

경사안내면 상에서 이송되는 볼나사-슬라이드 이송계의 마찰기인 진동해석

최영휴[#]

(# 창원대학교 메카트로닉스대학 기계공학부)

Analysis of Friction-Induced Vibrations in a Ball Screw Driven Slide on Skewed Guideway

Young Hyu Choi[#]

(Received 23 October 2014; received in revised form 30 November 2014; accepted 3 December 2014)

ABSTRACT

A moving mass on a skewed linear guideway model to analyze the friction-induced stick-slip behavior of ball-screw-driven slides is proposed. To describe the friction force, a friction coefficient function is modelled as a third-order polynomial of the relative velocity between the slide mass and a guideway. A nonlinear differential equation of motion is derived and an approximate solution is obtained using a perturbation method for the amplitudes and base frequencies of both pure-slip and stick-slip oscillations. The results are presented with time responses, phase plots, and amplitude plots, which are compared adequately with those obtained by Runge Kutta 4th-order numerical integration, as long as the difference between the static and kinematic friction coefficients is small. However, errors in the results by the approximate solution increase and are not negligible if the difference between the friction coefficients exceeds approximately 40% of the static friction coefficient.

Key Words : Stick-Slip(점착-미끄럼), Machine Tool Slides(공작기계 슬라이드), Friction-Induced Vibration(마찰 기인 진동), Self-Excited Vibration(자력진동), Perturbation Method(섭동법)

1. 서 론

마찰이 있는 안내면을 따라 이송되는 공작기계 슬라이드의 마찰 기인 진동을 연구하는 것은 정밀 공작기계 이송장치나 로켓 발사대용 고각 이송기구 등의 설계와 제어를 위하여 매우 중요하다. 지난 수십 년에 걸쳐 마찰이 있는 이송계의 진동 현

상에 대한 많은 연구가 이루어 졌다. 종래의 연구들은 주로 “움직이는 벨트 상에 놓인 질량-스프링 진동계”나^[1-7] “회전하는 디스크나 수평 안내면 상의 질량 또는 질량-스프링 진동계”의^[8-18] 마찰특성에 대한 연구나 마찰 기인 진동을 규명하기 위한 이론적 연구와 실험적 연구가 대부분이다. 안내면-슬라이드의 마찰에 기인된 진동에 관한 몇몇 연구들은^[14-18] 공작기계 슬라이드-안내면의 마찰기인 진동현상 규명을 위한 이론적 및 실험적 접근이며, 그 외에 마찰면의 윤활특성에 따른 마찰특성이나 마찰계수 모델링에 관한 연구들 대부분은

[#] School of mechanical engineering, Changwon National Univ.

E-mail : yhchoi@changwon.ac.kr

실험결과를 적절히 모사하기 위한 것이며,^[19-23] 드릴링 가공면의 마찰과정을 정량화한 연구 등이 있다^[24].

본 연구에서는 경사진 안내면을 따라 불나사로 구동되는 슬라이드 이송기구의 마찰 기인 접촉 진동 현상을 규명하기 위하여 이송 장치를 1 자유도 질량-스프링-감쇠기 진동계로 모델링하고, 슬라이드 마찰 특성은 건마찰(Dry friction)과 Stribeck의 유체윤활 특성을 고려한 비선형 마찰력으로 모델링하여 진동계의 운동방정식을 유도한다. 운동방정식의 해는 순수 미끄럼 운동(Pure sliding oscillations)과 접촉-미끄럼(Stick-slip) 운동이 연속적이라는 가정과 정지마찰계수와 동마찰계수의 차이가 상당히 작다는 가정 하에 섭동법(Perturbation method)을 이용하여 순수 미끄럼 진동의 근사 해를 구하고, 연속 주기운동 조건을 이용하여 접촉 진동의 해를 구한다. 또한 섭동법으로 구한 이론적 근사 해를 4차 Runge-Kutta 직접적분법으로 구한 수치 해와 비교한다.

2. 이송계의 마찰기인 진동해석

2.1 이송계의 모델링과 운동방정식

Fig. 1은 경사진 마찰 안내면을 따라 불나사로 이송되는 공작기계용 직선 슬라이드 이송계의 수학적 모델링이다. 질량 M 인 슬라이드는 스프링 상수 K 인 스프링과 감쇠계수 C 인 감쇠기를 통하여 불나사 구동기에 연결되어 있다. 절대 고정좌 표계를 기준으로 구동기가 일정한 입력속도 V_b 로 $X_b(t)$ 만큼 움직일 때 슬라이드 M 은 절대변위 $X_s(t)$ 만큼 변위된다. 경사진 안내면과 슬라이드의 마찰면에는 마찰력 μN 이 작용한다. 슬라이드 질

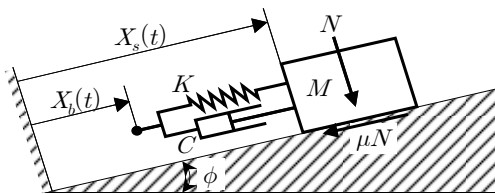


Fig. 1 Mathematical model of a ball screw driven linear slide on skewed guide-way

량 M 에 대한 운동방정식을 구하면 다음 식과 같다.

$$M\ddot{X}_s(t) + C(\dot{X}_s(t) - \dot{X}_b(t)) + K(X_s - X_b) = -sgn(V_r) \mu N \quad (\text{for slip}) \quad (1)$$

$$M\ddot{X}_s = 0, \quad -C\dot{X}_s(t) + K(X_s - X_b) \leq \mu_s N \quad (\text{for stick}) \quad (2)$$

위 식에서 슬라이드와 안내면의 상대변위 $V_r = \frac{dX_s}{dt} = \dot{X}_s$ 이고, $\mu(V_r)$ 는 상대속도의 함수인 마찰계수이다. 슬라이드의 자중에 의해 접촉 안내면의 법선하중 N 은 $N = Mg \cos \phi$ 이다.

$X(t) = X_s(t) - X_b$ 로 변수를 치환하고 다음 (3)식과 같이 정의되는 무차원화 변수를 이용하면,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \zeta = \frac{C}{2\sqrt{MK}}, \quad \delta = \frac{N}{K} = \frac{Mg \cos \phi}{K}, \quad \tau = \omega_n t, \quad x(\tau) = \frac{X(t)}{\delta}, \quad v_b = \frac{V_b}{\omega_n \delta} \quad (3)$$

위 (1)~(2)식의 운동방정식을 다음의 (4)~(5)식과 같이 표준형으로 나타낼 수 있다.

$$\ddot{x}(\tau) + 2\zeta\dot{x}(\tau) + x(\tau) = -\mu(\dot{x} + v_b) \quad \text{for } \dot{x} \neq -v_b \quad (\text{slip}) \quad (4)$$

$$\ddot{x}(\tau) = 0, \quad -2\zeta v_b + x(\tau) \leq \mu_s \quad \text{for } \dot{x} = -v_b \quad (\text{stick}) \quad (5)$$

위 식에서 $\dot{x}(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau}$, $\ddot{x}(\tau) = \frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}$ 이다.

불나사-슬라이드 이송계의 마찰특성은 이송속도에 따라 건마찰과 유체윤활특성이 혼합되어 나타나는 것으로 알려져 있는데, 오지한^[25]이 건마찰과 유체윤활 특성을 동시에 가진 안내면 상에서 이송되는 불나사-슬라이드 이송계의 마찰력을 실험적으로 측정된 결과는 Fig. 2에 나타낸 바와 같은데, 이 선도는 Ibrahim^[1,2]과 Thomsen^[3,4], C.-S. Liu^[5], 등이 제안한 Stribeck 윤활저항력을 해석적으로 다루기 쉬운 3차 다항식으로 근사화한 마찰력 선도와 매우 유사하다. 본 연구에서도 Thomsen^[3,4]과 C.-S. Liu^[5], 등과 제안한 바와 같이 마찰계수를 (6-1)식 및 (6-2)식과 같이 상대속도의 3차 다항식 함수로 가정하였으며, 그림으로 나타

내면 Fig. 3 (a), (b)와 같다. (6-2)식은 수치해석의 편의상 상대속도 $v_r = 0$ 에서의 불연속을 피하기 위하여 $|v_r| \leq v_s$ 구간에서 연속함수 형태로 변환한 점을 제외하면 (6-1)식과 동일한 마찰계수 함수이다.

$$\mu(v_r) = \mu_s \operatorname{sgn}(v_r) - \eta_1 v_r + \eta_3 v_r^3 \quad (6-1)$$

$$\begin{aligned} \mu(v_r) &= \frac{\mu_s}{v_s} v_r, \quad \text{for } |v_r| \leq v_s \\ &= \operatorname{sgn}(v_r) [\mu_s - \gamma_1 (|v_r| - v_s) + \gamma_3 (|v_r| - v_s)^3] \quad \text{for } |v_r| > v_s \end{aligned} \quad (6-2)$$

여기서, $v_r = \dot{x} + v_b = \frac{V_s}{\omega_n \delta} \equiv v_s$ 는 슬라이드와 안내면 사이의 무차원화 상대속도이고 η_1 과 η_3 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{3}{2} \frac{\Delta\mu}{v_m}, \quad \eta_3 = \frac{\Delta\mu}{2v_m^3}, \\ \gamma_1 &= \frac{\Delta\mu}{v_m - v_s}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta\mu}{(v_m - v_s)^3} \end{aligned} \quad (7)$$

위에서, $\Delta\mu = \mu_s - \mu_m$ 는 정지마찰계수(Static friction coefficient) μ_s 와 동마찰계수(Minimum of kinetic friction coefficient) μ_m 의 차이이고, $v_m \equiv \frac{V_m}{\omega_n \delta} = \frac{\omega_n V_m}{g \cos\phi}$ 은 마찰계수가 μ_m 일 때의 상대속도이며, $v_s \equiv \frac{V_s}{\omega_n \delta} = \frac{\omega_n V_s}{g \cos\phi}$ 는 연속함수 마찰력 모델에서 마찰계수가 μ_s 일 때의 상대속도이다. 그리고 $\mu_m \leq \mu_s$ 이고, $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ 이다.

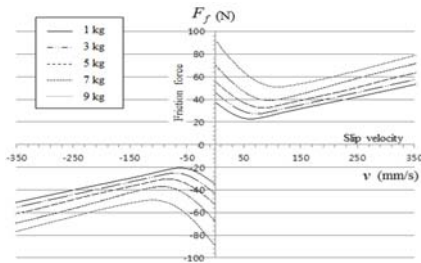
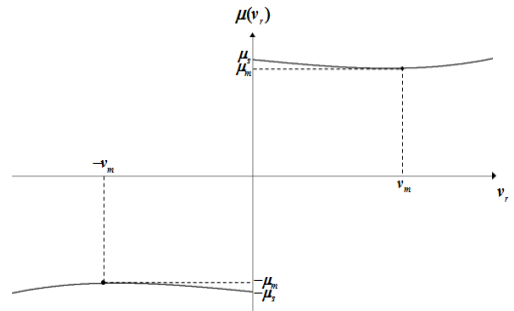
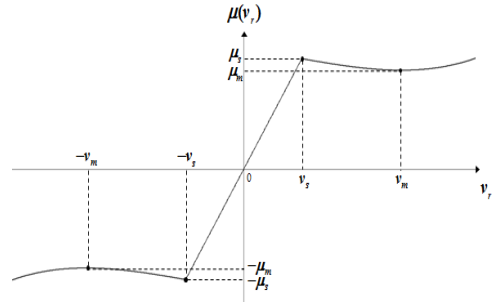


Fig. 2 Measured friction force of a ball screw driven slide^[24]



(a) Friction function as given by eqn. (6-1)



(b) Friction function as given by eqn. (6-2)

Fig. 3 Assumed friction coefficient models

2.2 순진동의 방정식

슬라이드가 $x = \bar{x}$ 에서 정적인 평형상태를 이룬다면 $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ 이 되므로, 운동방정식 (4)식과 (5)식에서 평형위치 \bar{x} 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{x} = -\mu(v_b) = -\mu_s + \eta_1 v_b - \eta_3 v_b^3 \quad (8)$$

평형위치를 기준으로 좌표축을 이동시켜 다음 (9)식과 같이 순진동(Net oscillations) $u(\tau) = x(\tau) - \bar{x}$ 을 정의하면, 운동방정식 (4) ~ (5)식을 다음과 같이 순진동의 운동방정식으로 변환할 수 있다.

$$\ddot{u} + u + \epsilon h(\dot{u}) = 0 \quad \text{for } \dot{u} + v_b \neq 0 \quad (\text{slip}) \quad (9)$$

$$\ddot{u} = 0, \quad u + \epsilon(\eta_1 v_b - \eta_3 v_b^3 - 2\zeta v_b) \leq 0 \quad \text{for } \dot{u} + v_b = 0 \quad (\text{stick}) \quad (10)$$

여기서, $\dot{u} = \frac{du(\tau)}{d\tau}$ 이고, $\epsilon \leq 1$ 는 점성 감쇠력과 마찰력의 영향이 충분히 작다는 것을 나타내기 위한 미소 매개변수이다. 본 연구의 응답 해석 계산 과정에서는 편의상 $\epsilon = 1$ 로 두고 계산한다. 그리고 비선형 함수 $h(\dot{u})$ 는 무차원화 된 감쇠력과 마찰력의 합으로서 (6-1)식과 (7)~(8)식을 이용하여 (4)식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} h(\dot{u}) &\equiv 2\zeta\dot{u} + \mu(\dot{u} + v_b) - \mu(v_b) \\ &= 2\zeta\dot{u} + \mu_s \{ \text{sgn}(\dot{u} + v_b) - 1 \} \\ &\quad + (-\eta_1 + 3\eta_3 v_b^2)\dot{u} + 3\eta_3 v_b \dot{u}^2 + \eta_3 \dot{u}^3 \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 운동방정식의 풀이

운동방정식 (9)~(10)식을 풀기 위해서는 마찰계수 함수인 (6-1)식과 함께 풀어야 하는데 마찰계수 함수가 불연속이고 비선형이므로 닫힌 형식(Closed form)의 주기해를 구할 수 없다. 그러므로 본 연구에서는 감쇠력과 마찰력이 충분히 작다는 가정 하에 비선형 미분방정식의 해법인 섭동법^[26]으로 근사 해를 구한다. 운동 과정에서 점착과 미끄럼 운동이 서로 다른 상태에서 일어나므로 각각의 해를 구한 다음 그것을 종합한다. (9)식의 운동방정식에 대하여 2 가지의 상이한 상태의 주기 해를 고려한다. 그 하나는 $\dot{u} + v_b > 0$ 인 경우에 발생하는 순수 미끄럼 진동(Pure slip oscillation)이고, 다른 하나는 $\dot{u} + v_b \geq 0$ 인 경우에 일어나는 점착-미끄럼 진동(Stick-slip oscillation)이다.

2.3.1 순수 미끄럼 진동

무차원화 슬라이드 속도가 $v_s = \dot{x}_s = \dot{u} + v_b > 0$ 인 구간에서는 마찰력 함수는 연속함수가 되므로 (11)식은 다음과 같이 된다.

$$h(\dot{u}) = h_1 \dot{u} + h_2 \dot{u}^2 + h_3 \dot{u}^3 \quad \text{for } \dot{u} + v_b > 0 \quad (12)$$

여기서,

$$h_1 = 2\zeta - \eta_1 + 3\eta_3 v_b^2, \quad h_2 = 3\eta_3 v_b, \quad h_3 = \eta_3 \quad (13)$$

평균화 방법^[26]을 이용하면 비선형 운동방정식 (9)식의 해는 다음과 같이 된다.

$$u = A \sin \psi, \quad \dot{u} = A \cos \psi, \quad \psi(\tau) = \tau + \theta(\tau) \quad (14)$$

여기서, $A(\tau)$ 와 $\theta(\tau)$ 는 구해야 할 미정 함수이고, $A(\tau)$ 와 $\theta(\tau)$ 의 변환 식은 $\dot{A} \sin \psi + A \dot{\theta} \cos \psi = 0$ 이다. 이 변환 식을 이용하여 미끄럼 진동의 운동방정식 (9)식을 다음의 $A(\tau)$ 와 $\theta(\tau)$ 에 관한 2개의 방정식으로 변환할 수 있다.

$$\dot{A} = -\frac{1}{2} \epsilon A (h_1 + \frac{3}{4} h_3 A^2), \quad \dot{\theta} = 0 \quad (15)$$

위 식은 2개의 평형상태를 갖는데, 하나는 $A(\tau) = 0$ 로서 정적평형 $u(\tau) = 0$ 에 대응되는 무의미 해이고, 다른 하나는 $u(\tau) = A_{ps} \sin(\tau + \theta_1)$ 에 대응되는 유의미 해로서 다음과 같은 주기해이다.

$$\begin{aligned} A(\tau) &= A_{ps} \equiv \sqrt{-\frac{4}{3} h_1 / h_3} \quad \text{and } \theta(\tau) \\ &= \theta_1 = \text{Constant for } \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (16)$$

운동방정식 (9)식의 안정 조건으로부터 $h_1 < 0$ 이면 정적평형 $u(\tau) = 0$ 이 불안정임을 알 수 있는데, (13)식과 (6-1)식으로부터 $h_1 < 0$ 이 되는 조건은 다음과 같이 구해진다.

$$v_b < v_{sc} \equiv v_m \sqrt{1 - \frac{2\zeta}{\eta_1}} \quad (17)$$

위 식에서 알 수 있듯이 $\zeta = 0$ 즉, 계에 점성 감쇠가 없고 입력속도 v_b 가 v_m 보다 작으면 정적평형은 불안정한 상태가 된다. 또한 점성감쇠가 충분히 커서 $\zeta > \eta_1/2$ 이면 계의 평형상태는 안정하게 된다. 순수 미끄럼 주기운동의 진폭 A_{ps} 은 (7)식과 (13)식을 (16)식에 대입하고 (17)식의 관계를 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$A_{ps} = 2\sqrt{v_m^2 - v_b^2 - \frac{2\zeta}{\eta_1}v_m^2} \\ = 2\sqrt{v_{sc}^2 - v_b^2}, \quad v_{ss} < v_b < v_{sc} \quad (18)$$

여기서, v_{sc} 은 순수 미끄럼 운동이 처음으로 발생하는 속도로서 (17)식과 같이 주어지고, v_{ss} 는 처음으로 접촉이 시작되는 속도이다. (14)식과 (16)식으로부터 $\max(\dot{u})=v_b$ 에서 $A_{ps}=v_b$ 일 때 슬라이드의 접촉이 시작된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 이 조건을 위 (18)식에 적용하면 접촉 시작 속도 v_{ss} 는 다음과 같이 구해진다.

$$v_{ss} = \sqrt{\frac{4}{5}}v_{sc} \quad (19)$$

그러므로 접촉이 시작되는 순간의 진폭은 (18)식에 $v_b=v_{ss}$ 를 대입하고, (17)식과 (19)식을 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$A_{ps}|_{v_b=v_{ss}} = A_{ps,max} = \sqrt{\frac{4}{5}}v_m\sqrt{1-\frac{2\zeta}{\eta_1}} \quad (20)$$

2.3.2 점착-미끄럼 진동

무차원화 입력속도 $v_b < v_{ss}$ 인 속도로 운동하던 슬라이드가 미끄럼 이송 중의 어떤 순간에 안내면에 접촉된다면 미끄럼 진동에서 점착으로 불연속적인 가속도 변화가 일어난 것이므로 순수 미끄럼 진동의 경우처럼 미적분 가능한 함수에 적용하는 평균화 방법을 이용하여 해를 구할 수 없다. 그러므로 여기서는 점착 단계와 미끄럼 단계로 구분하여 해를 구한 다음 두 해를 연계시켜서 전체 점착-미끄럼 진동 주기 동안의 해를 구한다.

1) 미끄럼 단계 진동

슬라이드가 점착상태로 정지되어 있는 상태에서 이송계에 입력속도가 계속 인가되면 스프링과 감쇠기에 의한 복원력이 점점 증가되어 결국 최대 정지마찰력보다 커져서 (10)식이 만족되지 않을 때까지 계속된다. 복원력이 최대 정지마찰력보다

커지는 순간 점착 단계가 끝나면서 슬라이드가 미끄러지기 시작한다. 시간 $\tau=0$ 에서 미끄럼 단계가 시작되는 운동의 초기 조건을 다음과 같이 고려하면,

$$u(0) = 2\epsilon\zeta v_b - \epsilon(\eta_1 v_b - \eta_3 v_b^3), \quad \dot{u}(0) + v_b = 0, \\ \text{(Slip starts)} \quad (21)$$

미끄럼 단계의 운동방정식 (9)식은 비선형 미분방정식이지만 연속이므로 섭동법으로 풀 수 있다. 방정식의 해를 다음과 같이 두고,

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) \quad \tau \in [0; \tau_s], \quad \epsilon \ll 1 \quad (22)$$

위 (22)식을 (8)식과 (21)식에 대입하여 ϵ 의 동차항의 계수를 비교하면 다음과 같이 u_0 와 u_1 에 대한 2 개의 초기치 문제를 얻는다.

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0), \quad \dot{u}_0(0) = -v_b \quad (23)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -h(\dot{u}_0), \quad u_1(0) = 2\zeta v_b - c_1 v_b + c_3 v_b^3, \\ \dot{u}_1(0) = 0 \quad (24)$$

위 (23)식의 0차 근사해 u_0 는 다음과 같다.

$$u_0 = -v_b \sin \tau \quad (25)$$

위의 u_0 와 (11)식을 (24)식에 대입하면 초기조건을 만족하는 1차 근사 u_1 을 다음과 같이 구한다.

$$u_1(\tau) = -\frac{3}{2}\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_1\tau\sin\tau + \left(\beta_1 - \frac{55}{32}\beta_3\right)\cos\tau \\ + \frac{1}{2}\beta_3\cos 2\tau - \frac{1}{32}\beta_3\cos 3\tau \quad (26)$$

위에서 β_1, β_2 는 각각 다음과 같다.

$$\beta_1 = 2\zeta v_b - \eta_1 v_b + \frac{15}{4}\beta_3, \quad \text{and} \quad \beta_3 = \eta_3 v_b^3 \quad (27)$$

위 (26)식의 해에서 영년항(Secular term)은 일반적으로는 존재할 수 없기 때문에 무시되지만,

이 경우는 $\tau \sin \tau$ 이 시간 τ 가 미끄럼이 일어나는 짧은 시간 동안에만 국한되므로 해에 포함 될 수 있다. 그러므로 (22), (25), (26)식과 (5)식에 의하여 미끄럼 단계 진동의 근사 해는 최종적으로 다음과 같이 구해진다.

$$u(\tau) = -v_b \sin \tau + \epsilon \left[-\frac{3}{2} \beta_3 + \frac{1}{2} \beta_1 \tau \sin \tau + \left(\beta_1 - \frac{55}{32} \beta_3 \right) \cos \tau + \frac{1}{2} \beta_3 \cos 2\tau - \frac{1}{32} \beta_3 \cos 3\tau \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

for $\tau \in [0; \tau_s]$ (Slip phase) (28)

위에서 미소 항 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 을 무시하면, 속도 \dot{u} 와 가속도 \ddot{u} 는 위 식을 미분함으로써 구할 수 있다.

점착 시작 시간(Stick start time) τ_s 는 미끄럼 운동 상태에서 $\dot{u} + v_b = 0$ 이 되는 순간 점착이 발생되므로, 위 (28)식에서 $\dot{u}(\tau) = -v_b$ (단, $\tau > 0$)이 될 때의 시간으로부터 구할 수 있다. 그러나 초월함수 계산이 복잡하므로 Thomsen^[4]의 방법을 이용하여 $\dot{u}(\tau) = -v_b$ 의 해가 $\tau_s \in [\pi; 2\pi]$ 의 구간 내에 존재해야 하는 조건으로부터 먼저 Taylor급수 전개를 이용해서 이 시간 구간의 중앙인 $\tau_s = 3\pi/2$ 에서의 $\dot{u}(\tau_s)$ 를 다음과 같이 대수함수 형태로 변환한다.

$$\dot{u}(\tau_s) = \dot{u}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ddot{u}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(\tau_s - \frac{3\pi}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\tau_s - \frac{3\pi}{2}\right)^2 \quad (29)$$

위 (29)식에서 $\dot{u}(\tau_s) = -v_b$ 라 두면 점착 시작 시간 τ_s 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tau_s = \frac{3\pi}{2} - \frac{v_b + \dot{u}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\ddot{u}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + \mathcal{O}\left(\tau_s - \frac{3\pi}{2}\right)^2 \quad (30)$$

(28)식에서 $\dot{u}(\tau)$ 와 $\ddot{u}(\tau)$ 를 구하여 (30)식에 대입하고, 고차항의 미소량을 무시한 경우의 근사 점착 시작 시간을 τ'_s 라 하면 다음과 같이 구해진다.

$$\tau'_s = \frac{3\pi}{2} + \frac{8v_b + 4\beta_1 - 13\beta_3}{8v_b - 6\pi\beta_1 - 16\beta_3} \quad (31)$$

위의 점착 시작 시간 τ'_s 은 마찰계수 차이 $\Delta\mu$ 가 상대적으로 클 때이고, 마찰계수의 차이 $\Delta\mu$ 가 매우 작으면 τ_s 는 2π 에 가까워지므로 이 경우에는 $\tau_s = 2\pi$ 에서의 Taylor 급수 전개를 2차 항까지 고려하여 근사 점착 시작 시간 τ'_s 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tau''_s = 2\pi - \sqrt{\frac{2\pi\beta_1}{\pi\beta_1 - v_b}} \quad (32)$$

위 (31)식과 (32)식의 τ'_s 와 τ''_s 를 적절하게 고려하여, 마찰계수 차이 $\Delta\mu$ 의 크기에 상관없이 적용할 수 있는 점착 시작 시간 τ_s 를 Thomsen^[4]의 방법을 준용하여 최종적으로 다음과 같이 결정한다.

$$\tau_s = \tau'_s + e^{(v_b - v_{ss})/\gamma} (\tau''_s - \tau'_s) \quad (33)$$

2) 점착 단계 운동

시간 $\tau = \tau_s$ 에서 점착이 시작되면 슬라이드의 무차원 순진동속도가 $\dot{u} = -v_b$ (즉, 슬라이드의 무차원 속도 $\dot{x}_s = \dot{u} + v_b = 0$)로 되어 슬라이드는 정지 상태로 되지만 입력속도 v_b 는 계속 유지되므로 입력 변위는 증가한다.

$$\dot{u} = -v_b, \quad \ddot{u} = 0$$

$$u(\tau) = u(\tau_s) - v_b(\tau - \tau_s) \quad \text{for } \tau \in]\tau_s; \tau_c[\quad (\text{Stick}) \quad (34)$$

점착 단계가 끝나는 시간 $\tau = \tau_c$ 는 위 (34)식에 서 주기성을 이용하여 구한다. 즉, 위 식의 우변의 $u(\tau_s)$ 는 (28)식에서 미끄럼 단계가 끝나는 시간으로부터 구할 수 있고, 점착 단계가 끝나는 시간은 미끄럼 단계의 시작 시간이므로 (28)식에서 $u(\tau_c) = u(0)$ 라 두고 $u(0)$ 를 구한 다음, 주기 τ_c 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\tau_c = \tau_s + \frac{u(\tau_s) - u(0)}{v_b} \quad (35)$$

3) 점착-미끄럼 진동의 진폭

(28)식의 미끄럼 단계의 점착-미끄럼 진동 변위 $u(\tau)$ 는 조화진동임을 보여 준다. 그러므로 한 주기 동안의 점착-미끄럼 진동에서 가속도 \ddot{u} 가 $\ddot{u}=0$ 일 때에 속도 \dot{u} 가 정점(頂点, Peak)이 되고, 속도 \dot{u} 가 $\dot{u}=0$ 일 때에는 진동 변위 u 가 정점(頂点, Peak)이 된다. 또한 한 주기의 조화진동 동안에 속도 $\dot{u}=0$ 인 점은 2곳이 있으므로 진동 변위의 정점 변위도 (-) 정점변위와 (+) 정점변위의 2곳이 있다. 그러므로 변위 진폭은 정점-정점변위 (Peak to peak amplitude)의 절반으로 표시할 수 있다.

(28)식으로부터 속도 $\dot{u}(\tau)$ 를 구하여 $\dot{u}(\tau)=0$ 인 조건으로부터 정점 변위가 발생하는 시간 τ_{p-} 과 τ_{p+} 를 구할 수 있다. 그러나 초월함수 계산이 복잡하므로 (22)식과 (25)식, (26)식을 이용하여 가속도 \ddot{u} 가 $\ddot{u}(\tau)=0$ 이 되는 시간 부근에서의 속도 $\dot{u}(\tau)$ 를 근사적으로 대수함수 형태로 구한 다음, $\dot{u}(\tau)=0$ 의 조건으로부터 정점 변위 발생 시간 τ_{p-} 와 τ_{p+} 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tau_{p-} = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{52}{32}\beta_3, \quad \tau_{p+} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{52}{32}\beta_3 \quad (36)$$

이들 시간에서의 정점 변위를 (28)식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(\tau_{p-}) = -v_b + 2\beta_3 + \frac{3\pi}{4}\beta_1, \quad u(\tau_{p+}) = v_b + 2\beta_3 - \frac{\pi}{4}\beta_1 \quad (37)$$

위 두 식의 진동변위를 이용하면 점착-미끄럼 진동의 진폭 A_{ss} 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_{ss} = \frac{1}{2} |u(\tau_{p+}) - u(\tau_{p-})| = \left| v_b - \frac{\pi}{2}\beta_1 \right| \\ = \left| (1-\pi\zeta)v_b + \frac{3\pi\Delta\mu}{4} \frac{v_b}{v_m} \left[1 - \frac{5}{4} \left(\frac{v_b}{v_m} \right)^2 \right] \right|, \quad v_b < v_{ss} \quad (38)$$

위 식에서 v_{ss} 는 (19)식으로 주어진다.

위 (38)식으로부터 마찰계수의 차이가 크지 않고 가정하면, 점착-미끄럼 진동의 최대진폭 $A_{ss,max}$ 은 $v_b = v_{ss}$ 일 때 다음과 같이 구해진다.

$$A_{ss,max} = A_{ss} \Big|_{v_b=v_{ss}} \approx v_{ss} = \sqrt{\frac{4}{5} v_m \sqrt{1 - \frac{2\zeta}{\eta_1}}} = A_{ps,max} \quad (39)$$

4) 점착-미끄럼 진동의 진동수

시간 $\tau = \tau_e$ 에서 1 주기의 점착-미끄럼 진동이 일어나므로 이 점착-미끄럼 진동의 각운동 주기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega_{ss} = \frac{2\pi}{\tau_e} = \frac{2\pi v_b}{v_b \tau_s + u(0) - u(\tau_s)} \quad (40)$$

3. 결과 및 고찰

Fig. 1에 나타난 경사 안내면에서 정속으로 이송되는 볼나사-슬라이드 이송계의 수학적 모형에 대하여 섭동법을 이용한 근사해법으로 구한 해의 정확성을 검증하기 위하여 4차 Rung Kutta 적분법으로 구한 수치적분 해와 비교한다. 수치적분의 적분 시간간격은 10^{-5} 초로 하였다. 슬라이드 이송계의 모델링 데이터는 다음 Table 1에 정리하였다.

Table 1 Modeling data of the ball screw driven slide system and friction function

Parameter	Data
- Slide mass, M (kg)	1
- Spring constant, K (N/m)	10
- Damping coefficient, C (Ns/m)	1
- Guideway skew angle ϕ (Degree)	0
- Static friction coefficient, μ_s	0.4
- Min. kinetic friction coefficient, μ_m	0.3
- Relative slip velocity corresponding to static friction coefficient, V_s (m/s)	0.001
- Relative slip velocity corresponding to minimum kinetic friction, V_m (m/s)	0.5

Fig. 4 (a), (b)는 Table 1의 모델링 데이터를 사용하고 입력속도 $v_b = 0.3$ 일 경우에 대하여 마찰계수 근사해석과 수치적분으로 구한 슬라이드의 변위 $x_s(\tau)$, 슬라이드의 진동 $x(\tau)$ 을 각각 비교하여 나타내었다.

Fig. 5는 Table 1의 모델링 데이터를 사용하고 입력속도 $v_b = 0.3$ 일 경우에 대하여 슬라이드의 점착-미끄럼 진동 진폭 A_1, A_0 를 근사해석과 수치적분으로 구하여 비교한 것이며, 해석의 결과가 매우 잘 일치한다.

Fig. 6 (a), (b), (c)는 Table 1의 모델링 데이터를 사용하고 입력속도가 $v_b = 0.2, 0.3, 0.3944$ 인 경우에 대하여 한 주기 동안의 슬라이드의 순진동 $u(\tau), \dot{u}(\tau), \ddot{u}(\tau)$ 과 응답의 위상평면 표시를 근사해석과 수치적분으로 구하여 각각 비교하였다. 여기서 $v_b = 0.3944$ 는 점착-미끄럼 구간의 상한 속도 v_{se} 이다.

Fig. 7 (a), (b), (c), (d)은 이송계의 고유진동수 ω_n , 감쇠비 ζ , 안내면 경사각 ϕ , 그리고 마찰계수

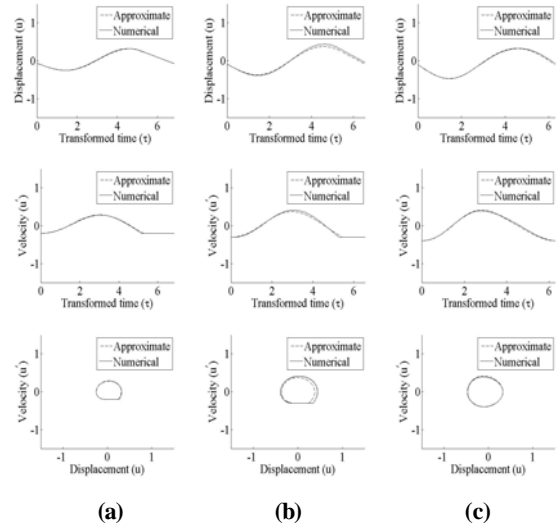


Fig. 6 Comparison of 1-period responses; $u(\tau), \dot{u}(\tau)$, and phase plane plot with input velocities of (a) $v_b=0.2$ (stick-slip), (b) $v_b=0.3$ (stick-slip), and (c) $v_b=0.3944$ (pure-slip)

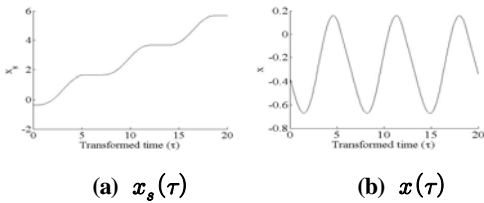


Fig. 4 Slide displacements $x_s(\tau)$ and $x(\tau)$

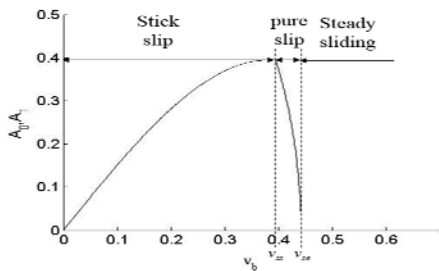


Fig. 5 Stick-slip vibration amplitude with $v_b=0.3$

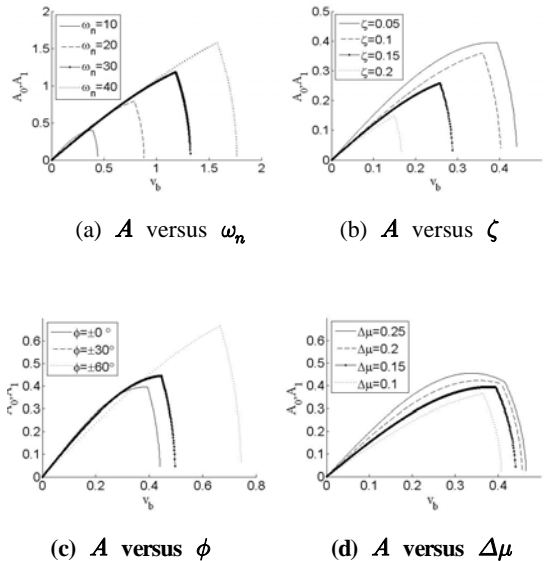


Fig. 7 Variation of the stick-slip vibration amplitude A of with parameters ω_n, ζ, ϕ , and $\Delta\mu$

차이 $\Delta\mu = \mu_s - \mu_m$ 의 변화에 따른 슬라이드의 점착-미끄럼 진동 진폭 A_1, A_0 의 변화를 구하여 비교한 것이다.

Thomsen^[3,4]이 벨트-슬라이드 이송계(Slide on belt system) 마찰기인 진동 연구에서 밝힌 바와 마찬가지로 본 연구에서의 경사 안내면 상의 블나사-슬라이드 이송계의 진동과 안정성도 입력속도 v_b 에 종속적이다. 뿐만 아니라 이송계의 마찰기인 진동의 진폭과 안정성은 계의 고유진동수 ω_n , 감쇠비 ζ 와 마찰계수 차이 $\Delta\mu$, 그리고 안내면 경사각 ϕ 등의 영향을 받는다.

(39)식에서 $v_b < v_{ss}$ 이면 이송계는 정상상태 점착-미끄럼 진동(Stick-slip oscillations)을 하게 된다. 즉, 진동의 변위 진폭과 속도 진폭이 일정한 정상상태를 유지하면서 진동한다.

(18)식에서 $v_{ss} < v_b < v_{sc}$ 이면 정상상태 순수 미끄럼 진동(Pure-slip oscillations)을 한다. 그런데 이 속도구간의 양 극단 속도가 $v_{ss} = v_{sc}$ 로 같아지면 (18)식의 근호 값이 음이 되기 때문에 순수 미끄럼 진동이 일어나지 않게 된다. 즉, 순수 미끄럼 진동이 일어나는 속도 영역이 존재하지 않는다.

이런 조건은 $\frac{\zeta}{\eta_1} = \frac{2v_m\zeta}{3(\mu_s - \mu_m)} = \frac{2v_m}{3} \frac{\zeta}{\Delta\mu} > \frac{1}{2}$ 인 경우, 즉 점성감쇠가 충분히 크거나 정지마찰과 동마찰의 차이가 충분히 작아서 $\frac{\zeta}{\Delta\mu} > \frac{3}{4v_m}$ 이 되는 경우이므로 (18)식의 근호 안이 음이 되어 계는 순수 미끄럼 진동이 발생할 수 없고, 점착-미끄럼 진동과 정상상태 미끄럼 중의 어느 한 경우만 일어난다.

(18)식에서 $v_b > v_{ss}$ 이면 이송계는 $x(\tau) = \bar{x}$ 인 정적 평형 위치를 기준으로 진동 없이 미끄럼 운동만 일어나는 정상상태 미끄럼 운동을 하게 된다.

Fig. 7과 (20)식과 (39)식에서 알 수 있듯이 이송계의 마찰기인 진동 진폭의 최대값 $A_{ss,max} = A_{ps,max}$ 은 근사적으로 v_m 에 비례하는데, $v_m = \frac{\omega_n V_m}{g \cos \phi}$ 의 관계를 가지므로 고유진동수 ω_n 이 커지면 v_m 도 커지는 결과가 되어 결국 진동 진폭 A 도 커진다. 즉, 이송계의 고유진동수 ω_n 이 클수록 점착-미끄럼 진동의 진폭 A 도 크게 된다.

이송계의 고유진동수가 일정할 때, 감쇠비 ζ 가

증가하면 진폭 A 는 감소한다. 그러나 감쇠비 ζ 가 계속 증가하여 $\zeta > \frac{\eta_1}{2} = \frac{3\Delta\mu}{4v_m}$ 의 조건이 되면, (17)식과 (20)식 및 (39)식에서 근호 안의 값이 음이 되므로 진폭 A 가 존재하지 않으며 미끄럼-점착 진동이 발생하지 않게 된다.

한편, 이송계의 고유진동수와 감쇠비가 일정할 때, 안내면 경사각 ϕ 이 0도 ~ ± 90 도 범위에서 증가하면 $v_m = \frac{\omega_n V_m}{g \cos \phi}$ 이 커지므로 결국 진동 진폭 A 가 증가된다.

4. 결론

본 연구에서는 마찰이 있는 경사 안내면에서 블나사로 이송되는 슬라이드 이송계의 마찰기인 점착 진동을 해석하기 위하여 이송계를 1 자유도 질량-스프링-감쇠기로 모델링하고 마찰력을 상대속도의 3차 다항식 함수로 가정하여 운동방정식을 유도하였으며, 이송계의 운동방정식이 비선형 미분방정식이므로 마찰력 함수의 기울기 또는 정지마찰계수와 동마찰계수의 차이가 작다고 가정하고 섭동법을 이용하여 근사해를 구하였다. 근사해의 정확성을 검증하기 위하여 4차 Runge Kutta 수치적분법으로 구한 해와 비교하였다. 해석결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 정지마찰계수 μ_s 와 동마찰계수 μ_m 의 차이 $\Delta\mu$ 가 정지마찰계수의 38% 미만일 경우에는 섭동법을 이용한 근사해석으로 구한 이송계의 점착-미끄럼 진동 응답이 수치적분법으로 구한 결과와 매우 잘 일치한다. 그러나 마찰계수 차이 $\Delta\mu$ 가 정지마찰계수의 40% 이상이면 근사해석 결과는 수치적분 결과에 비해 무시할 수 없을 정도의 상당한 차이를 보인다.

2) 슬라이드 이송계의 마찰기인 진동은 이송속도 v_b 에 종속적이다;

$v_b < v_{ss} = v_m \sqrt{\frac{4}{5} \left(1 - \frac{2\zeta}{\eta_1} \right)}$ 이면 이송계는 정상상태 점착-미끄럼 진동(Stick-slip oscillations)을 한다.

$$v_{ss} < v_b < v_{sc} = v_m \sqrt{1 - \frac{2\zeta}{\eta_1}}$$

수 미끄럼 진동(Pure-slip oscillations)을 한다. 그런데 이 속도구간의 양 극단 속도가 $v_{ss} = v_{sc}$ 로 같아지면 당연히 순수 미끄럼 진동이 일어나는 속도영역이 존재하지 않는다. 이런 조건은 $\frac{\zeta}{\eta_1} = \frac{2v_m\zeta}{3(\mu_s - \mu_m)} = \frac{2v_m}{3} \frac{\zeta}{\Delta\mu} > \frac{1}{2}$ 인 경우로서 점성 감쇠가 충분히 크거나 정지마찰과 동마찰의 차이가 충분히 작아서 $\frac{\zeta}{\Delta\mu} > \frac{3}{4v_m}$ 이 되는 경우이다.

$v_b > v_{ss}$ 이면 이송계는 $x(\tau) = \bar{x}$ 인 정적 평형 위치를 기준으로 진동 없이 미끄럼 운동만 일어나는 정상상태 미끄럼 운동(Steady sliding)을 한다.

3) 슬라이드 이송계의 마찰기인 진동 진폭의 최대값 $A_{ss,max} = A_{ps,max}$ 은 근사적으로 $v_m = \frac{\omega_n V_m}{g \cos\phi}$ 에 비례하는데, 동일한 속도입력 V_b 이라도 계의 고유진동수 ω_n 가 커지면 v_m 도 커지는 결과가 되어 결국 마찰기인 진동 진폭 A 도 커진다.

4) 슬라이드 이송계의 고유진동수가 일정할 때, 감쇠비 ζ 가 증가하면 마찰기인 진동 진폭 A 는 감소한다. 그러나 감쇠비 ζ 가 계속 증가하여 $\zeta > \frac{\eta_1}{2} = \frac{3\Delta\mu}{4v_m}$ 의 조건이 되면, (17)식과 (20)식 및 (39)식의 근호 안의 값이 음이 되므로 진폭 A 또는 진폭의 최대값 $A_{ss,max} = A_{ps,max}$ 가 존재하지 않으며 따라서 미끄럼-점착 진동이 발생하지 않고 정상상태 슬라이딩이 일어난다.

5) 이송계의 고유진동수와 감쇠비가 일정할 때, 안내면 경사각 ϕ 이 0도 ~ ± 90 도 범위에서 증가되면 $v_m = \frac{\omega_n V_m}{g \cos\phi}$ 가 커지므로 진동 진폭 A 이 증가된다.

후 기

“이 논문은 2012~2013년도 창원대학교 연구비 지원에 의하여 연구되었음.”

REFERENCES

1. R. A. Ibrahim, “Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos: part I - mechanics of friction, friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos,” ASME DE-Vol 49, New York, pp. 107-121, 1992.
2. R. A. Ibrahim, “Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos: part II - dynamics and modeling, friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos,” ASME DE-Vol 49, New York, pp. 123-138, 1992.
3. J. J. Thomsen, “Using fast vibrations to quench friction-induced oscillations,” J. of Sound and Vibration, Vol. 228, pp. 1079-1102, 1999.
4. J. J. Thomsen, A. Fidlin, “Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes,” Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 38, pp. 389-403, 2003.
5. C.-S. Liu and W.-T. Chang, “Frictional behaviour of belt-driven and periodically excited oscillator,” J. of Sound and Vibration, Vol. 258, No. 2, pp. 247-268, 2002.
6. J. Kang, C. M. Krousgrill, F. Sadeghi, “Oscillation pattern of stick-slip vibrations,” Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 44, pp. 820-828, 2009.
7. J.-J. Sinou, Cayer-Barrioz, H. Berro, “Friction-induced vibration of a lubricated mechanical system,” Tribology International, Vol. 61, pp. 156-168, 2013.
8. H. Ouyang, J.E. Mottershed, M.P. Cartmell, D.J. Brookfield, “Friction-induced vibration of an elastic slider on a vibrating disc,” International J. of Mechanical Sciences, Vol. 41, pp. 325-336, 1999.
9. F. Van De Velde, P. De Baets, “Mathematical approach of the influencing factors on stick-slip induced by decelerative motion,” Wear, Vol. 201, pp. 80-93, 1996.
10. F. Van De Velde, P. De Baets, J. Degrieck,

- “The friction force during stick-slip with velocity reversal,” *Wear*, Vol. 216, pp. 138-149, 1998.
11. P. L. Ko, Marie-Calude Taponat, R. Pfalfer, “Friction-induced vibration - with and without external disturbance,” *Tribology International*, Vol. 34, pp. 7-24, 2001.
 12. D. Karnopp, “Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems,” *ASME J. of Dynamic Systems*, Vol. 107, Keynote paper, pp. 100-103, 1995.
 13. P. Vielsack, “Stick-slip instability of decelerative sliding,” *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, pp. 237-247, 2001.
 14. O. Bilkay, O. Anlagan, “Computer simulation of stick-slip motion in machine tool slideways,” *Tribology International*, Vol. 37, pp. 347-351, 2004.
 15. H. Yanada, Y. Sekikawa, “Modeling of dynamic behaviors of friction,” *Mechatronics*, Vol. 18, pp. 330-339, 2008.
 16. E. Marui, H. Endo, M. Hashimoto, and S. Kato, “Some considerations of slideway friction characteristics by observing stick-slip vibration,” *Tribology International*, Vol. 29, No. 3, pp. 251-262, 1996.
 17. J. J. Choi, S. I. Han, Jong Shik Kim, “Development of a novel dynamic friction model and piecewise tracking control using adaptive back-stepping sliding mode controller,” *Mechatronics*, Vol. 16, pp. 97-104, 2006.
 18. I. H. Baek, J. Y. Jung, S. Kim, “Behavior analysis on stick-slip of hydraulic telescopic boom,” *Proc. of the Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng. Conference*, pp. 296-303, 2002.
 19. P. E. Dupont and E. P. Dunlap, “Friction modeling and control in boundary lubrication,” *Proc. of the American Control Conference*, San Francisco, pp. 1910-1914, 1993.
 20. C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, and P. Lischinsky, “Dynamic friction models and control design,” *Proc. of the American Control Conference*, San Francisco, pp. 1920-1926, 1993.
 21. G. Luengo, J. Israelachvili, S. Granick, “Generalized effects in confined fluids: new friction map for boundary lubrication,” *Wear*, Vol. 200, pp. 328-335, 1996.
 22. P. E. Dupont, V. Hayward, B. Armstrong, and F. Altpeter, “Single state elastoplastic friction models,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 5, pp. 787-792, 2002.
 23. M. Tajdari, M. Javadi, “A new experimental procedure of evaluating the friction coefficient in elastic and plastic regions,” *J. of Materials Processing Technology*, Vol. 177, pp. 247-250, 2006.
 24. Sun-Il Kim, Won-Sik Choi, Jae-Hwan Son, Eun-Suk Jang, Young-Moon Lee, “Analysis of Shear and friction Characteristics in Drilling process,” *J. of the KSMPE*, Vol. 11, No. 6, pp. 22-27, 2012.
 25. J.-H. Oh, “A study on friction characteristics of a ball screw driven linear slideway,” MS thesis, Changwon National University, pp. 23, 2013.
 26. R. E. Mickens, “An introduction to nonlinear oscillations,” Cambridge University Press, 1981.