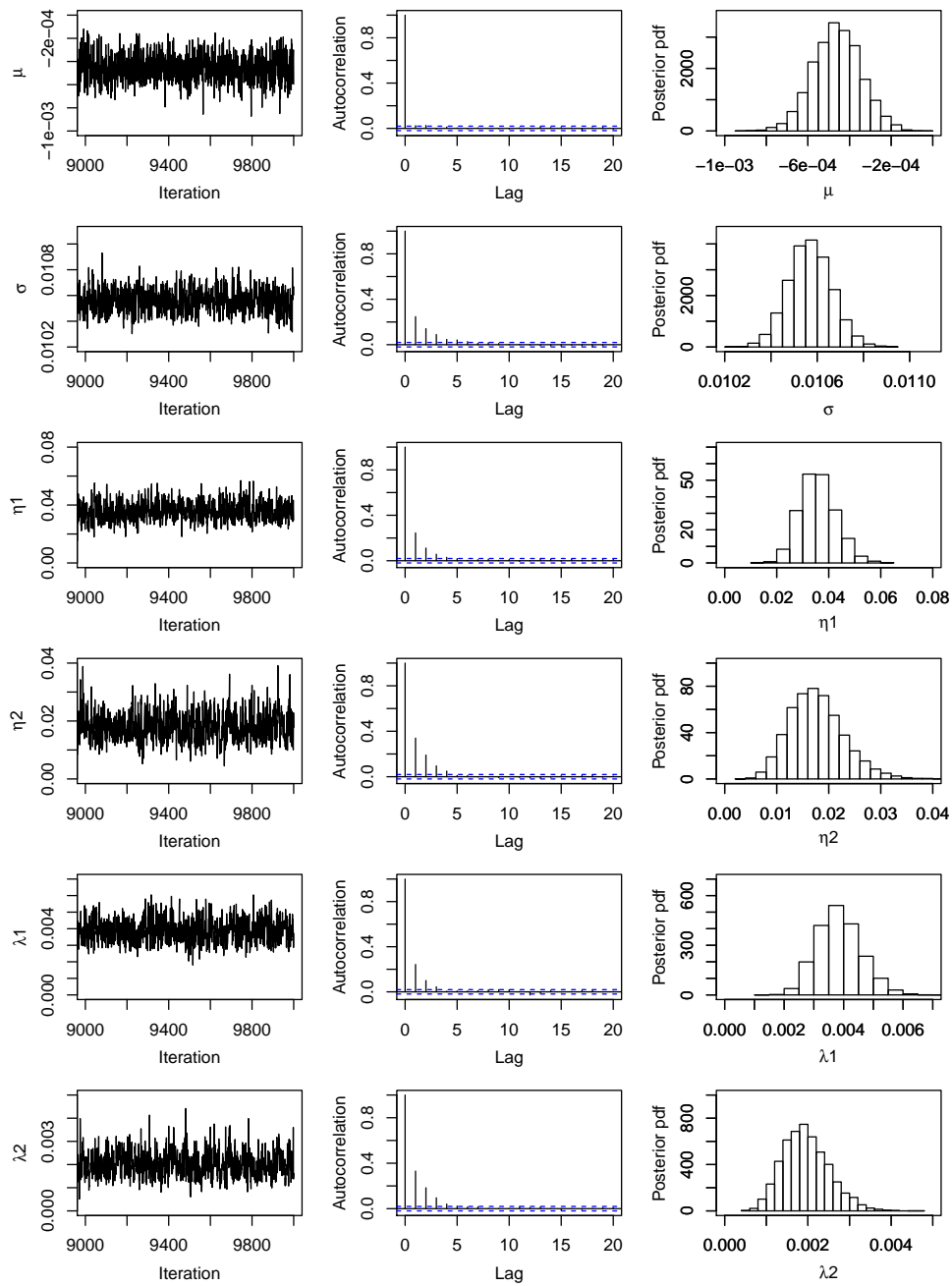


Figure 5.1. Convergence characteristics of the PCG sampler for the S&P 500 data

상을 설명할 수 있고, Black-Scholes 모형 하에서 계산된 옵션의 내재변동성이 옵션의 행사가격과 만기에 따라 다르게 나타나는 현상인 변동성 스마일(volatility smile)을 설명할 수 있다는 것이 알려져 있다

(Kou, 2002). 따라서 Ramezami와 Zeng (1998)에 의해 수행된 실증적 검증은 점프확산 모형에 비해 비대칭적 점프확산 모형이 주가 자료에 더 적합하다는 것을 제안하였고, 이는 1980년부터 1996년까지의 S&P 500 지수에 대해 입증되었다 (Andersen 등, 2002).

본 논문에서는 S&P 500 지수의 일별 로그-수익률 자료의 비대칭적 변동을 고려한 파레토-베타 점프확산 모형을 효율적인 부분붕괴된 깁스 샘플러를 사용하여 추론하였고, Figure 5.1와 Table 5.1은 베이저안 추론의 결과를 보여주고 있다. Figure 5.1의 첫째 열과 둘째 열을 보면 모든 모형 모수가 안정적으로 수렴하고 있음을 알 수 있고, 셋째 열은 서로 다른 초기값을 사용한 두 개의 마르코프 연쇄의 후반 5000개의 반복을 취합하여 구한 모형 모수의 사후분포를 보여주고 있다. Table 5.1은 Figure 5.1을 요약한 수치 결과이며 부분붕괴된 깁스 샘플러를 이용한 파레토-베타 점프확산 모형 모수의 추정값을 보여준다. 여기서 윗방향의 로그점프 크기  $J_1$ 을 결정하는 로그-파레토 분포의 모수에 대한 사후평균값이  $\hat{\eta}_1 = 0.0356$ 이고 아랫방향의 로그점프 크기  $J_2$ 를 결정하는 로그-베타 분포의 모수에 대한 사후평균값이  $\hat{\eta}_2 = 0.0177$ 이다. 따라서 S&P 500 지수의 변동성은 음의 방향으로 더 두꺼운 꼬리를 갖는 비대칭적인 점프과정을 가진다는 것을 알 수 있고, 이는 S&P 500 지수가 긍정적인 효과에 비해 부정적인 효과에 더 크게 반응한다는 것을 의미한다. Table 5.1은 윗방향 및 아랫방향의 점프가 발생하는 횟수에 대한 요약값을 제공하고 있다. 즉, 윗방향의 점프가 발생하는 횟수에 대한 사후평균값은 35.7이고 아랫방향의 점프가 발생하는 횟수에 대한 사후평균값은 17.6이다. 따라서 1980년 9월 8일부터 2014년 8월 13일까지 총 8560일동안 아랫방향의 점프에 비해 윗방향의 점프가 2배정도 더 빈번히 발생한 것을 알 수 있다.

## 6. 결론

비대칭적 점프확산 과정을 통해 자산 가격의 비대칭적 변동을 설명할 수 있는 자산가격 모형이 최근 제안되었다. 본 논문에서는 이러한 비대칭적 점프확산 모형의 추론을 위한 효율적인 베이저안 방법을 제안하였다. 본 논문에서 제안된 방법은 부분붕괴 깁스 샘플러를 고안함으로써 개발되었다. 부분붕괴 기법은 조건항이 줄어든 조건부 분포의 변동성을 증가시킴으로써 MCMC 방법의 효율성을 향상시킨다. 본 논문에서 개발된 방법을 모의실험 자료 및 S&P 500 지수 자료에 적용하여 그 효율성을 검증하였다.

## References

- Andersen, T. G., Benzoni, L. and Lund, J. (2002). Empirical investigation of continuous-time equity return models, *Journal of Finance*, **57**, 1239–1284.
- Besag, J. and Green, P. J. (1993). Spatial statistics and Bayesian computation, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **55**, 25–37.
- Gelfand, A. E., Sahu, S. K. and Carlin, B. P. (1995). Efficient parameterization for normal linear mixed models, *Biometrika*, **82**, 479–488.
- Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulations using multiple sequences (with discussion), *Statistical Science*, **7**, 457–472.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing, *Management Science*, **48**, 1086–1101.
- Liu, J. S. (1994). The collapsed Gibbs sampler in Bayesian computations with applications to gene regulation problem, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 958–966.
- Liu, J. S., Wong, W. H. and Kong, A. (1994). Covariance structure of the Gibbs sampler with applications to comparisons of estimators and augmentation schemes, *Biometrika*, **81**, 27–40.
- Liu, J. S. and Wu, Y. N. (1999). Parameter expansion for data augmentation, *Journal of the American Statistical Association*, **94**, 1264–1274.
- Meng, X. L. and van Dyk, D. A. (1999). Seeking efficient data augmentation schemes via conditional and marginal augmentation, *Biometrika*, **86**, 301–320.

- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125–144.
- Park, T. (2009). Statistical challenges in spectral analysis in high-energy astrophysics, *ISBA Bulletin*, **16**, 13–17.
- Park, T. (2011). Bayesian analysis of individual choice behavior with aggregate data, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **20**, 158–173.
- Park, T. and Bae, W. (2014). Bayesian semi-parametric regression for quantile residual lifetime, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **21**, 285–296.
- Park, T., Jeong, J. and Lee, J. (2012a). Bayesian nonparametric inference on quantile residual life function: Application to breast cancer data, *Statistics In Medicine*, **31**, 1972–1985.
- Park, T., Krafty, R. T. and Sanchez, A. I. (2012b). Bayesian semi-parametric analysis of Poisson change-point regression models: Application to policy making in Cali, Colombia, *Journal of Applied Statistics*, **39**, 2285–2298.
- Park, T. and Min, S. (2014). Partially collapsed Gibbs sampling for linear mixed-effects models, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, DOI:10.1080/03610918.2013.857687.
- Park, T. and van Dyk, D. A. (2009). Partially collapsed Gibbs samplers: Illustrations and applications, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **18**, 283–305.
- Park, T., van Dyk, D. A. and Siemiginowska, A. (2008). Searching for narrow emission lines in X-ray spectra: Computation and methods, *The Astrophysical Journal*, **688**, 807–825.
- Ramezani, C. A. and Zeng, Y. (1998). Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion process: Application to security prices, Working Paper, Department of Mathematics and Statistics, University of Missouri, Kansas City, Available from: <http://ssrn.com/abstract=606361>.
- Ramezani, C. A. and Zeng, Y. (2007). Maximum likelihood estimation of the double exponential jump diffusion process, *Annals of Finance*, **3**, 487–507.
- Roberts, G. O., Gelman, A. and Gilks, W. (1997). Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms, *The Annals of Applied Probability*, **7**, 110–120.
- Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2001). Optimal scaling for various Metropolis-Hastings algorithms, *Statistical Science*, **16**, 351–367.
- Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2007). Coupling and ergodicity of adaptive MCMC, *Journal of Applied Probability*, **44**, 458–475.
- van Dyk, D. A. (2000). Nesting EM algorithms for computational efficiency, *Statistical Sinica*, **10**, 203–225.
- van Dyk, D. A. and Park, T. (2008). Partially collapsed Gibbs samplers: Theory and methods, *Journal of the American Statistical Association*, **103**, 790–796.
- van Dyk, D. A. and Park, T. (2011). Partially collapsed Gibbs sampling and path-adaptive Metropolis-Hastings in high-energy astrophysics, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, Chapman & Hall/CRC Press, 383–400.
- Xu, X., Meng, X. L., and Yu, Y. (2013). Thank God that regressing Y on X is not the same as regressing X on Y: Direct and indirect residual augmentations, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **22**, 598–622.
- Yu, Y. and Meng, X. L. (2011). To center or not to center, that is not the question: An ancillarity-sufficiency interweaving strategy (ASIS) for boosting MCMC efficiency, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **20**, 531–570.

# 비대칭적 점프확산 모형의 효율적인 베이지안 추론

박태영<sup>a,1</sup> · 이영은<sup>a</sup>

<sup>a</sup>연세대학교 응용통계학과

(2014년 10월 6일 접수, 2014년 10월 24일 수정, 2014년 10월 30일 채택)

---

## 요약

자산가격의 비대칭적 변동을 설명하기 위해 최근 비대칭적 점프확산 모형이 제안되었다. 본 논문에서는 이러한 자산 가격 모형을 분석하는데 사용되는 효율적인 베이지안 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안되는 방법은 모형 요소가 쉽게 추출되는 편의성을 희생하지 않으면서도 조건부 분포들간의 함수적 비호환성을 통해 효율성을 향상시킬 수 있는 부분붕괴 깁스 샘플러를 고안함으로써 개발되었다. 제안된 방법은 모의실험 자료에 적용되어 그 효율성을 검증하였고 1980년 9월부터 2014년 8월까지 관찰된 일별 S&P 500 자료에 적용되었다.

주요용어: 깁스 샘플러, 마르코프 연쇄 몬테카를로, 파레토-베타 점프확산, 부분붕괴, 위너과정.

---

<sup>1</sup>교신저자: (120-749) 서울시 서대문구 연세로 50, 연세대학교 상경대학 응용통계학과.

E-mail: tpark@yonsei.ac.kr