Journal for History of Mathematics
Vol. 27 No. 6 (Dec. 2014), 403–408
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2014.27.6.403

Gödel's Maximal Ontology

괴델의 극대 존재론

Hyun Woosik 현우식

The interdisciplinary study addresses the Gödel's ontology from the perspective of the mathematical maximality. We first investigate Gödel's God having all the positive properties as the intersection of ultrafilters in his own ontological proof(1970). Regarding the axiom of choice and his compactness theorem(1930), the next part discusses the ontological meaning of the maximal rather than the maximum in terms of an episteme space. The results show that Gödel's ontological arguments imply all the existence of the maximal reality, and all the human's epistemological boundedness as well.

Keywords: Gödel, ontology, maximality, axiom of choice, ultrafilter; 괴델, 존재론, 극대성, 선택 공리, 극대 필터.

MSC: 01A05, 03A05 ZDM: A30, E20

1 왜 괴델의 극대성인가

무한과 유한을 구분하고 다루기 위해서 필요한 현대 수학의 개념적 도구에는 자연수 집합과 선택 공리(axiom of choice)가 포함되어야 한다.[1)] 여기에서 선택 공리는 우리가 경험한 후 사용할 수 있는 대상 내에 포함될 수 없다. 선택 공리는 수용 여부와 관련된 문제이다.

괴델(K. Gödel, 1938) [4]과 코헨(P. Cohen, 1963) [1]에 의하여 선택 공리가 체르멜로-프랭켈(Zermelo-Fraenkel)의 공리적 집합론 내에서 상대적 무모순성과 공리적 독립성을 가진다는 것이 증명되었다. 그러므로 선택 공리의 사용에 관하여 선택 공리에 대한 수학적 인식이 가능하다. 그러나 선택 공리의 존재에 관한 의미는 무한과 관련하여 수학과 철학을 위한 새로운 문제를 제시해 준다. 괴델에게 선택 공리의 문제는 인식론적 차원에서 뿐만 아니라 존재론적 차원에서도 중요한 문제였다. 특히 괴델의 존재론과 관련하여 선택 공리의 문제는 극대성(maximality)의 문제와 연결되어 있다.

Hyun Woosik: Hoseo Univ. E-mail: `godel@hoseo.edu`
Received on Oct. 24, 2014, revised on Nov. 24, 2014, accepted on Dec. 1, 2014.

1) 임의의 집합 $X \neq \varnothing$에 대하여 다음과 같이 선택함수 f의 존재를 보장하는 공리이다. 단 여기에서 정의역은 $\varnothing \notin \wp(X) \neq \varnothing$를 만족해야 한다. $\forall X \exists f (f : \wp(X) \longrightarrow X \wedge (\forall A (A \in X \wedge A \neq \varnothing \longrightarrow f(A) \in A))$

이 논고는 괴델이 생각했던 수학적 극대성을 철학적 존재론의 입장에서 새롭게 해석하고자 하는 학제적 작업이다. 이를 위하여 현대 수학에서 무한을 다루기 위해 필수적인 도구로 사용되는 극대성의 구상과 논리를 해석할 것이다. 논증의 범위는 괴델이 정의한 극대성과 그 의미에 집중될 것이다.

2 괴델의 존재론적 증명에서의 극대성

극대성에 대한 괴델의 수학적 해석은 "존재론적 증명"(1970)을 통해 강조되어 있다[6]. 괴델에 의하면(*Phil.* XIV, 106) 극대 양립시스템(maximal compatible system)이 가능하다.[2] 여기에서 말하는 극대 양립시스템이란 시스템이 (i) 모순을 갖지 않으면서 (ii) 극대성을 가질 수 있음을 뜻한다. 이를 위해서 괴델은 다음과 같은 긍정성의 논리곱 공리를 채택한다.

$$P(\varphi) \wedge P(\psi) \longrightarrow P(\varphi \wedge \psi)$$

여기에서 $P(\varphi)$는 φ의 긍정성을 표현한다. 따라서 위의 공리는 긍정성의 논리곱(conjunction)을 보장한다. 그러므로 긍정성의 논리곱은 긍정성을 가진다. 이 공리를 통해서 괴델은 긍정성에 대한 필터(filter)를 구성한다.[3] 필터는 1937년 카르당(H. Cartan, "Theorie des filtres")에 의해서 정의된 것인데, 집합론, 위상수학, 대수학, 모델이론 등에서 유용하게 사용되고 있는 개념이다. 필터 F는 집합 $A, B \subseteq X$에 대하여 다음 조건을 만족할 때 X 위에서의 필터라고 정의된다.

$$\begin{array}{ll} \text{(F1)} & (A \in F) \wedge (A \subseteq B) \longrightarrow (B \in F) \\ \text{(F2)} & (A, B \in F) \longrightarrow (A \cap B \in F) \\ \text{(F3)} & \varnothing \notin F \end{array}$$

필터 F가 X 위에서의 필터이면, $X \in F$이다. 여기에서 조건 (F2)는 유한 교집합(finite intersection)에 대하여 필터 F가 닫혀있다는 것을 정의한다. 그러므로 괴델의 긍정성이 필터를 만족하면, 긍정성은 유한 교집합에 대하여 닫혀 있으므로, 논리곱의 긍정성이 성립된다.

괴델은 다음 긍정성의 배타적 논리합(exclusive or)을 공리로 채택한다.

$$P(\varphi) \vee P(-\varphi)$$

이 공리에 의해서 다음의 조건을 만족하는 극대 필터(ultrafilter) U가 성립된다.

$$(U)\ \text{집합} A \subseteq X \text{에 대하여}, (A \in U) \vee (A \notin U)$$

이 필터는 극대(maximal)의 조건을 만족하는 필터를 의미한다. 그리고 모든 필터에 대하여 극대 필터가 존재한다.[4] 즉 모든 필터는 극대 필터에 포함된다.

2) K. Gödel, *Collected Works III*, 435.
3) A. Levy, *Basic Set Theory* (Berlin: Springer Verlag, 1979), 141–143.
4) 이것은 선택 공리에 의해서 증명될 수 있다.

괴델이 정의한 긍정성은 극대성을 만족하면서 극대 필터 U에 해당된다. 이러한 공리에 근거하여 괴델은 신을 모든 긍정성을 가진 존재로 정의한다.[5)] 괴델이 정의한 신 G은 수학적으로는 극대 필터의 교집합 (the intersection of ultrafilter) $\cap U$을 의미하는 것이다. 이때, 이 극대 필터의 교집합에는 긍정성들 사이의 무모순성이 보장되므로 극대 양립가능 시스템이 성립된다. 이 시스템 내에서 극대 필터의 교집합이 존재하고 극대 필터에 포함되므로, 괴델이 정의한 신은 존재함이 증명된다. 괴델은 신에 대한 존재론적 증명을 통하여 극대성 (maximality) 을 가지는 필터의 교집합이 존재한다는 것을 증명한 셈이다.

3 괴델의 극대성의 존재론적 의미

극대적 대상의 존재에 대한 괴델의 증명은 정당화될 수 있는가? 일정한 조건 하에서 극대적 대상의 존재를 정당화시켜 주는 수학적 법칙이 극대성 법칙 (maximal principles) 으로 불리고 있는데, 체르멜로의 정렬법칙 (Zermelo's well-ordering principle, 1904), 조른의 레마 (Zorn's lemma, 1935), 쿠라토프스키의 법칙 (Kuratowski principles, 1922), 하우스도르프 (Hausdorff principles, 1914) 의 법칙 등이 포함된다[10]. 이러한 법칙들은 현대 수학의 기초를 논의하는 데 필수적인 '선택 공리 (the axiom of choice)' 와 논리적으로 동등한 것으로 증명된다는 점에 주목할 필요가 있다. 선택 공리는 유한한 인간이 무한을 다루는 근원적인 주제와 관련되어 있으며, 무한의 구조를 연구할 때 반드시 필요한 논리적 도구이다[7, 8].

선택 공리는 칸토어 (G. Cantor) 가 제기했던 추측으로부터 시작되었다. 이 추측은 현재 모든 집합은 정열 될 수 있다는 정렬정리 (well-ordering theorem) 로 불린다. 1904년 체르멜로는 칸토어의 추측에 관하여 임의의 집합 $X \neq \varnothing$에 대하여 선택함수 $f : \wp(X) \longrightarrow X$가 존재해서 모든 집합 $A \subseteq X$에 대하여 $f(A) \in A$를 얻을 수 있다는 법칙을 제시했다. 여기에서 정의역은 $\varnothing \notin \wp(X) \neq \varnothing$을 만족해야 한다. 1908년에 체르멜로는 이 법칙을 선택 공리 (Axiom der Auswahl) 라고 명명했다. 이 선택함수의 존재를 보장하는 선택 공리가 논쟁의 대상이 된 이유 가운데 한 가지는 선택함수에 대한 명확한 정의가 제공되지 않았기 때문이다. 이에 대하여 괴델은 선택 공리가 안전하다고 증명한다. 괴델에 의하면 선택 공리를 배제한 집합론의 공리가 모순을 낳지 않기 때문에 선택 공리가 추가되어도 집합론의 무모순성은 보존된다는 것이다.

괴델은 선택 공리가 집합론의 다른 공리들과 모순이 없음을 증명했다 (1938, 1939)[4, 5]. 괴델에 의하면 폰 노이만 (von Neumann, 1929) 의 공리적 집합론 시스템을 사용하여 선택 공리를 새로운 공리로 추가하여도 무모순성이 증명될 수 있다. 괴델은 모든 수학적으로 구성가능한 집합 (constructible sets) 으로 구성된 모델을 구축하는 방법을 채택한다. 괴델은 이러한 구성적 방법이 "반-직관주의적 (semi-intuitionistic)" 의미 내에서 이해될 수 있다고

5) $G(x) \equiv (\forall \varphi)[P(\varphi) \longrightarrow \varphi(x)]$

보았다.[6] 괴델은 수학의 토대를 위하여 플라톤주의와 직관주의의 상호보완의 필요성과 그 의미를 잘 알고 있었다[9].

선택 공리의 상대적 무모순성 증명을 통해서 괴델은 체르멜로-프랜켈의 공리적 집합론에서 선택 공리의 사용을 정당화하였다. 즉 괴델에게는 실재하는 무한집합에 대하여 선택함수가 존재한다는 것이다. 그러므로 괴델에게 선택 공리에 의해서 함의되는 수학적 대상들의 존재성이 보장되며 그 수학적 대상들은 실재하는 것이다[2].

극대성과 관련하여 괴델은 일찍이 컴팩트 정리(the compactness theorem, 1930)를 증명했다[3]. 이 정리에 의하면, Σ를 논리식의 집합이라 하고, Σ의 모든 유한 부분집합이 모델을 가지면, Σ가 모델을 갖는다. 괴델의 컴팩트 정리는 모든 필터가 극대 필터로 확장될 수 있다는 정리와 논리적으로 동등하다.[7] 즉 괴델의 컴팩트 정리는 모든 필터가 극대 필터를 갖는다는 것을 보여준다. 여기에서 선택 공리는 컴팩트 정리를 함의한다. 그러므로 선택 공리에 의해서 모든 필터가 극대 필터를 가진다는 정리가 성립된다.

선택 공리와 존재론적 증명을 통하여 괴델이 특히 극대성의 존재론에 주목했음을 알 수 있다. 예를 들어, 괴델의 인식공간 E를 크기를 인식할 수 있는 순서집합 $(X, \leq)$이라고 하자.[8] 괴델이 인지가능한 대상들의 집합 A는 집합 X의 부분집합이고, a는 집합 A의 원소라고 하자. 집합 X에 속하는 모든 원소 a에 대하여 다음이 성립될 때,

$$a \leq x \longrightarrow a = x$$

a를 집합 A의 극대 원소(maximal element of A)라고 정의할 수 있다. 여기에서 a는 인식공간 E 내에서 더 큰 것을 인지할 수 없는 대상을 의미한다. 즉 인지공간 내에서 극대원소 a보다 더 큰 대상은 존재할 수 없다. 그러므로 a는 괴델에게 더 큰 것을 인지할 수 없는 대상으로 인식되는 것을 의미한다. 여기에서 인식가능한 대상들의 집합 A의 모든 원소보다 큰 원소 a가 있다면 그 원소는 최대 원소(the greatest element of) 에 해당될 것이다.[9]

극대 원소와 최대 원소에 적용되는 존재론적 의미는 다르다. 인식공간 E 내에서 최대 원소의 존재는 언제나 증명될 수 있는 것이 아니기 때문이다. 이것이 최대성과 극대성 사이의 중요한 존재론적 차이를 보여준다. 예를 들어, 인식공간 $E = (G, \leq)$의 부분집합을 다음과 같이 정의하자.

$$G = (\{\varnothing, \{g_1\}, \{g_2\}, \{g_1, g_2\}\}, \leq)$$
$$A = \{\varnothing, \{g_1\}, \{g_2\}\}$$

여기에서 $\leq$를 $\subseteq$로 정의하면, A의 극대 원소는 $\{g_1\}, \{g_2\}$이다. 따라서 A의 극대 원소가

6) 괴델은 대상 자체가 속한 전체성(totality)을 지시하는 방식을 배제했다는 의미로 사용하였다.

7) 위상수학에 의하면, 컴팩트 공간의 프로덕트 공간은 컴팩트 공간이다(Tychonoff Theorem).

8) 여기에서 반순서집합은 공집합 $\varnothing$이 아니어야 하며, 관계 $\leq$는 반사적 법칙(reflexive law), 반대칭적 법칙(antisymmetry law), 추이적 법칙(transitive law)을 만족한다. 반순서집합의 임의의 두 원소가 비교가능(comparable)하면 전순서집합이라고 부른다.

9) $a \in A$이고, 모든 $x \in A$에 대하여 $x \leq a$일 때, a를 A의 최대 원소라고 할 수 있다.

존재한다. 그러나 A의 최대 원소는 존재하지 않는다. 그러므로 이 경우 인식하는 괴델에게 극대성을 가진 존재는 보장되지만, 최대성을 가진 존재는 보장되지 않는다. 괴델이 존재론적 증명에서 논증을 위한 인식공간 내에서 신의 정의(a definition of God)를 찾으려고 했다면, 최대성이 아니라 극대성을 선택하는 것이 타당하다. 괴델이 존재론적 증명 내에서 극대 필터의 존재를 공리로 채택한 것은 무한의 세계 내에서도 선택 공리에 의해 극대성을 만족하는 대상이 존재함을 제시한 것이다.

4 맺는 말

괴델의 극대성을 통하여 괴델의 존재론의 강조점을 알 수 있다. 괴델에게 극대적 대상은 수학적으로 존재하며 수학적 세계 내에서 실재한다. 여기에서 수학적 세계는 유한의 세계와 무한의 세계를 모두 포함하고 있다. 괴델에게 어떤 대상이 수학에서 인식될 수 있는 극대성을 만족한다면, 그 극대성을 가진 대상은 실재한다.

수학적 진리는 수학적 증명의 세계보다 크다는 것을 입증한 괴델이 신을 최대적 대상이 아닌 극대적 대상으로 이해한 것은 타당하다. 한계를 가진 인식공간 내에서 인간은 최대적 대상의 존재를 증명할 수 없다. 그래서 괴델에게 인간이 인식할 수 있는 신의 존재성은 극대성에 해당된다. 그리고 무한의 세계 내에서 극대성의 존재를 함의하는 선택 공리는 공리적 집합론의 세계에서 모순되지 않으며 사용가능하다.

괴델에게 인간이 제한된 인식공간을 통해서 최대성을 가진 대상의 존재를 인식하는 것은 보장될 수 없는 일이다. 그러나 괴델에 의하면 인간은 인식공간을 통해서 극대성을 가진 대상의 존재를 인식할 수 있다. 그러므로 괴델에게 극대성을 가진 존재는 인식의 한계를 인정할 때 볼 수 있는 실재이다.

References

1. P. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York: Dover Publications, 2008.
2. H. FRIEDMAN, My Forty Years on His Shoulders, *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics*, M. BAAZ, Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 399–432.
3. K. GÖDEL, The completeness of the axioms of the functional calculus of logic, *Kurt Gödel Collected Works I: Publications 1929–1936*, S. FEFERMAN et al, New York: Oxford University Press, 1986, 102–121.
4. K. GÖDEL, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, *Kurt Gödel Collected Works II: Publications 1938–1974*, S. FEFERMAN et al, New York: Oxford University Press, 1990, 26–27.
5. K. GÖDEL, The consistency of the generalized continuum hypothesis, *Kurt Gödel Collected Works II: Publications 1938–1974*, S. FEFERMAN et al, New York: Oxford University Press, 1990, p. 27.

6. K. Gödel, Ontological proof, *Kurt Gödel Collected Works III: Unpublished Essays and Lectures*, 1970. S. Feferman et al, New York: Oxford University Press, 1995, 403–404.
7. Hong Sung Sa, Hong Young Hee, Axiom of Choice and 19th Century Mathematics, *The Korean Journal for History of Mathematics* 9(1) (1996), 1–11. 홍성사, 홍영희, 선택공리와 19세기 수학, 한국수학사학회지 9(1) (1996), 1–11.
8. Hong Sung Sa, Hong Young Hee, Axiom of Choice after Zermelo, *The Korean Journal for History of Mathematics* 9(2) (1996), 1–9. 홍성사, 홍영희, Zermelo 이후의 선택공리, 한국수학사학회지 9(2) (1996), 1–9.
9. Hyun Woosik, Gödel on the Foundations of Mathematics, *The Korean Journal for History of Mathematics* 20(3) (2007), 17–26. 현우식, 괴델이 보는 수학의 토대, 한국수학사학회지 20(3) (2007), 17–26.
10. T. Jech, About the Axiom of Choice, *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise(ed.), New York: North-Holland Publishing Company, 1977, 345–370.