

선형 조화 가진 시스템에서의 외부 가진력 및 복원 특성 동시 인식에 대한 수치 연구

A Numerical Study on the Simultaneous Identification of Excitation Force and Restoring Characteristic in Linear Forced Oscillation System

장택수[†]·박진수^{*}

Taek Soo Jang and Jinsoo Park

(Received July 9, 2014 ; Revised November 25, 2014 ; Accepted December 1, 2014)

Key Words : Forced Oscillation System(가진 시스템), Excitation Force(가진력), Restoring Characteristic(복원 특성)

ABSTRACT

Recently, a new method for reconstructing a forced nonlinear dynamic system has been proposed; specifically, the simultaneous reconstruction of its excitation as well as restoring characteristics of the system. The reconstruction was just theoretically shown to be possible by measuring the system's responses, based on newly introduced notions, a J -function and a zero-crossing time. However, numerically in the current paper, we are to reconstruct a linear system, i.e., we focus on numerical experiments to reconstruct both the excitation and the linear restoring characteristic of a linear forced oscillating system by using response data, based on the J -function and the zero-crossing time.

1. 서론

기계 공학, 특히 자동차 공학에 있어 디젤·가솔린 엔진 등을 지지하는 구조물은 필연적으로 엔진 왕복 운동에 의한 주기적인 진동을 받는다. 뿐만 아니라 펌프 및 터빈 구조물 또한 이와 유사한 주기적인 가진력을 받는다. 이러한 물리 시스템의 시스템 특성 인식이 가능할 경우, 시스템의 안정성과 효율성의 극대화를 위한 거동 제어 및 대처가 가능할 것이다. 공학 응용의 관점에서 외부 가진 및 시스템 복원연구가 다양하게 활발히 이루어지고 있다.

Masri 등⁽¹⁾은 신경망회로(neural network) 이론을

이용해 비선형 복원 특성을 복원하였다. 또한 Masri⁽¹⁾와 Liang 등⁽²⁾은 다차원 해석으로의 확장을 통해 다양한 응용을 시도하였다. Spina⁽³⁾는 힐버트 변환(Hilbert transform)을 이용하여 비선형 인식 기법을 개발하였다. Lu와 Law⁽⁴⁾는 조화(harmonic) 및 충격 입력 가진의 시스템 파라미터 인식 연구를 수행하였다. Chen과 Li⁽⁵⁾는 입력 가진 특성을 시간 영역에서 측정할 수 있는 방법을 연구하였다. 김재영과 유홍희⁽⁶⁾는 조화 외력을 받는 구조물의 동적 국부화 현상을 연구하였다. 이성범과 Wineman⁽⁷⁾은 부상과 같은 점탄성 부재의 하중-변위 응답 측정을 통한 비선형 응력 해석을 수행하였다. 장택수 등⁽⁸⁾은 최근 비선형 감쇠 시스템에서의 비조화적이고(non-harmonic) 주기적 가진 특성을 해석하는 연구

[†] Corresponding Author ; Member, Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University
E-mail: taek@pusan.ac.kr
Tel : +82-51-510-2789, Fax : +82-51-581-3718

^{*} Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University

[‡] Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

를 수행하였다.

이와 같이 다양한 가진 시스템의 복원 특성 및 외부 가진력에 대한 인식 연구가 활발하게 이루어졌으나, 이들을 동시에 정밀하게 인식할 수 있는 연구는 거의 전무하다. 하지만 최근 장택수⁽⁹⁾에 의해 비선형 조화 가진 시스템에서의 운동 응답을 측정함으로써 외부 조화 가진 특성과 비선형 복원 특성을 동시에 추정할 수 있는 이론적 연구를 수행하였다. 특히, 이 연구는 특히, J -함수(J -function)와 영점 시간(zero-crossing time) 개념을 제안함으로써 가진 시스템에서의 복원 특성과 외부 조화 가진 특성을 동시에 고려하는 수학적 정식화를 수행하였다.

이 연구에서는 장택수⁽⁹⁾에 의해 제시된 J -함수와 영점 시간 개념을 응용하여 선형 조화 가진 시스템의 외부 가진 특성과 선형 복원 특성을 수치 실험을 통해 동시에 인식하는 수치연구를 수행하였다. 즉, 선형 조화 가진 시스템의 운동 응답을 측정함으로써 시스템 특성인식을 수행할 수 있었고 실제 공학적 적용이 용이함도 함께 확인할 수 있다.

2. 선형 조화 가진 시스템

식(1)은 선형 복원 특성을 가지고 있는 선형 조화 가진 시스템이며 $\Gamma \cdot \cos \omega t$ 의 외부 조화 가진이 작용하고 있다($t > 0$).

$$m\ddot{q} + D(\dot{q}) + k \cdot q = \Gamma \cdot \cos \omega t \tag{1}$$

이때, q, \dot{q}, \ddot{q} 는 가진 시스템의 운동 응답, $D(\dot{q})$ 은 속도 의존 감쇠 특성, k 는 선형 복원 계수, $k \cdot q$ 는 선형 복원력, Γ 는 외부 가진력 크기, ω 는 가진 주기를 나타낸다. 또한 J -함수(J -function)의 형태는 식(2)와 같다⁽⁹⁾.

$$J(\dot{q}, \ddot{q}) = m\dot{q} + D(\dot{q}) \tag{2}$$

이때, $J=0$ 을 만족하는 영점 시간(zero-crossing time)을 t_J^{ze} (> 0)으로 정의한다⁽⁹⁾.

3. 선형 조화 가진 시스템의 파라미터 산정

식(1)의 선형 조화 가진 시스템의 외부 가진의

크기 및 선형 복원 계수는 아래와 같이 각각 정식화된다⁽⁹⁾.

$$\Gamma = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^{T+t_0} D(\dot{q}) \cdot \dot{q} dt}{\int_{t_0}^{T+t_0} (\cos \omega t) \cdot \dot{q} dt} \tag{3}$$

$$k = \frac{\Gamma \cdot \cos \omega \cdot t_J^{ze}}{q[t_J^{ze}]} \tag{4}$$

이때, t_0 는 운동응답의 평형상태(steady-state)의 임의의 시간으로 정의하고, T 는 한 주기의 시간을 나타낸다. 식(4)의 Γ 는 식(3)으로부터 얻어진 결과이다.

하지만 실제 응답 측정 장치(가속도계 등)를 이용하여 조화 가진 시스템의 운동응답을 측정하는 경우, 식(4)의 복원 계수 추정 값은 정확한 영점 시간의 선형 보간 결과에 따라 그 해석의 에러(오차) 정도가 결정된다. 따라서 정확한 영점 시간 보정을 위해 아래와 같이 선형 보간을 통해 에러를 개선한다.

선형 보간을 통한 영점 시간은

$$t_J^{ze} = t_b - J[t_b] \cdot \frac{t_b - t_a}{J[t_b] - J[t_a]} \tag{5}$$

이며 이때, t_a 와 t_b 는 Fig.1과 같이, 각각 $J=0$ 의 선형 보간할 영점 시간의 전후의 측정된 시간이다.

이때, 선형 보간 된 $q[t_J^{ze}]$ 와 $F[t_J^{ze}]$ 는 아래와 같다. ($F[t] = \Gamma \cdot \cos \omega t$)

$$q[t_J^{ze}] = q[t_b] - (t_b - t_J^{ze}) \cdot \frac{q[t_b] - q[t_a]}{t_b - t_a}, \tag{6}$$

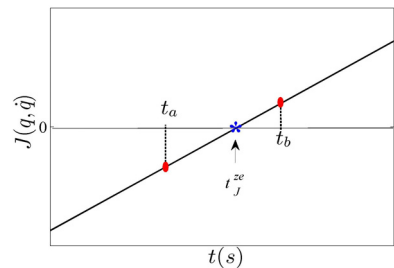


Fig. 1 t_J^{ze} between t_a and t_b

$$F[t_J^{ze}] = F[t_b] - (t_b - t_J^{ze}) \cdot \frac{F[t_b] - F[t_a]}{t_b - t_a}, \quad (7)$$

이에 따라 복원 특성계수는 식 (8)과 같다.

$$k \approx \frac{F[t_J^{ze}]}{q[t_J^{ze}]} \quad (8)$$

4. 시스템의 시간이력 샘플 도출

이 연구의 타당성을 검증하기 위해 test 1에서는 완전해를 이용하여 선형 조화 가진 시스템의 외부 가진의 크기와 선형 복원 계수를 도출한다. 그리고 연구의 적용성을 평가하고자 test 2에서는 일반적인 물리시스템의 선형 조화 가진 시스템의 파라미터를 수치적으로 도출하고 그 타당성을 검증한다. Test 1과 test 2의 지배식은 식 (1)에서 $D(\dot{q})=c\dot{q}$ 와 같다. 즉,

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = \Gamma \cos \omega t \quad (9)$$

4.1 Test 1

Test 1에서 사용한 주요 물리계수들은 Table 1에 나타나 있고, 완전해(steady state solution)의 형태는 식 (10)과 같다.

$$q(t) = \sin t \quad (10)$$

식 (10)과 같이 물리 시스템의 운동 응답이 발생할

경우, 식 (3)에서 $t_0 = 4\pi$, $T = 2\pi$ 로 각각 가정할 수 있다. 따라서 해석적으로 외부 가진의 크기를 1로 얻을 수 있다. 또한 J -함수는,

$$J = -\sin t + \cos t = \sin(t + 3\pi/4) \quad (11)$$

을 만족한다. 따라서 식 (4)의 영점 시간 t_J^{ze} 는 $\pi/4 + n\pi$,

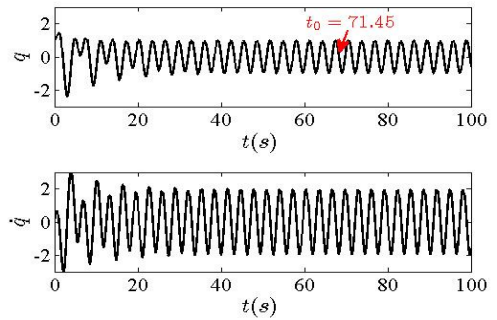


Fig. 2 System responses of Eq. (9) with Table 1- test 2 and the initial condition (12)

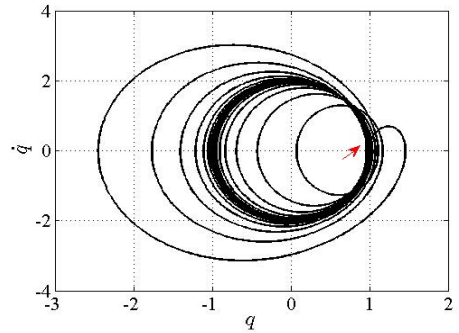


Fig. 3 Phase diagram corresponding to the motion responses in Fig. 2

Table 1 Principal parameters for test 1 & test 2

Parameter	Symbol	Value	
		Test 1	Test 2
Mass(kg)	m	1.0	1.0
Linear damping coeff.(N·s/m)	c	1.0	0.2
Linear restoring coeff.(N/m)	k	1.0	1.0
Amplitude(N)	Γ	1.0	3.0
Frequency(rad/s)	ω	1.0	2.0

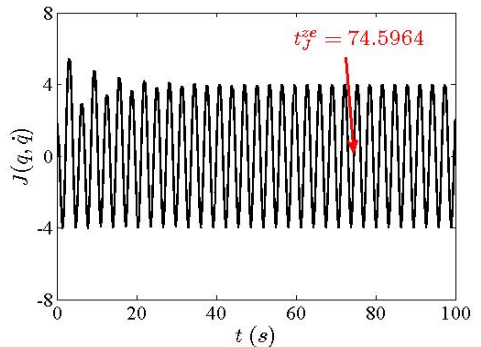


Fig. 4 J-function in Eq. (2)

Table 2 Comparison of calculated parameters and the exact ones

Parameter	Exact	Numerical	Error (%)
Amplitude, Γ (N)	3.0000	3.0097	0.32
Linear restoring coeff., k (N/m)	1.0000	1.0004	0.04

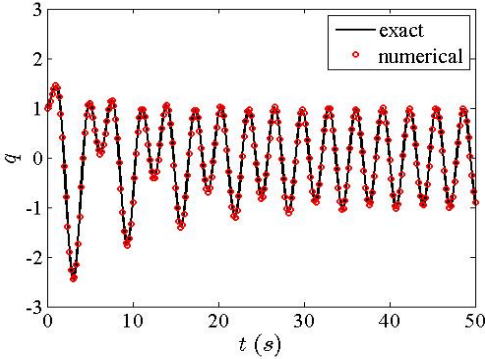


Fig. 5 Numerically recovered system response compared to the exact one in Fig. 2($t=[0,50]$)

($n=1,2,\dots$)을 만족한다. 이를 통해 선형 복원 계수를 1로 해석적으로 도출할 수 있다.

이와 같이 해석적으로 도출한 외부 가진의 크기와 선형 복원계수는 실제 처음 Table 1에서 가정했던 계수와 동일한 결과이므로 이 연구의 타당성을 확인할 수 있다.

4.2 Test 2

Table 1의 test 2의 변수들을 이용하여 수치적분 방법을 이용하여 시스템의 시간 이력 샘플(q, \dot{q})을 Fig. 2와 같이 도출할 수 있다. 이때 응답 초기 조건은 식 (12)와 같다.

$$q(0)=1.0, \dot{q}(0)=0. \tag{12}$$

Fig. 3은 Fig. 2의 위상그림(phase diagram)이다. ($t=[0, 100]$, $\Delta t=0.01$) Fig. 2의 변위 샘플로부터 식 (3)의 $t_0=71.45$, $T=3.14(=2\pi/\omega)$ 을 측정한다. 이를 식 (3)에 대입하여 외부 가진의 크기를 도출한다. 또한 J -함수를 구하기 위해 속도 샘플을 고차 수치 차분(five-point stencil) 하여 가속도 샘플 \ddot{q} 를 얻는

다. 식 (2)의 J -함수 수치그림은 Fig. 4에 나타내었다. 또한 $t_a = 74.59$, $t_b = 74.60$ 일 때, 식 (5)의 선형 보간을 통해 $t_j^{se} = 74.5964$ 을 구하였다. 따라서 식 (8)의 $q[t_j^{se}] = -0.0983$, $F[t_j^{se}] = -0.0983$ 이고, 수치적으로 추정된 시스템의 선형 복원 계수는 $k = 1.0004$ 이다.

Table 2는 식 (3)과 식 (8)을 이용하여 수치적으로 계산한 결과를 각각 실제 해와 오차를 비교한 결과이다. Fig. 5는 실제 해와 수치적으로 계산한 Γ 와 k 를 식 (9)에 대입하여 운동 응답을 복원하여 서로 비교한 결과이다. 그 결과, Table 2에서 확인할 수 있듯이, 복원 응답 수치 결과와 실제 응답은 서로 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

5. 결 론

이 연구는 선형 조화 가진 시스템의 운동 응답을 측정하고 앞서 수행된 장택수 이론 연구에서 제안된 J -함수와 영점 시간의 개념을 응용하여 정밀하게 동시 복원이 가능함을 확인하였다. 또한 간단한 수치 실험을 통해 조화 가진 시스템의 운동응답을 측정/보간하여 외부 가진력 크기와 선형 복원 계수를 정밀하게 추정하였다.

이 연구를 통해 비교적 간단하고 정밀하게 시스템복원특성과 외부가진을 인식함을 알 수 있었고, 이러한 결과들을 다양한 진동시스템으로의 응용이 가능할 것으로 사료된다.

후 기

이 과제는 2013년도 부산대학교 교수국외장기파견지원비에 의하여 연구되었음.

References

(1) Masri, S. F., Chassiakos, A. G. and Cauchey, T. K., 1993, Identification of Nonlinear Dynamic Systems Using Neural Networks, Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 123~133.
 (2) Liang, Y. C., Zhou, C. G. and Wang, Z. S., 1997, Identification of Restoring Forces in Non-linear

Vibration Systems based on Neural Networks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 206, pp. 103~108.

(3) Spina, D., Valente, C. and Tomlinson, G. R., 1996, A New Procedure for Detecting Nonlinearity from Transient Data Using the Gabor Transform, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 11, pp. 235~254.

(4) Lu, Z. R. and Law, S. S., 2007, Identification of System Parameters and Input Force from Output only, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 5, pp. 2099~2111.

(5) Chen, J. and Li, J., 2004, Simultaneous Identification of Structural Parameters and Input Time History from Output-only Measurements, *Computational Mechanics*, Vol. 33, No. 5, pp. 365~374.

(6) Kim, J. Y. and Yoo, H. H., 2001, Dynamic Response Localization of Simple Periodic Structures Undertaking External Harmonic Forces, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 11, No. 6, pp. 175~180.

(7) Lee, S. B. and Wineman, A. S., 1999, A Model for Non-linear Viscoelastic Axial Response of an Elastomeric Bushing, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, No. 5, pp. 779~793.

(8) Jang, T. S., Baek, H., Choi, H. S. and Lee, S. G., 2011, A New Method for Measuring Nonharmonic Periodic Excitation Forces in Nonlinear Damped Systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*,

Vol. 25, No. 6, pp. 2219~2228.

(9) Jang, T. S., 2014, Uniqueness and Stability of the Simultaneous Detection of the Nonlinear Restoring and Excitation of a Forced Nonlinear Oscillation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 228, pp. 234~239.



Taek Soo Jang is professor at the Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering in Pusan National University. He received his Ph.D. degree from Seoul National University. His main field of research may be developing a mathematical method for discovering a non-linear problem arising in water waves, floating body mechanics and their combined inverse problems (regularization techniques to remedy the ill-posedness): system identification of offshore structures.



Jinsoo Park is a Ph.D. student at the Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, under the supervision of Prof. T.S. Jang. He received his M.S. degree in NAOE, PNU.