

지반의 상호작용을 고려한 전면기초의 해석기법 개발

Development of Analysis Method for Mat Foundations Considering Coupled Soil Springs

이재환¹ Lee, Jae-Hwan

정상섭² Jeong, Sang-Seom

이준규³ Lee, Joon-Kyu

Abstract

The 3D numerical analysis is carried out to investigate the settlement behavior of flexible mat foundations subjected to vertical loads. Special attention is given to the improved analytical method (YS-MAT) that reflects the mat flexibility and soil spring coupling effect. The soil model captures the stiffness of the soil springs as well as the shear interaction between the soil springs. The proposed method has been validated by comparing the results with other numerical methods and a field measurement on mat foundation. Through comparative studies, the settlement of the proposed method was in relatively good agreement with those of a field measurement and other numerical methods. The results permit us to estimate the response of the mat foundation subjected to vertical loads that should be taken into account in the combination of mat flexibility and soil continuity characteristics.

요지

본 연구에서는 기존 근사해석 프로그램의 간편함을 유지하면서 보다 정밀성이 확보된 3차원 근사해석기법(YS-MAT)을 개발하였다. 전면기초는 6개의 자유도를 가진 평면쉘 요소로 모델링하여 기초의 연성거동을 고려할 수 있도록 하였으며, 지반스프링의 상호작용을 고려할 수 있도록 하였다. 기초의 해석기법, 유한요소해석 및 현장계측값과의 비교·분석 결과, 본 해석기법이 대단면 전면기초의 침하 거동을 비교적 정확히 산정하는 것으로 판단되며, 이러한 검증을 토대로 실제 전면기초 예비설계에 적용 가능함을 확인할 수 있었다.

Keywords : Soil-structure interaction, Mat foundation, Soil spring, Coupling effect, Settlement

1. 서론

최근 건물의 초고층화에 따라 상부구조물에서 지반

으로 전달되는 하중이 증가하고 있으며, 이를 안전하게
지지할 수 있는 기초 또한 대형화되고 있는 실정이다.

기초 선정은 기초가 시공될 지반의 상태에 따라 결정된

1 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정 (Member, Graduate Student, Dept. of Civil Engrg., Yonsei Univ.)

2 정회원, 연세대학교 토목공학과 교수 (Member, Prof., Dept. of Civil Engrg., Yonsei Univ., Tel: +82-2-2123-2807, Fax: +82-2-364-530, soj9081@yonsei.ac.kr,
Corresponding author, 교신저자)

3 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사 후 연구원 (Member, Ph.D, Dept. of Civil Engrg., Yonsei Univ.)

* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2015년 6월 30일까지 그 내용을 학회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

Copyright © 2014 by the Korean Geotechnical Society

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>)
which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

다. 지반의 강성이 연약한 경우 대형 깊은 기초를 전면 기초에 결합하여 상부하중의 상당부분을 깊은 기초를 통하여 견고한 하부지반에서 지지하도록 설계하지만, 암반과 같이 지반의 강성이 큰 경우 통상 대단면 전면기초(mat foundation)를 사용하여 하부지반으로 직접 상부하중을 전달 되도록 설계한다. 또한, 전면기초는 비용 측면에서 깊은 기초보다 최대 20%의 비용을 절감할 수 있다고 보고되고 있다(Briaud, 1993).

전통적인 기초 설계에서 기초판은 주로 강성법, 즉 강성기초로 설계되어 왔다. 즉, 기초를 강체로 가정하여 기초의 두께가 두꺼워졌으며, 기초판 자체의 변형을 무시하였다. 이러한 강성법은 기초의 연성도(flexibility)를 고려할 수 없기 때문에, 상부 구조물의 대형화에 따라 대단면화 되고 있는 하부 기초의 부등 침하 및 전체 침하량 예측의 한계점을 가지고 있다.

전면기초의 해석은 크게 염밀 해석법(more rigorous computer-based method)과 지반스프링 모델 해석법(Winkler spring method)이 많이 사용된다(Dutta and Rana, 2002; Colasanti and Horvath, 2010). 염밀해석법으로는 경계요소법과 유한요소법이 있으며, 특히, 3차원 유한요소해석(FEM)이 실제조건과 가장 유사한 기초의 거동을 나타낼 수 있는 방법으로 보고되고 있다(Poulos, 2001; Reul et al., 2003; Lee et al., 2010). 그러나, 3차원 유한요소해석은 모델링 및 해석에 많은 시간과 노력이 필요하여 실무에 적용하기에는 어려움이 있다. 이에 반해, 기존의 지반스프링 모델을 이용하여 해석하는 방법은 하부 반을 Winkler 스프링으로 모사하고, 전면기초는 띠 또는 꽈 요소로 모델링하여 해석하는 구사해석법이다. 이

방법은 FEM에 비해 해석이 간단하고 편리한 반면, 지반을 독립적인 일련의 스프링으로 간주하여 지반 스프링 간의 상호작용을 고려하지 못하는 단점이 있으며, 기초를 강체로 가정하여 전면기초의 휨강성을 고려하지 못한다.

본 연구에서는 기존 근사해석 프로그램의 간편함을 유지하면서 보다 정밀성이 확보된 전면기초의 근사해석기법을 개발하고자 하였다. 해석기법은 전면기초의 연성거동을 고려하기 위해 평면 셀요소를 이용하였고, 지반 스프링 간의 상호작용을 고려하기 위해 Pasternak model을 적용하였다. 제안된 해석기법의 검증을 위하여 유한요소해석법과 현장계측자료를 통한 비교·분석을 수행하였다.

2. 전면기초 해석기법 (YS-MAT)

2.1 전면기초(mat)의 모델링

기존에는 전면기초를 평판 요소(Plate)로 모델링하여 진행된 많은 연구들이 있었다(Clancy and Randolph, 1993; Poulos, 1994; Zhang and Small, 2000; Lal et al., 2007; Ayvaz and Oguzhan, 2008; Darilmaz, 2009). 그러나, 이 요소는 수평방향 자유도가 없기 때문에 수평 축 방향의 이동을 고려할 수 없는 단점이 있으며, 기초의 연성도 (flexibility)를 고려할 수 없다.

따라서, 본 연구에서는 기초의 연성거동을 고려하기 위하여, 평면 응력요소(Membrane)와 평판 휨요소(Plate)를 결합한 절점당 6개의 자유도를 가지 3차원 평면 쉘요

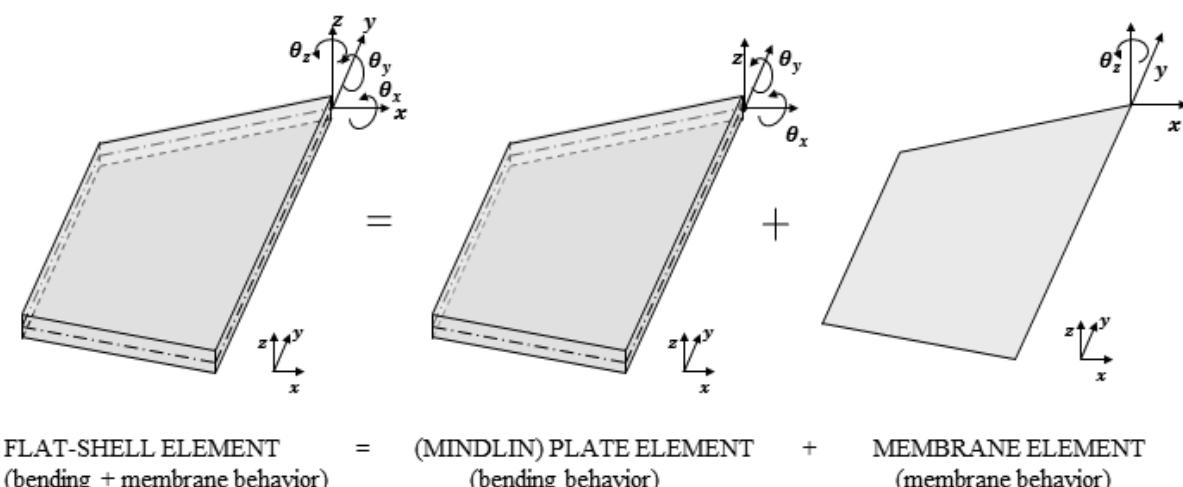


Fig. 1. Modeling of flexible mat (Flat-shell element)

소(Flat-shell)로 전면기초를 모델링 하였다(Fig. 1). 즉, 면에 수직인 전단에 대한 거동을 모사할 수 있는 평판 흡요소(Plate)와 수평 축 방향의 자유도를 가지고 있는 평면 응력요소(Membrane)를 결합하였다(Choi and Lee, 1996; Won et al., 2006). 이러한 평면 셀요소는 기초의 두께에 비해 단면이 넓은 대단면 전면기초의 연성거동을 모사할 수 있다(Jeong and Cho, 2014). 평판 흡요소와 평면응력요소의 자유도는 서로 독립적이며, 평면 셀요소의 강성행렬은 식 (1)과 같이 평판요소와 평면응력요소의 결합에 의하여 구성된다.

$$K_{shell} = K_{plate} + K_{membrane} \quad (1)$$

평판요소의 강성행렬(K_{plate})은 식 (2)와 같으며, 평면 응력요소의 강성행렬($K_{membrane}$)은 식 (4)에 의해서 산정 할 수 있다.

$$K_{plate} = \int_v B_b^T D_b B_b dV + \int_v B_s^T D_s B_s dV \quad (2)$$

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$D_s = \frac{\psi Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \psi = \frac{5}{6} \quad (3b)$$

$$K_{membrane} = \int_v [B_m \bar{G} \bar{R}]^T \cdot C \cdot [B_m \bar{G} \bar{R}] dV + \frac{1}{\gamma V} h h^T \quad (4)$$

$$h = \int_v [b \ g \ \bar{b} \ \bar{g}]^T dV, \gamma = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

여기서, B_b 는 흡-변형률 행렬, B_s 는 전단-변형률 행렬, E , ν , t 는 각각 평판요소의 탄성계수, 포아송비 와 두께, ψ 는 전단보정계수, C 는 요소의 재료상수, B_m , G , b , g 는 변위와 변형률 사이의 관계를 나타내는 행렬이다.

2.2 전면기초-지반 상호작용

전면기초와 지반 간의 상호작용을 해석하기 위하여 지반 스프링 모델을 도입하였다. 지반 스프링의 강성

은 기초판의 침하와 지반반력 간의 관계를 규정하는 것이다. 지반 스프링 모델은 기초-지반의 상호작용을 보다 간편하게 모사하기 위해, Winkler(1867)에 의해 처음 제시된 모델이다. Winkler 지반스프링 모델은 지반을 일련의 연직 스프링들만으로 표현하고 있기 때문에, 각각의 스프링들은 가해지는 하중을 서로 간의 상호작용이 없어 독립적으로 전달받는다고 가정한다. 실제로는 인접한 지반 스프링 간에 연직변위의 차이가 생기게 되어 지반 내에 전단응력이 발생되고 Fig. 2와 같이 곡선 형태의 변위가 생기지만, Winkler 모델은 이러한 전단응력을 고려할 수 없고 강체 거동을 보이며, 이에 따라 흡 모멘트와 전단력이 전혀 발생하지 않는 한계점이 있다.

이러한 Winkler 모델의 한계점을 개선하기 위해, 지반 스프링 간의 상호작용을 고려할 수 있는 모델에 대한 연구가 진행되어 왔다(Filonenko-Borodich, 1940; Pasternak, 1954; Vlasov, 1966; Vallabhan and Das, 1991; Horvath, 1993; Jeong and Seo, 2004; Horvath and Colasanti, 2011a). Filonenko-Borodich(1940)는 탄성지반의 전단거동을 고려하기 위하여 Winkler 모델의 스프링 상단이 일정한 인장력을 받는 membrane에 의하여 연결되어 있는 모델을 제시하였고, Pasternak(1954)는 Winkler model의 스프링들 간에 coupling을 일으키는 전단력이 존재한다는 가정 하에, Fig. 3과 같이 스프링 층의 상단에 전단력에 의해서만 변형을 일으키는 층(shear layer)가 존재하는 모형을 도입하고, 그에 따른 모델을 제안하였다.

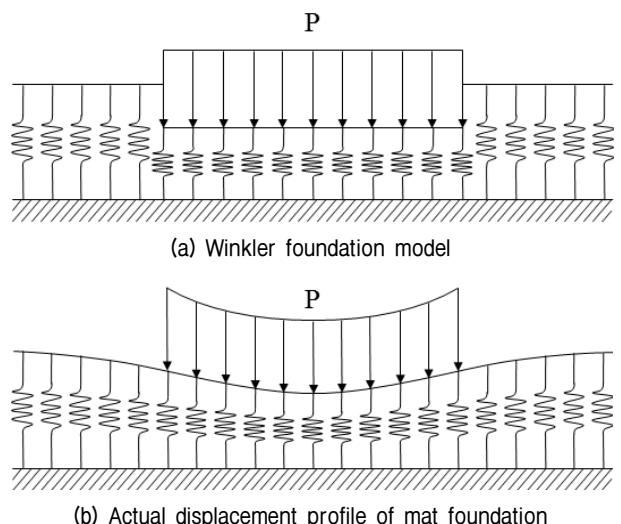


Fig. 2. Foundations under uniformly distributed loads

$$p(x,y) = k_s w(x,y) - k_g \nabla^2 w(x,y) \quad (6)$$

$$k_s = \frac{E_s}{H_s(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \quad (7a)$$

$$k_g = \frac{E_s H_s}{6(1+\nu_s)} \quad (7b)$$

여기서, k_s 는 지반의 반력계수, k_g 는 지반스프링 사이에 상호작용을 일으키는 전단변형에 관련된 상수이며 (Selvadurai, 1979), E_s , ν_s 는 각각 지반의 탄성계수, 포아송비, H_s 는 영향거리이다.

본 연구에서는, 실제 지반의 상호작용을 고려한 거동 해석을 위해서, Fig. 4와 같이 Winkler 모델을 변형한 Pasternak 모델을 도입하였고, 식 (8)과 같은 미분방정식

을 이용하여 지반 스프링 간의 상호영향을 고려하였다.

$$\{p\} = [k_s]\{w\} - [k_g]\nabla^2\{w\} \quad (8)$$

여기서, $\{p\}$ 는 외력 벡터이고, $[k_s]$ 는 지반 스프링 각각의 강성 행렬, $[k_g]$ 는 상호작용 행렬, $\{w\}$ 는 변위 벡터이다. 지반 스프링 간의 상호영향이 고려된 강성 행렬을 구하기 위하여, 유한차분법을 이용하였고 식 (9)와 같은 최종 지배방정식을 유도하여, 해석기법에 도입하였다.

$$\begin{aligned} \{p\}_{i,j} &= [k_s]_{i,j}\{w\}_{i,j} - [k_g]_{i,j} \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} (\{w\}_{i+1,j} - 2\{w\}_{i,j} + \{w\}_{i-1,j}) \right. \\ &\quad \left. + \{w\}_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta y^2} (\{w\}_{i,j+1} - 2\{w\}_{i,j} + \{w\}_{i,j-1}) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 해석 알고리즘

본 연구에서는 상기 전면기초의 강성 행렬(K_{shell})과 상호 커플링이 고려된 지반 스프링($K_{soil} = K_s + K_g$)의 강성 행렬을 결합하여, 식 (10)과 같이 최종 강성 행렬(K_{mat})을 구성하였으며, 이를 토대로 전면기초의 근사 해석기법을 개발하였다. 그 흐름도는 Fig. 5와 같다.

$$[K_{mat}] = [K_{shell}] + [K_{soil}] \quad (10)$$

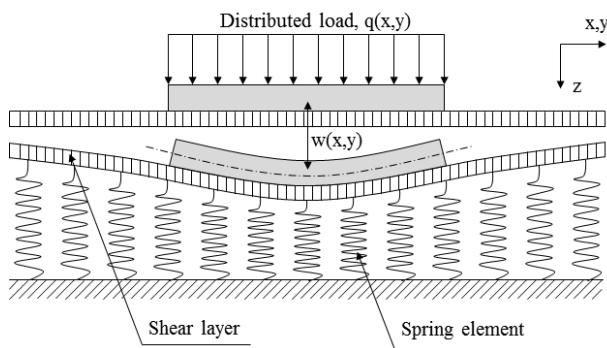


Fig. 3. Pasternak foundation model

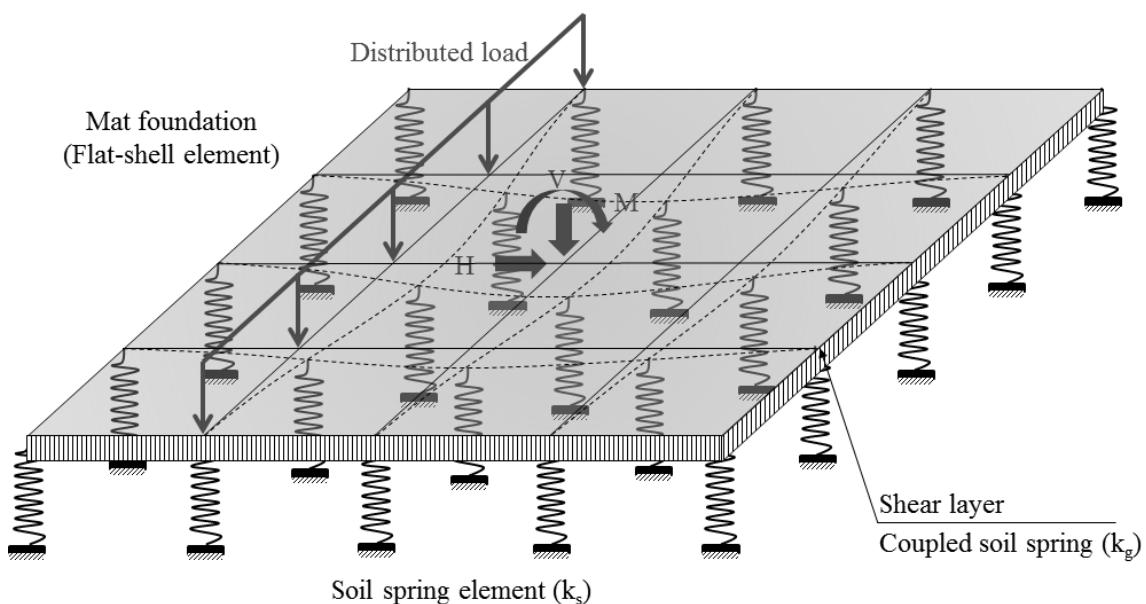


Fig. 4. Idealized 3D model for mat foundation used in proposed method (YS-MAT)

Table 1. Material parameters used for numerical analysis

Material	E (MPa)	ν	γ (kN/m ³)	H_s (m)	Model
Mat	30,000	0.2	24	–	Linear Elastic
Rock	300	0.3	22	24	Linear Elastic

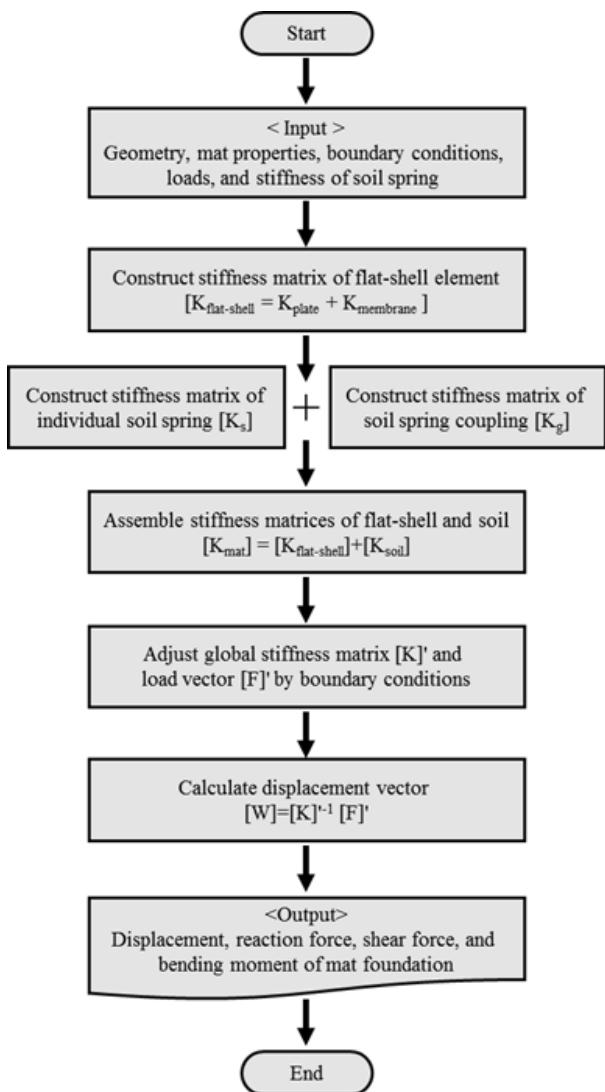


Fig. 5. Flow chart of YS-MAT

3. 해석기법의 검증 및 적용

3.1 기존 해석기법과의 비교

본 해석기법의 검증을 위하여 기존 해석기법인 GEO5 해석프로그램 및 유한요소해석 ABAQUS와 비교·분석을 수행하였다. GEO5 해석프로그램은 지반설계 프로그램으로서 지반은 선형 Winkler 스프링으로 모델링하고, 전면기초는 평판요소(plate)로 모델링한다. 이는 축 방향의 자유도를 고려하지 못하므로, 기초의 연성거동을

고려하지 못하는 한계가 있다.

해석대상은 Fig. 6과 같이 12m×12m 크기의 전면기초이며, 두께는 1.0m이다. 하부 지반은 암반으로 가정하였으며, 하중 조건은 크게 등분포 하중과 집중하중으로 나누어 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 지반 및 전면기초의 제원 및 물성은 Table 1에 나타내었다.

Fig. 7과 8은 본 해석기법(YS-MAT)으로 산정된 전면기초의 거동과 기존 해석기법(GEO5), 그리고 유한요소해석(ABAQUS 3D)의 해석결과를 나타내었다. 먼저, Fig. 7은 전면기초 중앙부에 9개의 기둥하중이 적용된 경우의 해석결과이다. Fig. 7(a)에서 볼 수 있듯이, 각각의 해석기법으로 산정한 전면기초의 침하량 분포는 거의 유사하였고, 본 해석기법(YS-MAT)으로 산정한 기초의 침하량이 기존 해석기법인 GEO5보다는 유한요소해석 결과에 보다 근접한 것을 확인할 수 있었다. 또한, 전면기초의 흡모멘트(Fig. 7(b)) 분석 결과, 기존 해석기법은 흡모멘트를 크게 산정하는 반면, 본 해석기법과 유한요소해석은 거의 근접한 결과를 나타냄을 알 수 있었다.

Fig. 8은 전면기초 전체에 등분포하중이 적용된 경우의 해석결과이다. 기존 Winkler 해석기법은 침하량이 모든 지점에 동일하게 발생하였고, 이에 따라 흡모멘트가 발생하지 않는 한계를 보였다. 반면, 본 해석기법은 지반스프링 간의 상호작용이 고려되어, 인접한 지반 스프링 간에 침하량 차이가 발생하였고, 기존 문헌 연구와 같이(Straughan, 1990; Vallabhan and Das, 1991; Dutta and Rana, 2002), 실제 침하량 형태인 곡선 형태의 침하량 분포를 보였으며, 흡모멘트 또한 발생하였다.

따라서, 본 해석기법(YS-MAT)은 기존해석기법 및 유한요소해석과 비교하여 전면기초의 거동을 비교적 정확히 산정하는 것으로 판단되며, 이러한 검증을 토대로 YS-MAT의 전면기초 예비설계에 대한 적용성을 확인할 수 있었다.

3.2 현장사례 비교

대단면 전면기초의 침하거동 분석을 위하여 실제 시공사례를 대상으로 본 해석기법(YS-MAT)과 유한요소

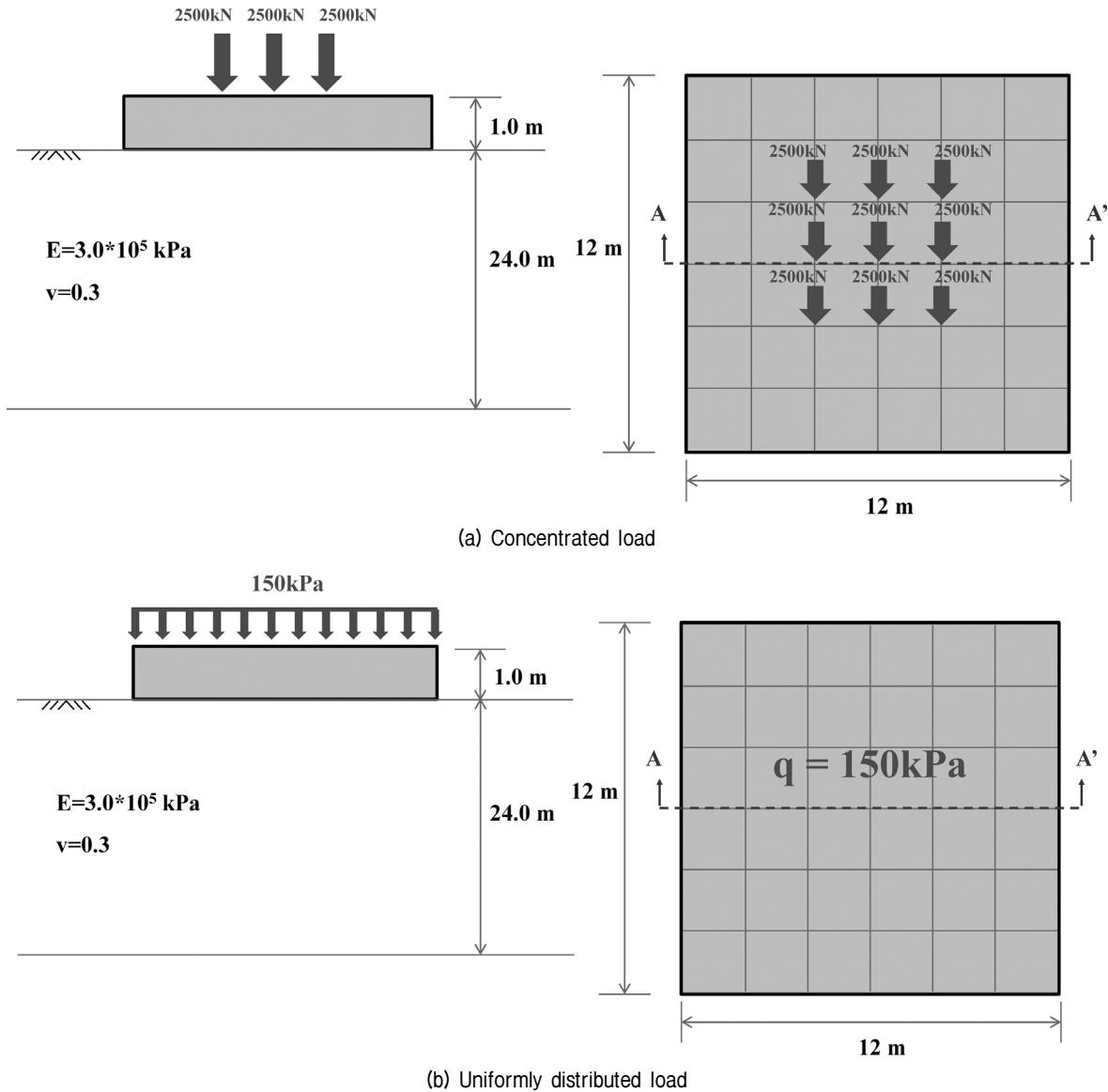


Fig. 6. Schematic diagram of mat foundation

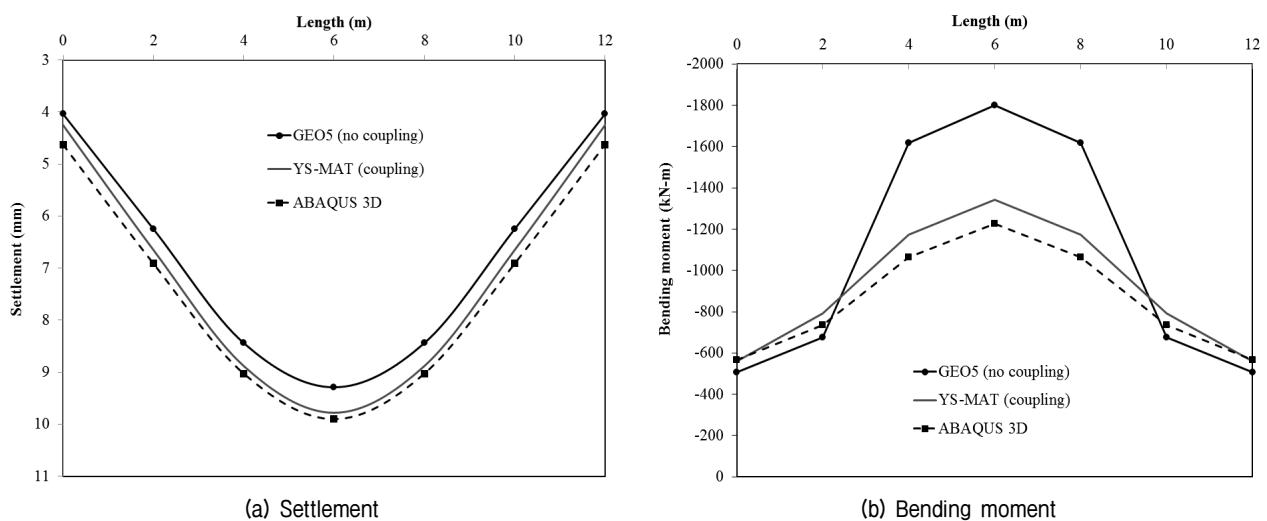


Fig. 7. Comparison of settlement results along centerline of mat foundation for nine concentrated loads

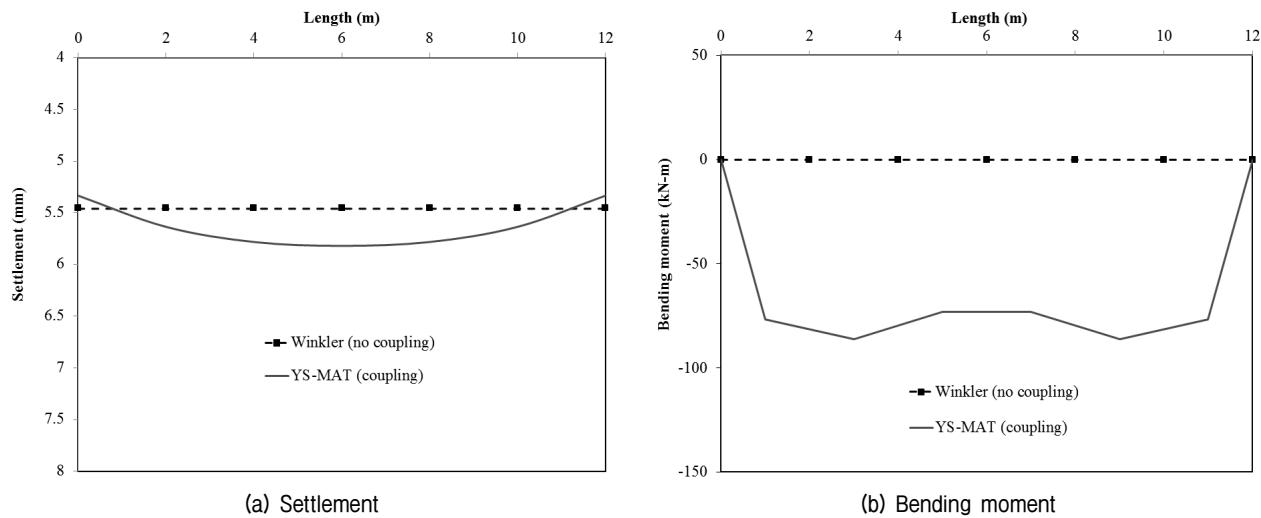
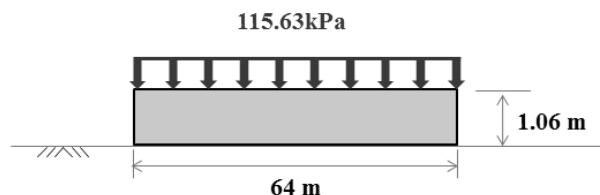


Fig. 8. Comparison of results along centerline of mat foundation for uniformly distributed load



Navarro
clayey gravel

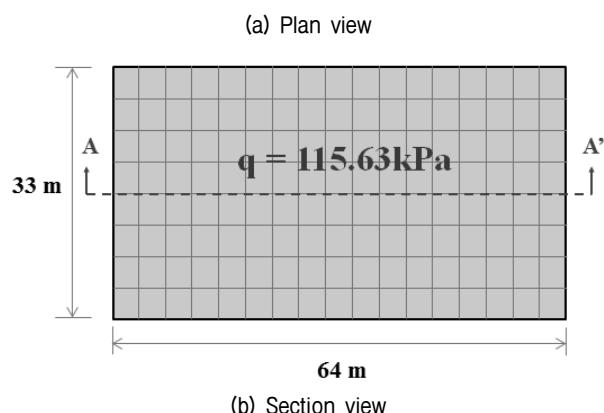
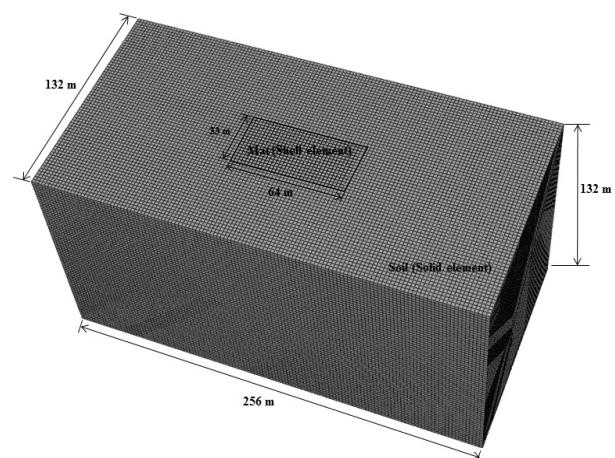


Fig. 9. Schematic diagram of mat foundation (Wilford Hall Hospital)

해석(ABAQUS 3D) 그리고 현장계측값을 비교하였다. Fig. 9와 같이 해석에 사용된 대표단면은 1977년 미국 Texas에 시공된 공군 기지 Wilford Hall Hospital의 하부 기초로서 두께 1.06m의 전면기초이다(Johnson, 1989). 전면기초는 33.0m × 64.0m의 대단면기초이며, Navarro clayey gravel 지반에 시공되었으며, 기초 상부에 115.63kPa

의 등분포 하중이 작용하는 것으로 보고되고 있다. 유한요소해석 시 전면기초는 탄성모델(linear-elastic)을 적용하였고, 지반은 Mohr-Coulomb모델을 사용하였다. 상부하중은 전면기초 전체에 현장 하중조건인 115.63kPa의 등분포 하중을 적용하였고, 해석모델의 경계 바닥면

Table 2. Material parameters used for a field case

Material	E (MPa)	ν	γ (kN/m ³)	c (kPa)	ϕ (deg.)	H _s (m)	Model
Mat	30,000	0.2	24	—	—	—	Linear Elastic
Clayey gravel	140.9	0.3	17.3	287	27	66	Mohr-Coulomb

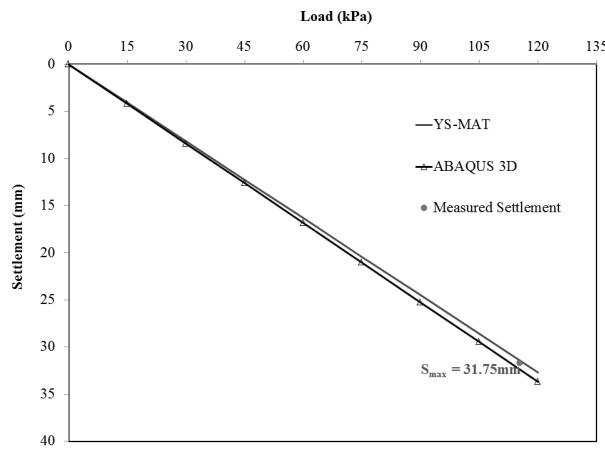


Fig. 11. Settlement behavior of large mat foundation

은 펀으로 고정하였으며, 수직 경계면은 모두 롤러를 사용하여 수직방향의 변위만을 허용하도록 하였다(Fig. 10 참조). 각 모델에 필요한 재료 정수는 현장 조건의 물성을 적용하였고, 적용한 물성치는 Table 2에 나타난 바와 같다.

Fig. 11은 기초의 침하거동을 나타낸 것이다. 전면기초에서의 하중-침하 곡선으로 현장계측값은 최대 31.75mm, ABAQUS는 32.46mm, 그리고 본 해석기법은 31.48mm의 침하량을 산정하였다. 본 해석기법이 유한요소해석 및 현장계측값과 비교하여 대단면 전면기초의 침하거동을 비교적 정확히 산정하는 것으로 나타났으며, 상기 기존해석기법과의 비교 및 현장데이터 검증을 토대로 YS-MAT 해석기법을 전면기초 예비설계에 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서는 전면기초의 거동을 예측할 수 있는 3차원 근사해석기법(YS-MAT)을 개발하였으며, 이를 검증하기 위해 기존해석기법, 유한요소해석 및 현장계측 자료와 비교하였다. 개발된 해석기법으로 대단면 전면기초의 예비설계에 적용할 수 있을 것으로 판단된다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 전통적인 기초 설계에서는 주로 강성기초로 설계되어 왔으며, 이에 따라 기초판 자체의 변형을 고려할 수 없었다. 이러한 강성법은 기초의 연성도(flexibility)를 고려할 수 없기 때문에, 상부 구조물의 대형화에 따른 대단면 전면기초의 부등 침하 및 전체 침하량 예측의 한계점을 가지고 있다. 또한, 기존의 지반스프링 해석은 Winkler 스프링을 기반으로 하여, 지반을 상호 독립적인 스프링으로 간주하기 때문에, 서로 간의 상호작용을 고려하지 못하였다.

(2) 따라서, 본 연구에서는 전면기초의 3차원 근사해석 기법(YS-MAT)을 개발하였다. 전면기초는 절점당 6개의 자유도를 갖는 평면쉘요소로 모델링하여 기초판의 연성 거동을 모사할 수 있도록 하였으며, 기존의 지반스프링 해석기법의 한계를 개선하기 위해, 지반스프링 간의 상호작용을 고려할 수 있도록 하였다.

(3) 기존해석기법, 유한요소해석 및 현장계측자료와 비교·분석한 결과, 본 연구에서 제안된 해석기법에 의한 결과는 유한요소해석 예측값 및 현장계측값과 비교적 잘 일치하는 것으로 나타났으며, 기존 Winkler 해석기법에 비해 전면기초의 실제거동에 보다 근접하게 예측하였다. 따라서, 본 근사해석기법은 전면기초의 예비설계에 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단(No. 2011-0030040)의 지원을 받아 수행되었으며, 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌 (References)

- ABAQUS Theory Manual, Version 6.12. (2012), Published by Hibbit, Karlsson And Sorensen Inc. USA.
- Ayvaz, Y. and Oguzhan, C.B. (2008), "Free vibration analysis of plates resting on elastic foundations using modified Vlasov model", *Struct. Eng. Mech.*, Vol.28, pp.635-658.
- Briaud, J. L. (1993), "Spread footing design and performance", *Contribution to a short course at the occasion of the 10th annual*

- International Bridge Conference*, Dept. of Civ. Engrg., Texas A&M University, College Station, Tex.
4. Choi, C. K. and Lee W. H. (1996), "Versatile variable-node flat-shell element", *J. of Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.122, No.5, pp.432-441.
 5. Clancy, P. and Randolph, M. F. (1993), "An approximate analysis procedure for piled raft foundations", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, London, Vol.17, No.12, pp.849-869.
 6. Colasanti, R. J. and Horvath, J. S. (2010), "A practical subgrade model for improved soil-structure interaction analysis: Software implementation", *Pract. Period. Struct. Des. Constr.*, Vol.15, No.4, pp.278-286.
 7. Darilmaz, K. (2009), "An assumed-stress hybrid element for modeling of plates with shear deformations on elastic foundation", *Struct. Eng. Mech.*, Vol.33, pp.573-588.
 8. Dutta S. C. and Rana R. (2002), "A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system", *Computers and Structures*, Vol.80, pp.1579-1594.
 9. GEO 5 manual (2012), User's guide. version 16. Fine Ltd.
 10. Jeong SS. and Cho JY. (2014), "Proposed nonlinear 3-D analytical method for piled raft foundations", *Computers & Geotechnics*, Vol. 59, pp.112-126.
 11. Johnson L. D. (1989), "Design and construction of mat foundations", Miscellaneous Paper GL-89-27, US Army Corps of Engineers, Washington, DC.
 12. Lal, A., Singh, B.N. and Kumar, R. (2007), "Natural frequency of laminated composite plate resting on an elastic foundation with uncertain system properties", *Struct. Eng. Mech.*, Vol.27, pp.199-222.
 13. Lee, J. H., Kim, Y. H., and Jeong, S. S. (2010), "Three-dimensional analysis of bearing behavior of piled raft on soft clay", *Computers & Geotechnics*, Vol.37, pp.103-114.
 14. Pasternak PL. (1954), On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Constants. Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literatury po Stroitelstvu Arkhitektury, Moscow (in Russian).
 15. Poulos, H. G. (1994), "An approximate numerical analysis of pile-raft interaction", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.18, pp.73-92.
 16. Poulos, H. G. (2001), "Piled raft foundations : design and applications", *Geotechnique*, Vol.51, No.2, pp.95-113.
 17. Reul, O. and Randolph, M.F. (2003), "Piled rafts in overconsolidated clay-Comparison of in-situ measurements and numerical analyses", *Geotechnique*, Vol.53, No.3, pp.301-315.
 18. Selvadurai, A. P. S. (1979), "Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Holland.
 19. Straughan, W. T. (1990), "Analysis of plates on elastic foundations", Dissertation. Texas Tech University.
 20. Vallabhan CVG., Das YC. (1991), "Modified Vlassov model for beams on elastic foundation", *J Geotech Engng.*, Vol.117, No.6, pp.956-966.
 21. Vlasov VZ, Leontiev NN. (1960), "Beams, plates and shells on an elastic foundation", Moscow, USSR: Fizmatgiz.
 22. Winkler, E. (1867), "Theory of Elasticity and Strength", Prague: H. Dominicus.
 23. Won JO, Jeong SS, Lee JH and Jang SY. (2006), "Nonlinear three-dimensional analysis of pile group supported columns considering pile cap flexibility", *Computers and Geotechnics*, Vol.33, pp.355-370.
 24. Zhang, H.H. and Small, J.C. (2000), "Analysis of axially and laterally loaded pile groups embedded in layered soils", *Proceedings of 8th Australia NewZealand Conf. on Geomechanics*, Hobart, Vol.1, pp.475-483.

Received : October 15th, 2014
 Revised : November 27th, 2014
 Accepted : December 2nd, 2014