Trans. Korean Soc. Noise Vib. Eng., 24(12) : 999~1006, 2014
http://dx.doi.org/10.5050/KSNVE.2014.24.12.999

한국소음진동공학회논문집 제 24 권 제 12 호, pp. 999~1006, 2014
ISSN 1598-2785(Print), ISSN 2287-5476(Online)

임의의 각으로 연성된 반무한 Mindlin 판의 파동전달해석

Wave Transmission Analysis of Semi-infinite Mindlin Plates Coupled at an Arbitrary Angle

박 영 호†

Young-Ho Park

(Received October 28, 2014 ; Revised December 3, 2014 ; Accepted December 3, 2014)

Key Words : Wave Transmission Analysis(파동전달해석), Semi-infinite(반무한), Diffuse Field(분산장), Energy Analysis(에너지해석법), Statistical Energy Analysis(통계적에너지해석법), Energy Flow Analysis(에너지흐름해석법), Mindlin Plate Theory(Mindlin 판이론), Out-of-plane Wave(면외파), In-plane Wave(면내파), Built-up Structure(복합 구조물)

ABSTRACT

Mindlin plate theory includes the shear deformation and rotatory inertia effects which cannot be negligible as exciting frequency increases. The statistical methods such as energy flow analysis(EFA) and statistical energy analysis(SEA) are very useful for estimation of structure-borne sound of various built-up structures. For the reliable vibrational analysis of built-up structures at high frequencies, the energy transfer relationship between out-of-plane waves and in-plane waves exist in Mindlin plates coupled at arbitrary angles must be derived. In this paper, the new wave transmission analysis is successfully performed for various energy analyses of Mindlin plates coupled at arbitrary angles.

기 호 설 명

ω_c : Mindlin 판의 임계주파수

k_1 : 면외전단파(OPSW)의 파수

k_2 : 굽힘우세횡파(BDFW)의 파수

k_3 : 전단우세횡파(SDFW)의 파수

k_l : 면내 종파(in-plane longitudinal wave)의 파수

k_s : 면내 전단파(in-plane shear wave)의 파수

ϕ,ψ : 면외운동 변위 포텐셜 함수

μ : 면내운동 스칼라 변위 포텐셜 함수

$\vec{\zeta}$: 면내운동 벡터 변위 포텐셜 함수

1. 서 론

산업이 발달하고 삶의 질에 대한 관심이 증대함에 따라 고주파수 대역에서의 소음진동현상에 중요성이 증대되고 있다. 하지만 고주파수 대역에서는 시스템 자체 물리적 파라미터(physical parameters)의 불확실성과 모드 밀도(modal density)가 높아지기 때문에 기존 저주파수 대역에서의 유한요소법(FEM)이나 경계요소법(BEM)은 예측 결과의 타당성 측면에서나 해석 비용 측면에서 적절하지 않은 것으로 알려져 있다. 이런 이유로 고주파수 대역에

† Corresponding Author ; Member, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Changwon National University
E-mail : parkyh@changwon.ac.kr
Tel : +82-55-213-3684, Fax : +82-55-213-3689

‡ Recommended by Editor SungSoo Na

ⓒ The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

서는 에너지에 기반한 통계적에너지해석법(SEA)이나 에너지흐름해석법(EFA)과 같은 통계적 방법(statistical approach)이 대안으로 여겨지고 있다[1~3].

에너지 변수 기반의 통계적에너지해석법이나 에너지흐름해석법은 복합구조물(built-up structures)의 진동에너지를 예측하기 위해 불연속 연성구조물 간의 에너지전달관계(energy transfer relationship) 확립이 요구된다. 일반적으로 에너지 기반 통계적 기법에서 약한 연성(weakly coupling) 연성구조물 간의 주파수 평균된 분산장(diffuse field)에서의 에너지전달관계는 반무한장(semi-infinite wavefield)에서의 파워투과반사계수(power transmission and reflection coefficient)로 표현될 수 있다[3].

주파수가 높아짐에 따라 대표적인 구조요소인 보(beam)와 평판(plate)의 면외운동(out-of-plane motion)에서 회전관성효과(rotatory inertia effect)와 전단변형효과(shear distortion effect)가 매우 중요해진다[4~9]. 따라서 고주파수 대역에서 고체음(structure borne noise) 전달 예측에 효과적인 통계적에너지해석법이나 에너지흐름해석법은 보다 신뢰성 있는 소음진동응답의 예측을 위해 이와 같은 효과를 반영할 수 있는 Timoshenko 보와 Mindlin 판에 대한 에너지 모델 적용이 반드시 요구된다. 박영호와 홍석윤은[6~8] Timoshenko 보와 Mindlin 판의 에너지흐름모델을 개발했고 Timoshenko 연성 구조물의 에너지흐름해석을 위해 파동전달해석을 수행하였다. 또한 연성된 Mindlin 판의 에너지전달관계를 얻기 위해 박영호는[9] 동일 평면상에 존재하는 Mindlin 판의 파동전달해석(wave transmission analysis)을 수행하였다.

이 논문에서는 고주파수 대역에서 일반적인 형상의 구조물의 신뢰성 있는 소음진동해석을 위해 필수적인 임의의 각으로 연성된 Mindlin 판의 파동전달해석을 수행하였다. 이를 통해 에너지 기반 통계적 해석기법에서 복합구조물의 보다 신뢰성 있는 소음진동응답 예측이 가능할 것으로 판단된다.

2. Mindlin 판 이론

2.1 Mindlin 판의 면외 운동방정식

Mindlin 판의 면외 운동방정식(equation of out-of-plane motion)은 다음과 같이 표현된다.

$$D\left[\frac{\partial^2\alpha_x}{\partial x^2}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2\alpha_x}{\partial y^2}+\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2\alpha_y}{\partial x\partial y}\right]+\kappa Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha_x\right)-I\rho\frac{\partial^2\alpha_x}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

$$D\left[\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2\alpha_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha_y}{\partial y^2}+\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2\alpha_x}{\partial x\partial y}\right]+\kappa Gh\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\alpha_y\right)-I\rho\frac{\partial^2\alpha_y}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

$$-\kappa Gh\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial\alpha_x}{\partial x}-\frac{\partial\alpha_y}{\partial y}\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

여기서 w은 횡방향 변위를 나타내며, α_x와 α_y는 굽힘에 의한 각 축방향의 회전각, h는 판의 두께, $I=h^3/12$는 단위 폭 당 관성모멘트, $D=Eh^3/\left[12\left(1-\nu^2\right)\right]$은 굽힘 강성률, ν는 푸아송비, E는 탄성계수, $\kappa=20(1+\nu)/\left(24+25\nu+\nu^2\right)$는 전단보정계수, $G=E/\left[2(1+\nu)\right]$는 전단계수를 나타낸다.

2.2 Mindlin 판의 면외운동

Mindlin 판의 면외 운동방정식은 변위 포텐셜 함수(displacement potential function) ϕ와 ψ을 정의하여 연성된 변위의 파동성분을 분리하여 표현할 수 있다[5].

$$D\nabla^2\phi+\kappa Gh\left(w-\phi\right)-I\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0, \tag{4}$$

$$D\left[\frac{(1-\nu)}{2}\nabla^2\psi\right]-\kappa Gh\left(\psi\right)-I\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \tag{5}$$

$$-\kappa Gh\left(\nabla^2 w-\nabla^2\phi\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{6}$$

여기서 회전각과 변위 포텐셜과의 관계는 다음과 같다.

$$\alpha_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \alpha_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{7,8}$$

변위 포텐셜 함수와 수직 변위로 표현된 운동방

정식 (4~6)을 이용하면 3가지 종류의 파동해가 얻어진다. 굽힘우세횡파(BDFW: bending dominant flexural wave)는 Kirchhoff 판의 굽힘파와 같이 전주파수영역에서 원거리 파동해(farfield wave solution)의 특성을 갖고 있으며 면외전단파(OPSW: out-of-plane shear wave)와 전단우세횡파(SDFW: shear dominant flexural wave)는 임계주파수($\omega_c = \sqrt{\kappa G h / \rho I}$)위에서만 원거리 해가 존재한다[8].

각 파동의 파수(wavenumber)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$k_1 = \sqrt{\left(\rho I \omega^2 - \kappa G h\right)/GI} \tag{9}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2}\left(\frac{1}{\kappa G}+\frac{I}{D}\right)+\sqrt{\frac{\rho^2\omega^4}{4}\left(\frac{1}{\kappa G}-\frac{I}{D}\right)^2+\frac{\rho h\omega^2}{D}}} \tag{10}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2}\left(\frac{1}{\kappa G}+\frac{I}{D}\right)-\sqrt{\frac{\rho^2\omega^4}{4}\left(\frac{1}{\kappa G}-\frac{I}{D}\right)^2+\frac{\rho h\omega^2}{D}}} \tag{11}$$

여기서 k_1와 k_2, k_3은 각각 면외전단파, 굽힘우세횡파, 전단우세횡파의 파수를 나타낸다.

2.3 평판의 면내 운동방정식과 면내운동

임의의 각으로 연성된 평판의 진동예측을 위해서는 평판 내의 면내운동에 대한 고려가 필요하다. 2차원 평판의 면내 운동방정식은 다음과 같이 서로 직교방향의 면내운동 u와 v의 연성식으로 표현된다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\frac{\left(1-\nu^2\right)\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\left(1-\nu^2\right)\rho}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{13}$$

면내운동은 Mindlin 판의 면외운동과 유사하게 면내 변위($\vec{\xi} = u\hat{i} + v\hat{j}$)를 종파의 특성을 가진 스칼라 변위 포텔셜함수(μ)와 면내전단파의 특성을 갖은 벡터 변위 포텐셜함수($\vec{\zeta}$)를 이용하면 면내 운동방정식 (12,13)은 종파와 면내전단파의 파동방정식으로 분리될 수 있다[9].

$$\vec{\xi} = u\hat{i} + v\hat{j} = \nabla\mu + \nabla\times\vec{\zeta} \tag{14}$$

$$\nabla^2\mu = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{\zeta} = \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\vec{\zeta}}{\partial t^2} \tag{15,16}$$

여기서 $c_l = \sqrt{E/\rho\left(1-\nu^2\right)}$ 이고 $c_s = \sqrt{G/\rho}$ 이다.

3. 임의의 각으로 연성된 두 개의 Mindlin 판의 파동전달해석

3.1 Mindlin 판의 진동 파워

Mindlin 판의 면외진동(out-of-plane vibration)과 면내진동(in-plane vibration)에서 x 방향의 시간평균 된파워는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\left\langle q_x^o \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Bigg[& -D\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\alpha_y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial t}\right)^* \\ & -(1-\nu)\frac{D}{2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial y}+\frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\alpha_y}{\partial t}\right)^* \\ & -\kappa G h\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha_x\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^*\Bigg]\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\left\langle q_x^i \right\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Bigg[& Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^* \\ & ++K\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^*\Bigg]\end{aligned} \tag{18}$$

여기서 $K = Eh/\left(1-\nu^2\right)$ 이고 *는 켤레복소수를 의미한다.

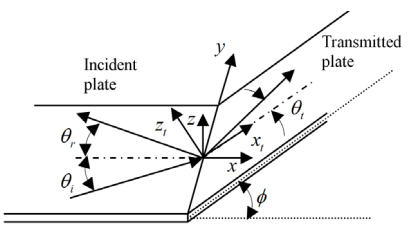

Fig. 1 Two semi-infinite Mindlin plates coupled at an arbitrary angle

3.2 Mindlin 판의 면외/면내 파동

임의의 각으로 연성된 Mindlin 판에서는 모든 평판에서 면외 파동과 면내 파동이 동시에 존재한다. 먼저 입사 평판의 면외 파동을 살펴보면 다음과 같다. Fig. 1의 입사 평판(incident plate) i에서 임계주파수보다 높은 주파수 영역일 경우 $\overline{A}$의 크기를 가진 원거리 면외전단파(far-field OPSW)가 두 판의 경계로 θ_i의 각도로 입사할 때 입사 평판 i에 존재하는 면외전단파는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_i(x,y) = \overline{A}e^{-jk_{1x,i}x - jk_{1y,i}y} + Be^{jk_{1x,i}x - jk_{1y,i}y} \tag{19}$$

여기서 $\theta_i = \theta_r$, $k_{1x,i} = k_{1,i}\cos\theta_i$, $k_{1y,i} = k_{1,i}\sin\theta_i$ 이다.

마찬가지로 입사 평판 i에서 $\overline{C}$의 크기로 입사하고 D의 크기로 반사하는 원거리 굽힘우세횡파는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\phi_i\\ w_i\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\rho_i h_i\omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2\\ -\kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2\end{Bmatrix}\left(\overline{C}e^{(-jk_{2x,i}x - jk_{2y,i}y)} + De^{(jk_{2x,i}x - jk_{2y,i}y)}\right) \tag{20}$$

여기서 $k_{2x,i} = k_{2,i}\cos\theta_i$, $k_{2y,i} = k_{2,i}\sin\theta_i$ 이다.

또한 입사 평판 i에서, 임계주파수보다 높은 주파수 영역일 경우 $\overline{E}$의 크기로 입사하고 F의 크기로 반사하는 원거리 전단우세횡파는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\phi_i\\ w_i\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\rho_i h_i\omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2\\ -\kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2\end{Bmatrix}\left(\overline{E}e^{(-jk_{3x,i}x - jk_{3y,i}y)} + Fe^{(jk_{3x,i}x - jk_{3y,i}y)}\right) \tag{21}$$

여기서 $k_{3x,i} = k_{3,i}\cos\theta_i$, $k_{3y,i} = k_{3,i}\sin\theta_i$ 이다.

입사 평판 i에서 면내 파동(in-plane wave)은 면내 종파(in-plane longitudinal wave)와 면내 전단파(in-plane shear wave)로 구분되며 평판의 면내 변위 u, v를 각 파동으로 표현하면 다음과 같다.

$$u_{l,i} = \left[\cos\theta_{li}\overline{G}e^{(-jk_{lx,i}x_i - jk_{ly,i}y)} - \cos\theta_{li}He^{(jk_{lx,i}x_i - jk_{ly,i}y)}\right] \tag{22}$$

$$v_{l,i} = \left[\sin\theta_{li}\overline{G}e^{(-jk_{lx,i}x_i - jk_{ly,i}y)} + \sin\theta_{li}He^{(jk_{lx,i}x_i - jk_{ly,i}y)}\right] \tag{23}$$

$$u_{s,i} = \left[-\sin\theta_{si}\overline{I}e^{(-jk_{sx,i}x_i - jk_{sy,i}y)} - \sin\theta_{si}Je^{(jk_{sx,i}x_i - jk_{sy,i}y)}\right] \tag{24}$$

$$v_{s,i} = \left[\cos\theta_{si}\overline{I}e^{(-jk_{sx,i}x_i - jk_{sy,i}y)} - \cos\theta_{si}Je^{(jk_{sx,i}x_i - jk_{sy,i}y)}\right] \tag{25}$$

여기서 $\overline{G}$, $\overline{I}$는 각각 입사 면내 종파와 면내 전단파의 크기이며 H, J는 면내 종파와 면내 전단파의 반사파의 크기이다. 또한 $\cos\theta_{li} = k_{lx,i}/k_{l,i}$, $\cos\theta_{si} = k_{sx,i}/k_{s,i}$, $\sin\theta_{li} = k_{ly,i}/k_{l,i}$, $\sin\theta_{si} = k_{sy,i}/k_{s,i}$ 이다.

입사 평판 i에서 입사한 파동의 투과로 인해 투과 평판 t에서 존재하는 면외, 면내 투과파는 다음과 같이 표현된다.

$$\psi_t(x,y) = Le^{-jk_{1x,t}x - jk_{1y,t}y} \tag{26}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_t\\ w_t\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\rho_t h_t\omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2\\ -\kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2\end{Bmatrix}\left(Me^{(-jk_{2x,t}x - jk_{2y,t}y)}\right) \tag{27}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_t\\ w_t\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\rho_t h_t\omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2\\ -\kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2\end{Bmatrix}\left(Ne^{(-jk_{3x,t}x - jk_{3y,t}y)}\right) \tag{28}$$

$$u_{l,t}(x_t,y) = \left[\cos\theta_{lt}Oe^{(-jk_{lx,t}x_t - jk_{ly,t}y)}\right] \tag{29}$$

$$u_{s,t}(x_t,y) = \left[-\sin\theta_{st}Pe^{(-jk_{sx,t}x_t - jk_{sy,t}y)}\right] \tag{30}$$

$$v_{l,t}(x_t,y) = \left[\sin\theta_{lt}Oe^{(-jk_{lx,t}x_t - jk_{ly,t}y)}\right] \tag{31}$$

$$v_{s,t}(x_t,y) = \left[\cos\theta_{st}Pe^{(-jk_{sx,t}x_t - jk_{sy,t}y)}\right] \tag{32}$$

여기서 경계에서 y방향 파수 매칭(matching)과 전반사 조건을 고려하면

$$\begin{aligned}&k_{1y,i} = k_{2y,i} = k_{3y,i} = k_{ly,i} = k_{sy,i}\\ &= k_{1y,t} = k_{2y,t} = k_{3y,t} = k_{ly,t} = k_{sy,t}\end{aligned} \tag{33}$$

$$k_{1,2,3x} = \begin{cases} k_{1,2,3}\sqrt{\left(k_{1,2,3y}/k_{1,2,3}\right)^2 - \sin^2\theta_i} & \left(k_{1,2,3y}/k_{1,2,3} > \sin\theta_i\right)\\ -jk_{1,2,3}\sqrt{\sin^2\theta_i - \left(k_{1,2,3y}/k_{1,2,3}\right)^2} & \left(k_{1,2,3y}/k_{1,2,3} < \sin\theta_i\right)\end{cases} \tag{34}$$

$$k_{l,sx} = \begin{cases} k_{l,s}\sqrt{\left(k_{l,sy}/k_{l,s}\right)^2 - \sin^2\theta_i} & \left(k_{l,sy}/k_{l,s} > \sin\theta_i\right)\\ -jk_{l,s}\sqrt{\sin^2\theta_i - \left(k_{l,sy}/k_{l,s}\right)^2} & \left(k_{l,sy}/k_{l,s} < \sin\theta_i\right)\end{cases} \tag{35}$$

이다.

Mindlin 판이 두 개가 임의의 각으로 연성이 되면 식 (19)~(32)의 식과 같이 각 평판에서 5개의 미지수가 존재한다. 따라서 연성된 두 개의 Mindlin 판에서의 파동전달해석을 위해서는 총 10개의 경계조건이 필요하다. 두 평판에서의 경계에서 변위 연속조건이 5개가 존재하며, 힘-모멘트 연속조건이 5개 존재한다. 두 판의 경계($x = x_t = 0$)에서의 경계조건을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$w_i = w_t \cos\phi + u_t \sin\phi \tag{36}$$

$$u_i = -w_t \sin\phi + u_t \cos\phi \tag{37}$$

$$v_i = v_t \,,\ \alpha_{x,i} = \alpha_{x,t} \,,\ \alpha_{y,i} = \alpha_{y,t} \tag{38~40}$$

$$M_{x,i} = M_{x,t} \,,\ M_{xy,i} = M_{xy,t} \,,\ N_{xy,i} = N_{xy,t} \tag{41~43}$$

$$V_i = V_t \cos\phi + N_{x,t} \sin\phi \tag{44}$$

$$N_{x,i} = -V_t \sin\phi + N_{x,t} \cos\phi \tag{45}$$

여기서

$$u = u_l + u_s \,,\ \ v = v_l + v_s \,,\ \ \alpha_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \,,$$

$$\alpha_y = \alpha_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \,,\ \ M_x = D\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\alpha_y}{\partial y}\right),$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right),\ \ V = \kappa G h\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x\right),$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ \ N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

이다.

위와 같은 10개의 경계조건을 적용하면 파동장 식 (19)~(32)의 10개의 미지수를 얻을 수 있고 각 파동의 시간평균된 x방향의 파워는 다음과 같이 표현된다.

$$P_{OPSW,i}^{inc} = \frac{1}{2}\left[\frac{D_i}{2}(1-\nu_i)\omega k_{1x,i} k_{1,i}^2\right] \times \left|\overline{A}\right|^2 , \tag{46}$$

$$P_{OPSW,i}^{refl} = \frac{1}{2}\left[\frac{D_i}{2}(1-\nu_i)\omega k_{1x,i} k_{1,i}^2\right] \times \left|B\right|^2 , \tag{47}$$

$$P_{BDFW,i}^{inc} = \frac{1}{2}\Big[D_i\left(\rho_i h_i\omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2\right)^2 \omega k_{2x,i} k_{2,i}^2 + \left(\rho_i h_i\omega^2\right)\left(\omega k_{2x,i}\right)\left(\kappa_i G_i h_i k_{2,i}\right)^2\Big] \times \left|\overline{C}\right|^2 , \tag{48}$$

$$P_{BDFW,i}^{refl} = \frac{1}{2}\Big[D_i\left(\rho_i h_i\omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2\right)^2 \omega k_{2x,i} k_{2,i}^2 + \left(\rho_i h_i\omega^2\right)\left(\omega k_{2x,i}\right)\left(\kappa_i G_i h_i k_{2,i}\right)^2\Big] \times \left|D\right|^2 , \tag{49}$$

$$P_{SDFW,i}^{inc} = \frac{1}{2}\Big[D_i\left(\rho_i h_i\omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2\right)^2 \omega k_{3x,i} k_{3,i}^2 + \left(\rho_i h_i\omega^2\right)\left(\omega k_{3x,i}\right)\left(\kappa_i G_i h_i k_{3,i}\right)^2\Big] \times \left|\overline{E}\right|^2 , \tag{50}$$

$$P_{SDFW,i}^{refl} = \frac{1}{2}\Big[D_i\left(\rho_i h_i\omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2\right)^2 \omega k_{3x,i} k_{3,i}^2 + \left(\rho_i h_i\omega^2\right)\left(\omega k_{3x,i}\right)\left(\kappa_i G_i h_i k_{3,i}\right)^2\Big] \times \left|F\right|^2 , \tag{51}$$

$$P_{l,i}^{inc} = \frac{1}{2}\left[K_i k_{l,i}\cos\theta_{li}\omega\right] \times \left|\overline{G}\right|^2 , \tag{52}$$

$$P_{s,i}^{inc} = \frac{1}{2}\left[G_i h_i k_{s,i}\cos\theta_{si}\omega\right] \times \left|\overline{I}\right|^2 \tag{53}$$

$$P_{l,i}^{refl} = \frac{1}{2}\left[K_i k_{l,i}\cos\theta_{li}\omega\right] \times \left|H\right|^2 , \tag{54}$$

$$P_{s,i}^{refl} = \frac{1}{2}\left[G_i h_i k_{s,i}\cos\theta_{si}\omega\right] \times \left|J\right|^2 \tag{55}$$

$$P_{OPSW,t}^{trans} = \frac{1}{2}\left[\frac{D_t}{2}(1-\nu_t)\omega k_{1x,t} k_{1,t}^2\right] \times \left|L\right|^2 , \tag{56}$$

$$P_{BDFW,t}^{tran} = \frac{1}{2}\Big[D_t\left(\rho_t h_t\omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2\right)^2 \omega k_{2x,t} k_{2,t}^2 + \left(\rho_t h_t\omega^2\right)\left(\omega k_{2x,t}\right)\left(\kappa_t G_t h_t k_{2,t}\right)^2\Big] \times \left|M\right|^2 , \tag{57}$$

$$P_{SDFW,t}^{tran} = \frac{1}{2}\Big[D_t\left(\rho_t h_t\omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2\right)^2 \omega k_{3x,t} k_{3,t}^2 + \left(\rho_t h_t\omega^2\right)\left(\omega k_{3x,t}\right)\left(\kappa_t G_t h_t k_{3,t}\right)^2\Big] \times \left|N\right|^2 , \tag{58}$$

$$P_{l,t}^{tran} = \frac{1}{2}\left[K_t k_{l,t}\cos\theta_{lt}\omega\right] \times \left|O\right|^2 , \tag{59}$$

$$P_{s,t}^{tran} = \frac{1}{2}\left[G_t h_t k_{s,t}\cos\theta_{st}\omega\right] \times \left|P\right|^2 \tag{60}$$

3.3 Mindlin 판의 분산장에서의 파워투과 반사계수

분산장에 대한 파워투과반사계수는 입사각에 따른 각 파동의 파워를 나타내는 식(46)~(60)을 입사각에 대한 평균을 취하면 다음과 같은 분산장에 대한 파워투과반사계수가 유도된다[7,9].

$$\left\langle P_x \right\rangle_{diffuse} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\theta) d\theta \tag{61}$$

$$T_{OO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, T_{OB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, T_{OS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}},$$

$$T_{OiL12} = \frac{P_{iL,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, T_{OiS12} = \frac{P_{iS,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}},$$

$$R_{OO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, R_{OB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, R_{OS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}},$$

$$R_{OiL11} = \frac{P_{iL,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, T_{OiS11} = \frac{P_{iS,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}},$$

$$T_{BO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, T_{BB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, T_{BS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}},$$

$$T_{BiL12} = \frac{P_{iL,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, T_{BiS12} = \frac{P_{iS,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}},$$

$$R_{BO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, R_{BB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, R_{BS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}},$$

$$R_{BiL11} = \frac{P_{iL,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, T_{BiS11} = \frac{P_{iS,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}},$$

$$T_{SO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, T_{SB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, T_{SS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}},$$

$$T_{SiL12} = \frac{P_{iL,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, T_{SiS12} = \frac{P_{iS,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}},$$

$$R_{SO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, R_{SB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, R_{SS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}},$$

$$R_{SiL11} = \frac{P_{iL,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, T_{SiS11} = \frac{P_{iS,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}},$$

$$T_{iLO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{iL,i}^{inc}}, T_{iLB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{iL,i}^{inc}}, T_{iLS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{iL,i}^{inc}},$$

$$T_{iLiL12} = \frac{P_{iL,t}^{trans}}{P_{iL,i}^{inc}}, T_{iLiS12} = \frac{P_{iS,t}^{trans}}{P_{iL,i}^{inc}},$$

$$R_{iLO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{iL,i}^{inc}}, R_{iLB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{iL,i}^{inc}}, R_{iLS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{iL,i}^{inc}},$$

$$R_{iLiL11} = \frac{P_{iL,i}^{refl}}{P_{iL,i}^{inc}}, T_{iLiS11} = \frac{P_{iS,i}^{refl}}{P_{iL,i}^{inc}},$$

$$T_{iSO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{iS,i}^{inc}}, T_{iSB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{iS,i}^{inc}}, T_{iSS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{iS,i}^{inc}},$$

$$T_{iSiL12} = \frac{P_{iL,t}^{trans}}{P_{iS,i}^{inc}}, T_{iSiS12} = \frac{P_{iS,t}^{trans}}{P_{iS,i}^{inc}},$$

$$R_{iSO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{iS,i}^{inc}}, R_{iSB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{iS,i}^{inc}}, R_{iSS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{iS,i}^{inc}},$$

$$R_{iSiL11} = \frac{P_{iL,i}^{refl}}{P_{iS,i}^{inc}}, T_{iSiS11} = \frac{P_{iS,i}^{refl}}{P_{iS,i}^{inc}}, \tag{62}$$

여기서 T_{mn12}, R_{mn11}은 각각 "m"파형의 파동이 입사할 경우 "n"파형의 파동으로 투과, 반사되는 파워비율을 의미한다. 유도된 동일 평면상에서 연성된 Mindlin 판의 수치해석을 위해 Fig. 1과 같은 반무한(semi-infinite) 평판구조물에 철(steel) 재질의 각각 0.02 m, 0.04 m 두께의 입사평판, 투과평판이 채택되었다. 각 평판의 임계주파수는 8.1 kHz, 4.1 kHz 이다. 두 평판의 연성각도는 45°로 가정하였다.

임의의 각으로 연성된 Mindlin 판에 대한 파동전달해석결과가 Figs. 2~6에 나타나 있다. 임의의 각으로 연성된 Mindlin 판에 존재하는 각 5종류의 파동이 입사할 경우에 주파수에 따른 파워투과반사계수를 도시하였다. 일반적으로 파워손실이 없는 보존조인트(conservative joint)인 경우 에너지 보존으로 인해 파워투과반사계수의 합은 1이다. Figs. 2~6에서 모든 파워투과반사계수들의 합은 모든 주파수 대역에서 정확히 1이 됨을 확인할 수 있고, 이를 통해 앞에서 전개한 이론식들의 타당성을 검증할 수 있다. 특히 Figs. 2, 4에서는 첫 번째 평판의 임계주파수(8.1 kHz) 아래 영역에서 모든 파동의 파워투과판사계수가 0이다. 이는 임계주파수 아래 영역에서는 입사파인 OPSW, SDFW가 진행파가 아니기 때문에 원거리 영역의 입사 파워가 정의될 수 없어 나타나는 현상이다. 이와 반대로 BDFW와 면내 종파, 면내 전단파가 입사하는 경우에는 전 주파수 영역에서 0이 아닌 파워투과반사계수가 존재한다. 물론

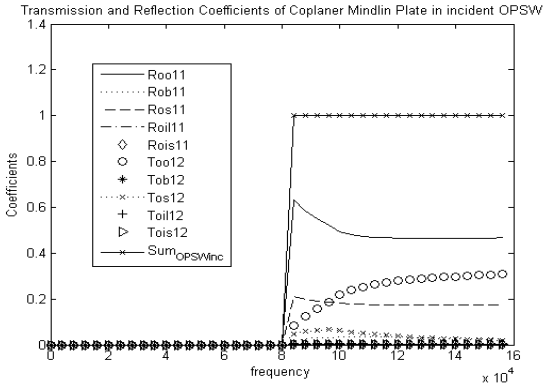

Fig. 2 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates in incident OPSW

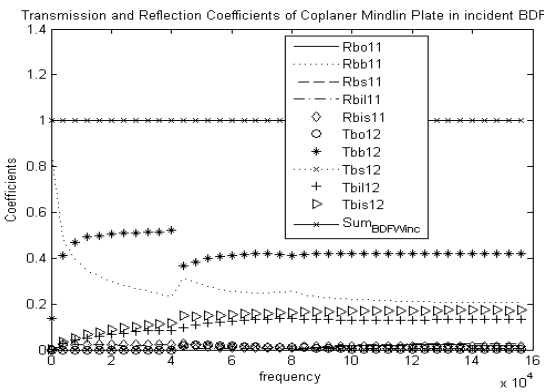

Fig. 3 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates in incident BDFW

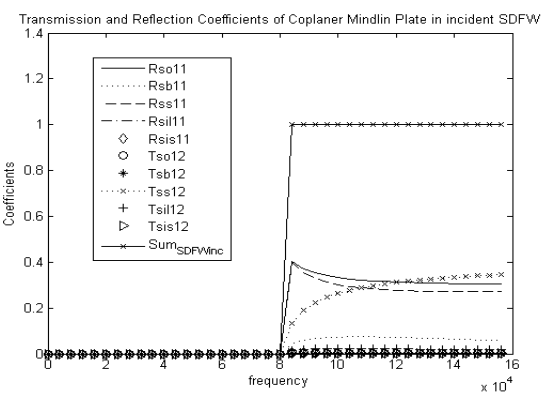

Fig. 4 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates in incident SDFW

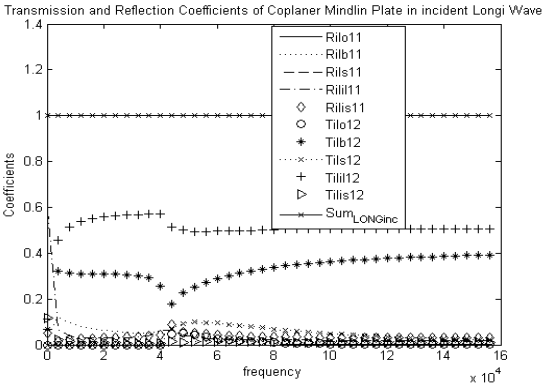

Fig. 5 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates in incident in-plane longitudinal wave

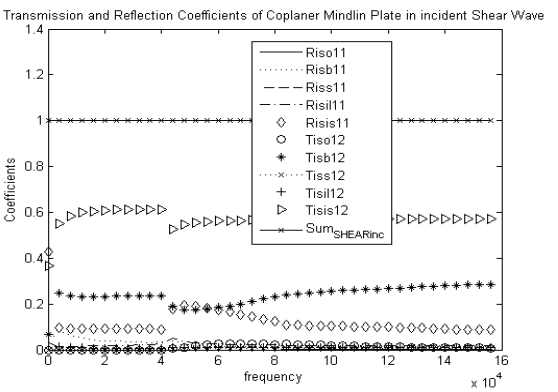

Fig. 6 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates in incident in-plane shear wave

두 번째 평판의 임계주파수(4.1 kHz) 아래에서는 투과판의 OPSW와 SDFW와 연관되는 파워투과계수는 0이 됨을 확인할 수 있다.

4. 결 론

에너지흐름해석법(EFA)이나 통계적에너지해석법(SEA)과 같은 에너지 기반 통계적 접근법은 모드밀도가 높은 고주파수 대역 진동해석에 유용한 방법이다. 따라서 1, 2차원 구조 부재인 보와 평판으로 이루어진 복합구조물의 신뢰성 있는 고주파수 대역 진동에너지를 예측하기 위해서는, 고주파수 대역 진동응답에서 무시할 수 없는 회전관성효과와 전단변형

효과를 반영할 수 있는 Timoshenko 보와 Mindlin 판에 대한 에너지 기반 통계적 해석 기법의 개발이 필수적이다.

이 연구는 임의의 형상의 복합 Mindlin 평판구조물의 에너지 기반 진동 해석을 위해 반드시 필요한 Mindlin 판에서의 면외파와 면내파 사이의 에너지 전달 관계를 유도함으로써 복합 평판구조물의 고주파수 대역 진동 해석의 신뢰성을 높이는 데 기여할 것으로 예상된다.

후 기

이 논문은 2014~2015년도 창원대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

References

(1) Lyon, R. H. and Dejong, R. G., 1995, Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Second ed., Butterworth-Heinemann, London.

(2) Wohlever, J. C. and Bernhard, R. J., 1992, Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 153, No. 1, pp. 1~19.

(3) Cho, P. E., 1993, Energy Flow Analysis of Coupled Structures, Ph.D. Thesis, Purdue University.

(4) Liew, K. M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S., 1995, Research on Thick Plate Vibration: a Literature Survey, Journal of Sound and Vibration, Vol. 180, No. 1, pp. 163~176.

(5) Nelson, H. M., 1978, High Frequency Flexural Vibration of Thick Rectangular Bars and Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, No. 1, pp. 101~118.

(6) Park, Y. H. and Hong, S. Y., 2006, Vibrational Energy Flow Analysis of Corrected Flexural Waves in Timoshenko Beam - Part I: Theory of an Energetic Model, Shock and Vibration, Vol. 13, No. 3, pp. 137~165.

(7) Park, Y. H. and Hong, S. Y., 2006, Vibrational Energy Flow Analysis of Corrected Flexural Waves in Timoshenko Beam - Part II: Application to Coupled Timoshenko Beams, Shock and Vibration, Vol. 13, No. 3, pp. 167~196.

(8) Park, Y. H. and Hong, S. Y., 2008, Vibrational Power Flow Models for Transversely Vibrating Finite Mindlin Plate, Journal of Sound and Vibration, Vol. 317, No. 3-5, pp. 800~840.

(9) Park, Y. H., 2013, Wave Transmission Analysis of Co-planar Coupled Semi-infinite Mindlin Plate, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 23, No. 6, pp. 574~580.

Young-Ho Park was born in Seoul, Korea, in 1975. He studied Naval Architecture and Ocean Engineering at Seoul National University for a bachelor's degree in 1999. He received a Ph.D. in engineering of Seoul National University in 2006. He has 5 years' experience in automotive NVH engineering by working in Hyundai Motor Company. In 2011, he moved to Changwon National University, Changwon-si, Korea, where he became an assistant professor and continued research on the vibro-acoustics of transport machines in Department of Naval Architecture and Marine Engineering.