대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 4, 585~ 604. Nov 2013

기하 정리의 일반성 인식을 위한 동적기하환경의 활용

장 혜 원* · 강 정 기**

본 연구는 증명 자체가 일반성을 전제로 한다는 사실에도 불구하고, 다수의 학생들은 증명을 수행한 후에도 기하 정리의 일반성을 인식하지 못한다는 문제로부터 출발한다. 이 문제를 경험적 확신, 도형 표현의 특수성 및 기하 변수의 역할 등의 측면에서 조명함으로써 그 해결책으로서 동적기하환경을 제안한다. 곧 동적기하환경에서의 문제해결 경험이 기하 정리의 일반성 인식에 미치는 영향을 조사하고 교육적 시사점을 제공하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 기하 단원에서의 증명 학습 경험을 토대로 증명을 할 수 있지만 정리의 일반성을 인식하지 못한 중학교 3학년 학생 4명을 대상으로 동적기하환경을 제공하고 그 탐구과정에서 학생들의 일반성 인식과 관련한 인지 변화를 관찰, 분석하였다. 분석 결과를 토대로 동적기하환경이 학생들의 기하 정리의 일반성 인식에 미치는 효과와 교육적 시사점에 대해 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

증명은 정리의 일반성에 대한 입증이다. 일반성의 관점에서 '증명은 정리에 진술된 일반적인 관계를 설정하는 논리적인 주장(White & Mitchelmore, 1999)'이라는 정의에 따르면 증명 자체가 일반성을 전제로 한다는 것을 알 수 있다. 그런데 증명을 수행했음에도 불구하고 학생들은 증명된 정리가 주어진 조건을 만족하는 모든 경우에 성립한다는 일반성을 인식하지 못한다는 결과를 제시하는 다수의 연구가 있다(서동엽, 1995; 류성림, 1998; Harel & Sowder, 1996 등). 증명의 일반성을 확신하지 못하는 학생들은 증명의 의의 자체를 충분히 이해하지 못하였기 때문에 정리의 내용에 대한 확신을 갖지 못하거나 특수한 경우에 대한 확인을 요구하는 반응을 보이기도 한다.

정리의 일반성은 증명의 일반성과 동시에 확보되므로 양자를 명확히 구분하기는 어렵다. 증명 과정에서 성립하는 성질의 일반성을 인식함으로써 그 결과로서의 정리에 대한 일반성을 인식하게 되는 것이다. 이와 같은 특성을 강정기(2013)는 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다'를 증명하는 세 단계에서 각 단계마다 '어떠한'이라는 전칭형용사를 삽입함으로써 구체화하였는데, 결국 앞선 두 단계에 나오는 일반성은 증명의 일반성과 관련되고 마지막 단계에서 결론의 일반성은 정리의 일반성에 대한 것이며, 후자는 전자로부터 파생되는 일반성에 해당한다고 볼 수 있다. 따라서 증명 학습시 증명의 필요성에 대한 인식과 더불어 정리의 일반성에 대한 이해가 수반되어야함을 의미한다.

이와 같은 정리의 일반성에 대한 증명 관점에

* 서울교육대학교, hwchang@snue.ac.kr
** 남산중학교, jeonggikang@gmail.com

서의 재고와 더불어 그 일반성을 인식하는 데 방해가 될 두 가지 요인을 생각할 수 있다. 도형 표현의 특수성 및 기하의 변수 역할과 관련한다.

수학 연구의 대상은 추상적 개념이다. 대수는 물론 기하에서도 다를 바 없다. 다만 기하에서는 도형의 성질을 탐구하기 위해 도형을 시각화하여 구체적 대상으로 지각할 수 있다는 이점을 교육적으로 십분 활용할 수 있다. 이때 그와 같은 교육적 편의가 기하 연구 대상의 추상성 자체를 변화시키지 못함에도 불구하고 학생들은 구체적인 도형 표현의 특수성에 제한되는 사고를 하려는 경향을 간과할 수 없다. 증명에 이용된 특정 도형 표현이 함의하는 일반성을 인식하지 못한 채 그 표현 자체에 대한 것으로 생각하여 정리 역시도 제한적으로 이해하는 경우가 많다. 결국 학생들은 증명 및 정리의 범위를 주어진 도형 표현에 국한시켜 사고하는 경험을 갖게 되는 것이다.

한편, 산술에서 대수로의 발달은 일반화의 결과이며 그것을 가능하게 한 것이 변수의 역할이라 할 수 있다. 즉 $3+5=5+3$으로부터 시작된 덧셈에 대한 교환법칙에 대한 인식은 $x+y=y+x$라는 문자를 포함한 식 표현에 의해 완성되는 것이다. 그러면 기하의 경우에는 어떠한가? 특수한 도형 표현을 통해 인식된 성질의 일반화를 가능하게 하는 변수의 역할을 할 수 있는 것이 무엇인가?

예를 들어 '삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180도이다.'라는 정리를 보자. 주어진 삼각형 ABC에서 세 내각 A, B, C를 측정하여 180도를 얻었다고 가정하여[1], 결과를 식으로 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$라고 나타낸다. 이때 A, B, C는 주어진 삼각형의 각을 지칭하는 이름이지만, 증명을 통해 얻은 일반화된 정리 역시 동일한 식으로 표현된다. 물론 그때의 A, B, C는 이름이 아닌 삼각형의 일반각을 나타내는 변수 역할인 것이다. 두 경우에 문자가 지칭하는 대상의 범위가 확연히 다름에도 불구하고 식에 포함된 문자가 동일하다는 사실이 학생들에게 인지적 어려움을 야기시키는 요인으로 작용하게 된다.

이와 같이 대수에서는 표현 대상의 한계에 대한 인식과 더불어 일반성을 표현하고자 매개 역할로서의 문자 변수를 도입함으로써 표현 자체로 지칭 대상을 확연히 구분하게 되지만, 기하 증명에서의 도형 표현은 그 표현 자체의 변화 없이 의미의 확장만을 초래한다. 더욱이 대수와 기하에서의 사례 간에는 미묘한 질적 차이가 있다는 점 또한 주목할 필요가 있다. 전자의 변수는 수치로서 이산적이지만, 후자의 변수는 각의 크기나 변의 길이와 같이 연속적이라는 점이다 (de Villiers, 1998).

이와 같은 차이는 학생들이 대수 정리의 일반성에 비해 기하 정리의 일반성을 잘 파악하지 못하도록 하는 이유로 작용 가능하며, 따라서 본 연구에서는 주어진 표현에서 인식된 성질의 일반성 인식을 돕기 위해 그 표현에 역동성을 부여함으로써 주어진 조건 내에서 원하는 만큼 다양한 크기로의 변화가 가능한 동적기하환경 (Dynamic Geometry Environment: DGE)을 이용하고자 한다. 이때 DGE는 드래깅에 의해 비본질적인 요소가 마음껏 변화되는 다양한 모양과 크기를 제공하며, 이를 통해 기하 변수를 제공할 수 있다. 이 변수의 역할은 주어진 조건 내에서 각의 크기나 변의 길이가 어떻게 변해도 정리가 성립함을 인식하는 경험을 독려하는 것이다. 앞서 언급한 예에서 본다면, 주어진 삼각형에서 세 내각의 크기를 자유자재로 변화시킴으로써 각 A, B, C가 임의의 세 내각을 지칭하며, 따라서 정리는 어떠한 모양의 삼각형에 대해서도 성립

1) 실제로 측정의 오차 때문에 180도를 얻기란 어렵다. 이러한 의미에서 기하 정리는 생성 과정에서는 경험적 결과물일지라도 학문 체계 내에서의 위상은 논리 연역적 특성을 띠는 고유의 성질을 지니게 된다.

한다는 일반성을 인식하도록 한다는 생각이다. 이와 같은 생각은 Sarracco(2005)가 언급한 정리와 문제에 내재된 아이디어의 보다 의미 있는 이해를 가능하게 한다는 DGE의 장점에 의해서 뒷받침된다. 또한 Dienes(1960, 1963)가 수학적 사고에서 추상화와 일반화의 과정이 수학적 다양성의 원리 및 지각적 다양성의 원리에 입각하여 변화 속에서 불변적 구조가 인식되어야 가능함을 말한 것에서도 확인된다. 곧 DGE의 역동성을 이용하여 변화가 허용되는 변인에 대해 다양한 변화를 제공하고 그 속에서 변하지 않는 구조로서 불변 성질을 인식하는 것이 곧 기하 정리의 일반성에 대한 인식으로 간주될 수 있다.

이에 본 연구는 증명을 수행했음에도 불구하고 기하 정리의 일반성에 대한 인식이 결여되어 있다는 문제점에서 출발하여, 학생들이 정리의 일반성에 대해 인식하는 것을 돕기 위해 DGE에서의 탐구활동을 경험시킴으로써 학생들의 일반성 인식과 관련한 인지 변화 과정을 관찰하고, 교육적 시사점을 제공하는 것을 목적으로 한다. 이때 DGE는 기하 표현에 역동성을 부여함으로써 표현의 특수성을 극복하고 변화 가능한 요인을 변화시키는 변수 역할을 하는 동시에, 기하 정리가 성립한다는 것에 대한 경험적 확신을 제공하는 역할로 활용될 것이 의도된다.

II. 이론적 배경

본 연구의 목적인 기하 정리의 일반성 인식을 돕기 위한 DGE의 활용과 관련하여 두 가지 관점에서 이론적 고찰을 하고자 한다. 하나는 정리의 일반성 인식은 증명의 일반성 인식의 연장선 속에서 이루어지므로 활용되는 DGE가 제공하는 경험적 확신이 연역적 증명에 미치는 영향의 측면이고, 다른 하나는 정리의 일반성 인식을 제한하는 표현의 특수성을 극복하는 차원이다. 기하 정리의 일반성과 관련하여 이와 같은 두 가지 요인을 고려하는 타당성은 학생들은 경험적 확인이 곧바로 일반화될 수 없다는 것을 깨닫지 못할 뿐만 아니라, 다른 한편으로 단 하나의 그림과 관련된 연역적 증명의 일반성을 인식하지도 못함을 주장한 Marrioti(2006)에 의해서도 뒷받침된다.

1. 기하 정리에 대한 경험적 확신이 증명에 미치는 영향

학생들은 증명의 의의에 의해 부여되는 정리에 대한 확신보다 경험적 확인에 의해 확보되는 확신에 크게 의존하는 경향이 있다. Lakatos (1961)에서 교사가 다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 수 사이의 관계에 대한 추측을 검사한 후 증명을 하였는지 묻자 학생은 다음과 같이 답한다.

> 저 자신은 아직 이 정리에 대한 엄밀한 증명을 하지 못했음을 인정하지 않을 수 없습니다.… 그러나 그 정리가 참임이 많은 경우에 입증되었으므로 그 정리가 모든 입체에 대하여 성립한다는 데에는 의심할 여지가 없습니다. 그래서 그 명제는 만족스럽게 증명될 수 있는 것으로 생각됩니다.

이는 정리에 대한 확신 및 일반성의 획득이라는 증명의 의의와 달리, 학생들은 증명 없이도 정리의 일반성을 확신하고 있음을 보여준다. 이는 수학자들도 마찬가지다. Polya(1954)는 ‘몇 가지 경우에서 정리를 확신하고자 한다면, 우리는 그것에 대한 귀납적 증거를 수집하여야 한다. 귀납적 증거는 초기 의심을 극복하게 하며, 이론에 대하여 강한 확신을 갖게 한다. 이 같은 확신 없이 증명에 착수해야한다는 용기를 갖기란 어렵다. 당신이 이론이 참이라는 것을 당신 스스로 만족할 때, 당신은 그것을 증명하기 시작한다.’고 하였다.

그러나 선행연구 중에는 경험적 확신이 증명의 의의에 대한 이해에 방해가 된다는 주장이 다수 있다(de Villiers, 1998; Gonobolin, 1975 등). 예컨대 Fischbein & Kedem(1982: 류성림, 1998 재인용)의 연구에 의하면 다수의 학생들은 이미 입증된 명제를 경험적으로 검토하기를 원한다. 이러한 결과로부터 평범한 학생들은 어떤 논증의 타당성을 경험적으로 해석하는 쪽으로 편향되는 경향이 있고, 그러한 편견을 모른 채 자연스럽게 가능한 확인물을 모아서 어떤 명제를 지지하려고 노력하는 경향이 있기 때문에 연역적 증명의 본질을 이해하는 데 실패한다고 분석되었다. 이에 근거하여 경험적 확신의 중요성에 의문을 제기할 수 있지만, 수학적 관점에서 완벽한 연역적 증명이 교육적 관점에서는 경험적 정당화에 근거한 확신이 없다면 학생들로 하여금 증명의 필요성조차 인식시킬 수 없기 때문에 한계를 지니게 된다. 경험적 확신이 결여된 증명 지도에서 증명에 대한 확신은 교사의 권위에 의해 획득되는 것이지 학생 스스로의 증명 활동으로부터 비롯되기는 어렵다. 실제로 특수한 경우에 대해 정리를 확인한 학생은 그러한 경험이 없는 학생보다 정리를 더 쉽게 수용할 것이며(서동엽, 1995), 경험의 횟수가 많을수록 어느 정도까지는 확신의 정도 또한 상승할 것으로 기대된다.

따라서 본 연구는 경험적 확인을 선호하는 학습자의 본성을 그대로 받아들여 정리 및 증명의 일반성 인식을 추구함에 있어 경험적 확신을 제공하고 이를 바탕으로 하여 학습자의 욕구를 충족시키는 입장을 취하고자 한다. 문제는 경험적 확신 자체가 아니라 경험적 확신을 얻은 이후, 경험적 확인의 한계에 대한 인식 없이 곧바로 형식적 증명이 이루어지는 데 있기 때문이다. 본 연구에서 활용할 DGE인 GPS의 경우, 드래그 기능에 의해 무수히 많은 경우에 대한 확인이 가능하지만 그 수가 아무리 많다하더라도 수학적 증명에 미치지는 못한다는 한계를 인식시킬 필요가 있는 것이다. 또한 DGE의 활용은 연역적 정당화와 경험적 정당화의 연결 수단으로 컴퓨터 환경의 이용을 제안한 Hoyles & Jones(1998)와 같은 맥락에서 경험적 자료에 역동성을 부여함으로써 연역적 증명으로의 이행과 아울러 일반성 인식을 돕는 역할을 기대한다. 이와 같은 경험적 확신의 필요성에 대한 긍정적 입장은 증명 지도를 위해 경험적 방식과 연역적 방식이 공존하는 문제 활용을 제안한 Schoenfeld(1986: 류성림, 1998 재인용)나 학습자의 인지적 측면을 재고하여 중학교 수준에서 증명을 약화시킨 2009 개정 교육과정의 취지와도 일치하는 것으로 볼 수 있다.

2. 기하 정리의 일반성 인식을 위한 표현의 역동성

기하 정리 및 증명에서 도형 표현이 지닌 이중적 위상은 두 가지 측면에서 논의될 수 있다. 도형 표현의 구체성과 그 표현이 함의하는 도형 개념의 추상성, 그리고 주어진 도형 표현 자체만을 고려하는 특수성과 주어진 조건의 도형 전체를 고려해야 하는 일반성이다.

기하 개념은 추상적 대상을 다루지만 그 표현은 구체적인 특정 대상으로 나타나기 때문에 공간적 유한성과 물리적 제약성을 지닌다(Mesquita, 1994)는 이중성은 학생들로 하여금 지각된 성질에 근거하여 사고하도록 함으로써 종종 오류를 유발시킨다. 한편 기하 정리 및 증명에서 이용되는 도형 표현은 물리적 제약상 특수한 하나의 경우로 제시될 수밖에 없지만 의미상 '임의의' 도형을 대상으로 하기 때문에 그로 인한 어려움이 야기되기도 한다. 서론에서 언급한 논의에 비유컨대, 주어진 삼각형은 대수로 다루어질 것이 요구되지만 학생들은 산술로 다루는 것이다. 산술에서 대수로의 전이를 가능하게 한 것이 문자

였지만, 기하에서는 그 역할을 수행할 적절한 매개 없이 교실에서 다루어져 왔다.

어느 쪽이든 하나의 대상이 이중성을 띤다는 사실은 학생들에게 인지적 장애를 일으키기에 충분하며 본 연구의 관심은 특히 후자의 이중성과 관련된다. 이를 극복하기 위한 교수학적 도구로 DGE를 활용하는 것이다.

우선 주어진 표현이 특수한 도형이 아니라 ‘임의의’ 도형임을 파악하는 한 가지 방법으로 DGE의 역동성에 의존할 수 있다. 이때 변할 수 있는 요소와 변해서는 안 되는 요소에 대한 인식에 기초하여 변해도 무방한 요소를 얼마든지 다양하게 변화시켜 나타내봄으로써 주어진 기하 성질에 대한 탐구와 확인을 가능하게 한다. 주어진 성질을 만족하는 것이 결코 한 가지 사례에 국한된 것이 아님을 시각적으로 확인하고, 하나가 아닌 다수의 사례에서 성질을 확인할 수 있는 경험을 제공해준다. 이 역동성은 주어진 표현의 특수성으로부터 그 표현이 함의하는 일반성으로의 전이를 가능하게 하는 매개체로 역할한다. White & Mitchelmore(1999)가 정리의 일반성 이해를 돕기 위해 DGE의 활용을 주장한 것도 어떠한 배치 속에서도 정리가 성립함을 보여준다는 특징에 기인한다.

특히 DGE의 역동성은 기하 정리에서 변수의 본질인 연속성이라는 특성을 구현할 수 있다. 기하 표현에서 임의의 대상을 함의하는 것은 꼭지점이나 변을 드래그함으로써 구현되는데, 이때의 변화가 연속성을 특징으로 하기 때문이다.

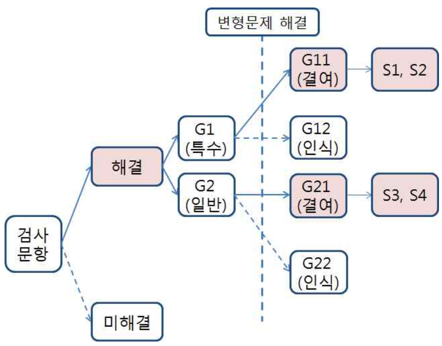
DGE는 또한 시각적 표현의 정확함에 대한 요구를 충족시킨다. de Villiers(1998)는 도형 표현의 시각적 부정확함으로 인한 잘못된 결론의 유도 가능성을 말한다. ‘기하는 부정확하게 그려진 그림으로부터 정확한 결론을 이끌어내는 기술이다’라는 프랑스 수학자의 말을 인용하면서, 실제로는 그림에서 구성상의 오류나 잘못된 가정으로 인해 얼마나 쉽게 잘못된 결론에 이를 수 있는지를 주장하였다. 이는 준경험적 확인을 위해 예를 정확하게 구성해야하는 중요성을 강조한다. 따라서 기하 정리와 관련된 도형 표현 역시 가능한 한 정확하게 그리는 것이 정리 및 증명 지도에 도움이 될 것이다. 교실에서 공학용 도구 없이 칠판 위에 부정확하게 그린 그림에 비해 컴퓨터 프로그램이 제공하는 DGE를 통한 정확한 구성은 이러한 맥락에서의 오류를 최소화할 수 있는 방안이 된다.

본 연구는 이상의 고찰에 근거하여 기하 표현의 이중성 및 한계를 인식하고 극복하기 위한 도구로서 DGE를 활용할 것이다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 참여자

연구를 위해 경남 창원의 N중학교 3학년 1개 학급 학생 28명을 대상으로 검사문항 1과 변형문제(<표 III-2>)를 적용한 결과에 따라 총 4명의 학생이 선정되었다. 3학년을 대상으로 한 이유는 증명을 학습하여 증명에 익숙함에도 불구하고 정리의 일반성을 인식하지 못하는 학생을 선발하기 위함이다. 선정 과정은 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 연구 참여자의 선정

이 과정은 역동성을 배제한 지필 환경에서 진행되었다. 1단계로 문항 1의 미해결자는 본 연구에서 의도하는 '증명에 익숙하다'는 조건에 위배되므로 해결자 16명을 1차 선정하였다. 이들을 대상으로 2단계 검사문항인 변형문제를 제시하였다. 해결자는 다시 특정 데이터를 이용하여 푼 학생(G1그룹) 8명과 o, x 등의 기호를 이용하여 일반적 방식으로 푼 학생(G2그룹) 8명으로 대별할 수 있다. 이들로 하여금 쉬는 시간과 방과 후 시간을 활용하여 일대일 면담 형식으로 변형문제를 다시 풀도록 하였다. 시간제한은 없었으나 일인당 대략 20분 정도의 시간이 할애되었다. 해결자 16명은 모두 즉각적으로 답하지 못하고 변형문제를 다시 풀려고 하였다. 이는 그들이 문제가 함의한 일반성을 인식하지 못하고 있음을 보여준다.

그런데 문제해결 이후, 그들의 반응은 그룹에 상관없이 다시 두 가지로 대별되었다. 변형문제가 원문제와 동일함을 인식한 경우와 원문제와 비슷하지만 다른 문제로 인식한 경우이다. 전자는 해결 이후 일반성을 인식한 경우이고 후자는 일반성을 인식하지 못한 경우에 해당한다. 구체적으로, 변형문제 해결 후 G1에서는 일반성을 인식한 학생이 한 명도 없었던 반면 G2에서는 2명을 제외한 6명의 학생이 일반성을 인식하였음은 주목할 만하다. 일반성을 인식한 6명의 학생은 원문제와 변형문제를 해결하는 방식이 동일했으며, 일반성 인식이 결여된 2명의 학생은 원문제를 해결한 방식과 변형문제를 해결하는 방식에 있어 다소 차이를 보였다.[2)]

<표 Ⅲ-1> 연구 참여자 선정 결과

그룹	명수	그룹	학생수
G1	8	G11	8
		G12	0
G2	8	G21	2
		G22	6

<표 Ⅲ-1>에서 G12와 G22는 변형문제의 해결 이후 일반성을 인식하게 된 학생들을 의미하며, 특히 G12는 특정 수치를 이용했지만 그것이 일반성을 띤 대푯값의 역할로 간주된 경우인데 본 연구에서는 해당자가 없었다. 본 연구는 주어진 검사문항을 풀었지만 문제에 포함된 도형의 성질의 일반성을 인식하지 못한 학생들에 대한 DGE의 영향을 알아보는 것이므로, 문항 1을 풀었지만 변형문제의 해결 후에도 여전히 일반성 인식이 결여된 학생들인 G11과 G21으로부터 4명의 학생을 선정하였다. G11의 8명 중 임의추출한 S1, S2와 G21의 S3, S4이다. 수학 학업성취도를 상·중·하로 구분하여 각각 심화반, 기본반, 보충반의 수학 수준별 수업을 운영하는 N중학교에서 S1과 S2는 각각 보충반과 심화반에, S3과 S4는 성취도 중상인 학생들로 심화반에 배정받은 상태였다.

2. 연구 방법

가. 검사문항

본 연구는 증명을 수행한 이후 정리의 일반성, 즉 정리가 전칭명제임을 인식하고 있는지를 알아보기 위한 검사지나 그에 상응하는 절차를 필요로 한다. 류성림(1998), 서동엽(1999) 등에 정리의 전칭명제 인식을 검사하는 문항이 포함되어 있지만

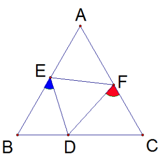
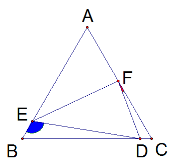
2) 2명의 학생은 원문제(문항1)에서 △BED와 △FDC가 합동이라는 것을 이용하지 않았다. 그러나 변형문제에는 이 두 삼각형이 합동이라는 것을 이용하여 주어진 문제를 해결하였다.

두 문항 모두 일반성 인식 이외의 요소들이 복합적으로 적용되는 문항이기 때문에 문제의 적절성에 대한 재고가 요구된다. 따라서 본 연구에서 그 문제들을 적용하여 정리의 일반성 인식을 검사하는 것은 타당도와 신뢰도에 문제가 있는 것으로 생각하여 5개의 문항을 별도로 준비하였다.

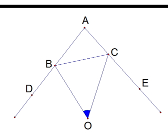
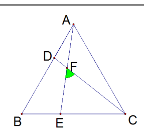
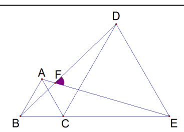
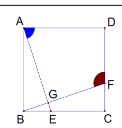
문항 선정에 있어 특히 세 가지 사항을 유의하였다: 문항 내용, 구현 환경, 질문 형태. 문항 내용은 특수성으로부터 일반성으로 확장 가능한 도형 영역의 것으로, 특히 본 연구의 의도인 역동성 탐구의 영향을 보기 위해 DGE에서의 구현 가능성은 문항 선정의 중요한 요인이었다. 또한 질문 형태와 관련하여, 도형 영역의 특성상 '(각이나 변의 크기를) 구하여라' 와 '…을 증명하여라'의 형태로 활용 가능하다. Polya(1945)에 따르면, 전자는 답을 구하는 문제이고 후자는 증명문제이며, 두 가지는 목적이나 주요 구성 요소에 있어 차이가 있다. 본 연구에서는 문제해결 후 일반성 확인을 위해 각이나 변과 같은 도형의 구성요소를 변형시켜 다시 활용해야 하고 일반성을 눈치 채지 못하도록 하기 위해 '…를 구하여라'의 형태로 일관되게 표현하였다.

이와 같은 문항 선정의 원칙에 따라 중학교 수학교과서 및 김화경(2006) 등을 참고하여 5개

<표 Ⅲ-2> 연구 참여자 선정용 검사문항

문항1	변형문제
△ABC는 정삼각형이다. 점 A가 변 BC위에 오도록 △AEF를 아래와 같이 접으면 △DEF가 만들어진다. 이때 ∠BED+∠DFC의 값을 구하여라. 	△ABC는 정삼각형이다. 점 A가 변 BC위에 오도록 △AEF를 아래와 같이 접으면 △DEF가 만들어진다. 이때 ∠BED+∠DFC의 값을 구하여라. 

<표 Ⅲ-3> 실험 적용을 위한 검사문항

문항2 (S1)	다음 그림의 △ABC에서 점 O는 ∠B의 외각 ∠DBC와 ∠C의 외각 ∠BCE의 이등분선의 교점이다. ∠A=80° 일 때, ∠BOC의 크기를 구하여라.	
문항3 (S2)	△ABC는 정삼각형이다. 변 AB위에 점 D, 변 BC위에 점 E를 $\overline{AD}=\overline{BE}$가 되도록 잡는다. $\overline{AE}$와 $\overline{CD}$의 교점을 F라고 할 때, ∠CFE의 크기를 구하여라.	
문항4 (S3)	다음 그림에서 점 B, C, E는 한 △ABC직선 위에 있다. 그리고 △ABC, △DCE는 정삼각형이다. ∠DFE의 크기를 구하여라.	
문항5 (S4)	다음 그림의 정사각형 ABCD에서 $\overline{BE}=\overline{CF}$일 때, ∠GAD+∠GFD의 값을 구하여라.	

문항을 선정하였다. 연구 참여자의 선정을 위한 검사문항 1 및 그 변형문제는 <표 Ⅲ-2>와 같고, 연구 참여자 4명에게 적용한 문항은 <표 Ⅲ-3>과 같다. S1, S2, S3, S4에게 각각 문항2, 문항3, 문항4, 문항5를 적용하였다.

나. 연구 방법 및 절차

본 연구는 지필환경으로부터 DGE 상황으로 전환되는 동안 연구자가 작성한 학생들의 언어 및 행동 관찰 기록을 분석대상으로 하여 학생들의 일반성 인식의 변화를 파악하는 질적 연구방법을 이용하였다. 특히 일반성에 대한 인식 변화는 주체에 따라 다양한 양상을 띨 수 있으므로 연구 참여자 개인의 인지적 변화를 파악하기 위한 사례연구 방식을 택하였다.

구체적으로 <표 Ⅲ-3>의 검사문항이 2013년 4월 22일, 25일, 26일, 29일에 4명의 연구 참여자에게 방과 후 개별적으로 제공되었다. 4명의 학생에게 반구조화된 면담을 실시하였으며, 그 절차는 다음과 같다. 처음에는 지필환경에서의 문제해결 과정을 관찰하고 이에 대한 면담을 실시하였는데, 이것은 DGE 적용 이전의 상태를 알아보기 위한 것이다. 따라서 문제해결의 성공 여부보다 어떠한 인식 하에 문제를 해결하려고 하는지에 대한 파악이 관건이다. 특히 인식 파악이 쉽지 않은 경우, 지필환경에서 변형문제를 제시하여 그 해결 과정을 관찰하고 최초의 상태를 확인해 보고자 하였다. 이후 DGE에서 연구자가 문제 상황을 구성하는 과정을 보여주었고, DGE에서 도형을 스스로 탐색해 볼 기회를 제공하였다. 그리고 일반성 인식에 대한 학생의 변화를 파악하기 위해 추가 면담을 실시하였다. 이때 지필환경과 DGE에 대한 비교와 지필환경에서 각 문항의 변형문제를 제공하여 학생의 인식 변화를 파악하고자 하였다.

검사시간의 제한은 없었으며, 네 차례의 관찰에서 매회 약 1시간 정도가 할애되었다. 학생의 활동은 연구자에 의해 주의 깊게 관찰되었으며 그 과정에서 연구자가 이해되지 않는 학생의 언어나 행동에 대해서는 관찰 도중에 질문하고 그에 대한 학생의 반응을 기록하는 방식을 취하였다. 관찰 기록은 일반성 인식에 대한 변화 파악을 위한 기초 자료로 이용되었다.

Ⅳ. 결과 및 분석

본 연구의 결과를 DGE 경험을 통해 도형의 성질에 대한 일반성을 인식할 수 있었던 S4, 일반성 인식에 실패한 S1, 그리고 일반성을 불완전하게 인식한 S2, S3의 사례로 구분하여 제시하고자 한다.

1. DGE에 의한 일반성 인식: S4의 사례

S4는 DGE를 경험함으로써 일반성 인식에 성공한 사례이다. 먼저, 지필환경에서 S4의 문제해결 과정을 간략히 정리하면 다음과 같다.[3)]

> $\angle FBC+\angle CFB=90^\circ$ 이므로 $\angle ABF+\angle GFD=(\angle DFG+\angle ABE)-(\angle FBC+\angle CFB)=270^\circ-90^\circ=180^\circ$ 이고, 또 □ABFD와 □ADFE가 합동이므로 $\angle GAD=\angle ABF$이다. 따라서 $\angle GAD+\angle GFD=\angle ABF+\angle GFD=180^\circ$ 이다.

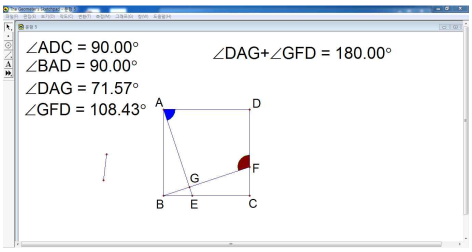
S4는 문제를 일반적으로 해결하였지만, 그가 문제에 내재된 일반성을 인식하였는지는 알기 어려웠다. 따라서 연구자는 일반성 인식 여부를 확인하

3) 이는 S4와의 면담 과정을 정리한 내용으로, S4는 표현에 몇 가지 결함을 드러내었지만(이를테면, ∠FBC를 ∠B라고 잘못 표현함), 기본 아이디어는 이와 같다.

기 위해 점 E를 점 C 가까이로 이동시킨 변형문제를 제시하였다. 그러자 S4는 즉각적으로 답하지 못하고 3분 정도 고심 후 해결하였는데, 그 과정은 전과 동일하였다. 변형문제를 즉각적으로 해결하지 못한 것은 일반성 인식이 결여되었음을 보여준다. 연구자는 다음과 같은 물음을 통해 변형문제의 해결 이후 S4의 상태를 확인하고자 하였다.

RS : 이 문제(지필환경의 변형문제)는 앞 문제(지필환경의 원문제)와 같다고 생각하니? 아니면 비슷하지만 다른 문제라고 생각하니?
S4 : 같은 문제라고 생각해요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S4 : 제가 푼 방식이 똑같은 방식인데다가, 답이 제대로 나온 것 같으니까요.

변형문제의 해결 이후 S4는 두 문제의 동일성을 잘 인식하였으며, 그 인식은 해법의 동일성에 기인한 것임을 알 수 있다. 이후 연구자는 DGE 경험의 영향력을 확인하고자 GSP를 통해 지필환경의 상황을 구현하였으며, 점 C를 이동하여도 □ABCD가 정사각형이라는 조건은 불변이라는 사실을 일러주었다. 또한 하나의 선분을 제공하여 이를 변화시킴에 따라 선분 BE와 선분 CF의 길이는 변하지만 양자의 길이는 여전히 같음을 확인하도록 하였다. GSP에서 구하고자 하는 각을 스스로 측정하고 계산해보게 한 이후, 탐구해 볼 것을 요구하였다. S4는 드래깅 대상으로서 점 B와 선분 BE 및 선분 CF의 길이의 근간이 되는 선분을 움직여보았다([그림 IV-1]).



[그림 Ⅳ-1] S4가 경험한 DGE 환경

RS : 느낀 점을 이야기해줄 수 있겠니?
S4 : 이전에 제가 구한 두 문제의 답이 180°가 나왔는데요. 그 다음 제가 여기서 선을 움직였을 때 각의 크기는 변해도 두 각의 합이 180°로 변함없다는 것을 봤어요.

DGE 경험 이후 S4의 상태에 대한 면밀한 분석을 위해, 지필환경에서 점 E가 선분 BC의 중간 정도에 위치하는 변형문제를 풀어보도록 하자 S4는 즉각적으로 다음과 같이 말하였다.

S4 : (귀찮은 듯) 또 풀어야 해요? 답만 말하면 안되요?
RS : 답이 뭐니?
S4 : 180°요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S4 : 제가 이전에 풀었던 방식과 똑같은 방식으로 하면 되요.
RS : 이 문제는 앞 문제와 같다고 생각하니? 아니면 비슷한 문제라고 생각하니?
S4 : 똑같아요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S4 : 제가 구했던 방식이랑 이전에 풀었던 문제의 방식이랑 동일하니까요.
RS : 그럼 이 문제(지필환경의 변형문제)와 컴퓨터의 문제는?
S4 : 그것도 같아요.
RS : 컴퓨터는 움직이고 이건 고정되어 있는데 왜 같다고 생각하니?
S4 : 저것도 컴퓨터로 똑같이 옮겨놓으면 두 각의 합이 180°가 나오니까요. 그리고 이 선의 위치를 움직여도 똑같이 180°가 나올거니까요.

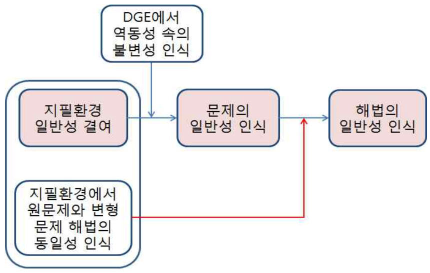
S4는 제시된 변형문제에 대해 즉각적으로 180°라고 답하였는데, 이는 S4가 문제에 대한 일반성 인식에 도달했음을 의미하는 것이다. 그리고 문제의 일반성 인식의 근원에는 역시 해법의 동일함이 있었음을 보여준다.

그러나 S4의 문제의 일반성 인식이 지필환경에서 원문제와 변형문제의 해법의 동일함 인식

에 기인한 것인지, 혹은 DGE 경험에 기인한 것인지 모호하여 질문을 이어갔다.

RS : 컴퓨터 하기 전에 이 문제(첫째 변형문제) 풀 때, 답이 180° 라고 생각하고 푼거니? 아니면 풀고 나서 180° 인걸 알았니?
S4 : 180° 라고 생각 못하고 그냥 풀었어요.
RS : 컴퓨터 하고 난 이후, 곧 바로 180° 라고 했는데 왜 그랬니?
S4 : 제가 이전에 풀었던 문제들이랑 동일한 유형이라서요.
RS : 그럼 이게 두 번째 문제(첫째 변형문제)를 푼 후, 동일한 방식 때문에 생각이 바뀐 거니? 아니면 컴퓨터를 보고 생각이 바뀐 것이니?
S4 : 정확히는 컴퓨터에서 본 것 때문에 그렇게 생각했고요. 그 다음 푸는 방식이 동일하다고 생각했어요.
RS : 세 번째 문제는 풀지도 않고서 어떻게 푸는 방식이 동일하다는 것을 알 수 있었니?
S4 : 조건이 같잖아요.
RS : 두 번째 문제에서도 조건은 같았잖아. 그 때는 풀고 나서 알았잖니?
S4 : 그때는 컴퓨터를 보기 전이잖아요.

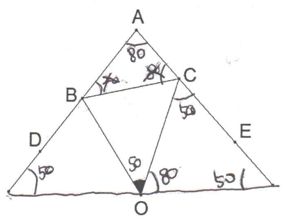
이상의 대화로부터 S4의 인식 변화는 해법의 동일성이 아니라 DGE 경험 때문임을 알 수 있다. 이는 지필환경에서 원문제와 변형문제의 동일성 인식이 곧 일반성 인식으로 이어지지 않을 수 있음을 보여준다. 한편 '정확히는 컴퓨터에서 본 것 때문에 그렇게 생각했고요. 그 다음 푸는 방식이 동일하다고 생각했어요.'의 반응은 DGE를 통해 문제의 일반성을 인식함으로써 해법의 동일성이 수반되어 나타났음을 보여준다. 즉, S4는 DGE 경험을 통해 문제의 일반성을 인식할 수 있었으며, 이를 통해 지필환경의 두 번째 변형문제에서 풀어보려는 시도 없이 해법의 동일성까지 인식할 수 있었던 것이다([그림 IV-2]).



[그림 Ⅳ-2] S4의 일반성 인식 과정

2. DGE에 의한 일반성 인식 실패: S1의 사례

지필환경([그림 IV-3])에서 S1은 점 O를 지나는 선분을 긋고 이 선분에 의해 생성된 큰 삼각형이 이등변삼각형이므로 양 끝각이 50° 이고, 선분 OC를 한 변으로 하는 우측의 작은 삼각형 역시 이등변삼각형이므로 ∠OCE=50° 라고 하였다. 마지막으로 구하고자 하는 각이 ∠OCE와 엇각이므로 ∠BOC는 50° 라고 답하였다. 그 이유는 '그렇게 보인다'는 것이었다. S1은 문제를 특수한 경우로 제한하여 해결하려 하였으며, 이것은 문제가 함의한 일반성을 이해하지 못하고 있음을 보여주는 단서이다.



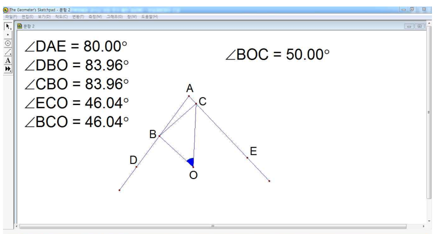
[그림 Ⅳ-3] 지필환경에서 S1의 풀이

이후 S1에게 지필환경의 문제를 DGE에서 구현하는 경험을 제공하였다. 연구자는 GSP를 이용하여 구성 과정 전반을 보여주었고, 특히 GSP의 역동성을 인식시키는 데 주력하였다. 먼저,

문항2에서 80° 라는 조건은 회전이동을 이용하여 구현함으로써 점 E의 이동에도 불구하고 이 조건이 불변하는 것임을 확인시켜주었다. 아울러 ∠DBO, ∠CBO, ∠BCO, ∠ECO의 측정값을 보여줌으로써 점 B나 C의 이동에도 불구하고 선분 BO와 CO는 항상 각의 이등분선임을 보여주었다. 마지막으로 구하고자 하는 ∠BOC의 크기를 S1 스스로 측정하게 해보고, 탐구할 것을 요구하였다. S1은 주로 점 C와 점 A를 번갈아 가며 이동시켜보았다.

RS : 이동시킬 때 변하는 것과 변하지 않는 것을 이야기해 줄 수 있겠니?
S1 : (점 C를 이동시켜보면서) 변하지 않는 것은 ∠BOC가 안 변해요. 그리고 ∠BAC도 안 변해요. 그 다음 변하는 것은 ∠BCO, ∠CBO는 변해요.
RS : 해보면서 어떤 것을 느낄 수 있었니?
S1 : 신기해요.
RS : 어떤 점이 신기하니?
S1 : ∠BOC랑, ∠BAC가 안 변하는 게 신기해요.

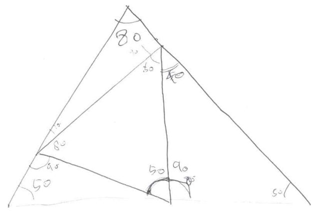
이상의 대화로부터 S1은 DGE에서 변하는 것과 불변하는 것을 정확하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 연구자는 일반성에 대한 S1의 인식 변화를 확인하기 위해 GSP에서 점 C의 위치를 [그림 Ⅳ-4]와 같이 이동시킨 후 면담을 이어갔다.



[그림 Ⅳ-4] 점 C의 위치 변화

RS : 이 상황과 이 문제(지필환경)를 비교하면 어떻니?
S1 : 똑같아요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S1 : 이것도 각의 이등분선을 이용해서 구하는 거니까요.

이상에서 S1은 지필환경의 문제와 GSP에 구현된 상황이 서로 동일하다고 생각하고 있음을 알 수 있다. 연구자는 S1이 지필환경의 문제 속에 내재된 일반성을 인식하였는지를 명확히 하기 위해 지필환경의 변형문제를 풀어보도록 하였다. 이에 S1은 [그림 Ⅳ-5]와 같이 문제에서 주어지지 않은 조건인 90° 를 이용하여 해결하였는데, 이는 S1이 여전히 지필환경의 문제를 특수하게 인식하고 있음을 보여준다.



[그림 Ⅳ-5] 변형문제에 대한 S1의 풀이

RS : 이 문제(지필환경의 원문제)와 이 문제(지필환경의 변형문제)는 서로 어떻다고 생각하니?
S1 : 조금 비슷하지만 달라요.
RS : 어떻게 다른지 이야기해 줄 수 있겠니?
S1 : 이 문제(변형문제)가 좀 더 복잡한 것 같아요.
RS : 그럼 이 문제(변형문제)랑 컴퓨터의 문제는 어떻다고 생각하니?
S1 : 이것도 조금 비슷하지만 달라요.
RS : 왜 그런지 설명해 주겠니?
S1 : 각을 구하는 문제라는 것은 비슷한데 하는 방식은 다른 것 같아요.
RS : 하는 방식이 어떻게 다르니?
S1 : 이게(지필환경의 변형문제) 좀 더 복잡한 것 같아요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S1 : 각을 더 많이 구해야 되니까요.
RS : 그럼 이 문제(지필환경의 원문제)와 컴퓨터 문제는?

S1 : 똑같아요.

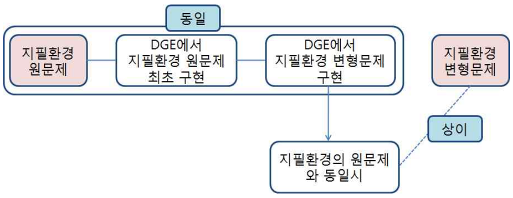
RS : 왜 그렇게 생각하니?

S1 : 이등분선이니까 똑같은 거죠.

RS : 컴퓨터 문제는 움직이잖아. 그런데 왜 이 문제(지필환경의 원문제)랑 똑같은 거니?

S1 : 이것(지필환경의 원문제)을 컴퓨터에 넣은 거잖아요. 그러니까 똑같죠.

이상으로부터 S1은 지필환경의 원문제를 DGE로 구현하였으므로, DGE에서의 최초 표현이 변화될지라도 이후 표현들을 지필환경의 원문제와 동일한 것으로 인식함을 알 수 있다. 반면, 변형문제가 DGE로 구현되었음에도 불구하고, 양자는 다르다고 생각하였다. 이로부터 S1이 [그림 Ⅳ-4]에서 점 C의 위치가 바뀐 상황이 DGE에 구현될지라도 그것이 지필환경의 원문제와 동일하다고 인식한 이유를 알 수 있다. 즉 [그림 IV-6]에서 보듯이, 그는 변형문제의 DGE 상황을 DGE에 최초로 구현된 지필환경의 원문제와 동일시하고 있는 것이다. S1은 DGE에서 경험한 역동성을 지필환경의 하나의 표현으로 사상시켰으며, 결국 DGE에서의 역동성을 지필환경으로 전이하지 못하는 결과를 초래한 것이다.



[그림 Ⅳ-6] DGE에서 역동성이 결여된 S1의 최초 인식

이에 연구자는 DGE에서 지필환경의 변형문제를 구현할 수 있음을 주지시켜 주었다.

RS : 컴퓨터에서도 옮기면 이 문제(지필환경의 변형문제)처럼 만들 수 있는 것 아니니?

S1 : 음…옮기면 이렇게 만들 수 있을 것 같아요.

RS : 그런데 이 문제(지필환경의 변형문제)와 컴퓨터 문제는 왜 다른 거니?

S1 : 이전에는 옮기는 것을 생각 못했어요.

RS : 지금은 어떻게 생각하니?

S1 : 지금은 옮기면 같다고 생각해요.

RS : 무엇 때문에 생각이 바뀐거니?

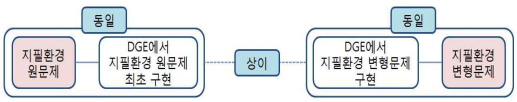
S1 : 이전에는 옮기는걸 생각 못했는데, 지금 보니 되는 것 같아요.

연구자의 도움으로 S1은 DGE에서 지필환경의 변형문제가 구현 가능함을 알 수 있었다. 그러나 다음은 DGE의 역동성을 지필환경으로 전이하는 것만으로는 일반성 이해가 어려울 수 있음을 보여준다.

RS : 컴퓨터 문제에서 옮기지 않은 것과 옮긴 것은 같은 거니?

S1 : 옮기지 않은 것과 옮긴 것은 다른 것 같아요.

S1의 문제는 역동성을 갖춘 DGE에서 포착된 각 상황이 서로 상이하다는 인식에서 비롯된 것이다. 이로 인해 S1은 지필환경의 원문제와 그 DGE 구현 문제가 동일하며, 또한 지필환경의 변형문제와 그 DGE 구현 문제가 동일하다고 답하였지만, 그럼에도 불구하고 지필환경의 원문제와 변형문제가 서로 상이하다고 생각했던 것이다([그림 Ⅳ-7]). 즉 S1의 인식은 DGE에서의 연속성을 반영하지 못하였다.

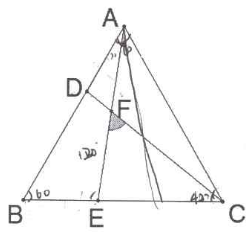


[그림 Ⅳ-7] DGE에서 연속성의 결여(S1)

3. DGE에 의한 일반성의 불완전 인식: S2, S3의 사례

가. 문제에 주어진 조건의 간과: S2의 사례

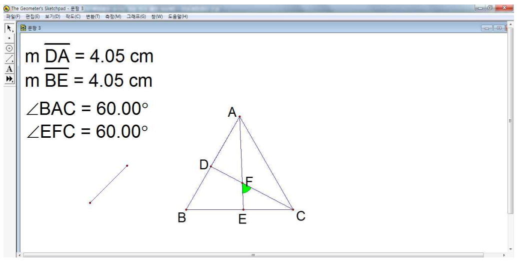
지필환경에서 S2는 문제를 특수하게 보고 해결하고자 하였다. 예를 들어, $\angle BAE + \angle BEA = 120^{\circ}$라는 것을 알아냈지만, $\angle CEF$의 크기를 구하기 위해 $\angle BEA$의 크기를 구하고자 하였다. 또한 해결의 어려움으로 고심하던 S2는 $\angle BAE$가 $\angle BAC$의 3등분이므로 20°라고 하였다. 이는 S2가 문제가 함의한 일반성을 이해하지 못하였음을 보여준다.



[그림 Ⅳ-8] 지필환경에서 S2의 풀이

이후 S2에게 지필환경의 문제를 GSP에 구현하는 경험을 제공하였다. 먼저, 정삼각형을 구현하였으며, 점 C를 움직여도 $\triangle ABC$가 정삼각형이라는 사실은 불변임을 인식시켜주었다. 또한 $\overline{AD} = \overline{BE}$의 상황을 구현하였으며, 이것 역시 불변의 조건임을 인식시켜주었다. 그리고 구하고자 하는 $\angle EFC$의 크기를 S2 스스로 측정하고 탐구해보도록 하였다. S2는 주로 점 A, C와 두 원의 반지름이 되는 선분을 번갈아 가며 드래깅하였다.

이후 면담을 통해, S2가 DGE 환경에서 변화하는 것과 불변하는 것을 정확하게 인식하고 있음을 알 수 있었다. 연구자는 일반성에 대한 S2의 인식 변화를 확인하기 위해 GSP에서 점 E의 위치를 [그림 Ⅳ-9]와 같이 이동시킨 후 이와 지필환경의 문제를 비교하는 물음을 던졌다. S2는 지필환경의 원문제와 DGE에서의 변형문제는 서로 상이하다고 하였으며, 그 이유는 지필환경의 문제는 3등분이지만 DGE에서는 2등분이기 때문이라고 하였다.



[그림 Ⅳ-9] 점 E의 위치 변화

이후 연구자는 S2로 하여금 DGE의 변형문제와 동일해 보이는 지필환경의 변형문제를 비교해보게 하였는데, 양자가 2등분되어있기 때문에 비슷하다고 답하였다.

이상에서 S2 역시 S1과 마찬가지로 DGE에서 포착된 각 경우가 서로 상이하다고 인식하고 있음을 알 수 있다. 즉, S2는 DGE의 변형문제와 지필환경의 변형문제는 동일하지만, 지필환경의 원문제는 상이한 것으로 보는 연속성의 결여를 드러낸다.

한편, 다음의 상황은 DGE에서 구현된 상황이 지필환경에서 재현될지라도 양자가 반드시 연결되지 않을 수 있음을 보여준다. 연구자는 지필환경에서 점 D, E의 위치만 이동한 두 변형문제를 제시하였는데, S2는 이것을 다른 방식으로 해결하였다. 그런데 해결 과정에서 두 문제의 답이 60°로 동일하다는 것을 확인하고서, '어! 답이 똑같네!'라고 하였다. DGE에서 구하고자 하는 각이 60°로 일정함을 확인하였음에도 불구하고 이와 같은 반응은 연구자가 예상치 못한 의외의 반응이었다.

RS : 이 문제(지필환경의 변형문제) 풀 때, 60°가 나올 줄 몰랐니?
S2 : 예, 몰랐어요. 구하고 나서 알았어요.

RS : 컴퓨터에서 보여줬는데 왜 몰랐지?

S2 : 각이 다를 수도 있으니까요.

RS : 어떤 각이 다를 수도 있는 거니?

S2 : 구하는 각이 무조건 60°가 나오는 건 아니라고 생각했어요.

RS : 왜 그렇게 생각했니?

S2 : 삼각형을 그릴 때마다 구하는 각이 바뀔 수 있으니까요.

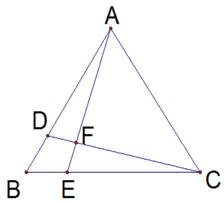
RS : 컴퓨터를 못 믿었던 거니?

S2 : 그건 아니에요.

RS : 그럼 왜 각이 바뀔 수 있다고 생각하니?

S2 : 모양은 비슷한데 구하는 각이 다를 수 있으니까요.

S2는 [그림 IV-10]과 같이 선이 그어질 경우 구하는 각이 달라질 수 있다고 설명하였다.



[그림 Ⅳ-10] 변형문제에 대한 S2의 인식

이것은 문제에서 주어진 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$이 성립하지 않는 경우임을 지적해주었다.

RS : $\overline{AD}=\overline{BE}$가 성립하니?

S2 : (생각해보더니) 아! 잘못 생각했어요. 제가 복잡하게 생각한 것 같아요.

RS : 왜 그렇게 생각했니?

S2 : 그냥 막 선을 만들어내다가 헷갈렸어요. 이 문제(지필환경의 변형문제)에서 이걸 생각 못했어요.

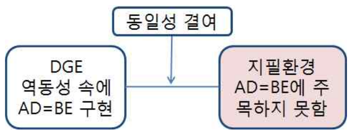
RS : 그럼 혹시 컴퓨터에서도 $\overline{AD}=\overline{BE}$이 성립한다는 것도 생각 못한 것 아니니?

S2 : 그건 아니에요.

RS : 그럼 컴퓨터에서 보여줬는데 이 문제(지필환경의 변형문제)와 그것들이 왜 다르다고 생각한 거니?

S2 : 제가 이 문제에서 이걸 생각 못 하고 막 선을 만들어내다가 헷갈렸어요. 그래서 컴퓨터랑 이건 다르다고 생각했어요.

이처럼 S2는 지필환경에서 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$에 주목하지 못하고 있었다. 이것은 그가 지필환경과 DGE를 연결시키지 못한 결정적 원인이 되었다. 즉 DGE에서 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$가 구현되었을지라도 지필환경에서 이 조건에 주목하지 못함으로써([그림 IV-11]) 지필환경의 문제와 DGE 상황을 차이가 있는 것으로 인식한 것이다. 이때 S2는 연구자에게 반례를 보여주고자 하는 마음에 문제의 조건을 위배하는 오류를 범한 것이다.



[그림 Ⅳ-11] S2의 인식

S2의 인식 개선을 돕기 위해 DGE에서 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$에 주목하도록 하였다. 그리고 이후의 상태 변화를 확인하기 위해 지필환경의 또 다른 변형문제를 제시하였다.

RS : 이것은 몇 도니?

S2 : (즉각적으로) 60° 요.

RS : 왜 그런지 설명해주겠니?

S2 : 이것도 같이 늘어나니까 항상 60°가 되요.

RS : 이 문제(지필환경의 변형문제)와 컴퓨터 문제는 같니?

S2 : 예 같아요.

RS : 왜 그렇게 생각하니?

S2 : 컴퓨터에서 선 움직일 때, 선분 AD와 선분 BE가 길이가 같게 되잖아요. 그러니까 같은 문제죠.

RS : 이 문제(지필환경의 변형문제)에서는 이건 안 움직이는데도 같니?

S2 : 구하는 각이 60° 인걸 지금 알고, 컴퓨터는 여기에서 선만 늘린거니까 같은 거에요.

RS : 그럼 이 문제(지필환경의 원문제)와 이 문제(지필환경의 변형문제)는?

S2 : 같은 문제에요.

RS : 왜 그렇게 생각하니?

S2 : 선분 AD와 선분 BE를 늘린 것이니까요.

RS : 늘리면 다른 문제 아니니?

S2 : 컴퓨터에서 실험해 봤을 때, 늘려도 똑같이 60° 가 되었으니까요.

RS : 어떻게 생각을 바꿀 수 있었니?

S2 : 선분을 늘여도 구하는 각이 변하지 않아서요.

RS : 이 사실을 어떻게 알 수 있었니?

S2 : 음…처음 이 문제(지필환경의 원문제)부터 해서 컴퓨터랑 연결해서 비교하니 이제 같은 문제란 걸 알게 되었어요.

이상의 대화로부터 S2는 DGE와 지필환경에서 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$에 주목하면서 이 조건이 역동성 속에 유지될 경우 구하고자 하는 각은 불변함을 인식함으로써 드디어 문제가 함의한 일반성을 인식하게 되었음을 알 수 있다. 이와 같은 인식이 가능했던 것은 DGE와 지필환경의 문제를 비교하여 연결한 활동 덕분이며, 비교의 매개는 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$이다. 이를 통해 DGE를 통해 일반성 인식을 돕기 위해서는 지필환경과의 비교활동이 도움이 될 수 있으며, 이때 역동성 속에 일정함을 유지하는 조건이 지필환경과 DGE 사이의 연결을 돕는 매개 역할을 할 수 있음을 알 수 있다.

나. 지나친 일반화: S3의 사례

문항4의 지필환경에서 S3는 ∠ABF와 ∠FDC가 같다고 추측하는 등 일반적으로 문제를 인식한 듯 보였으나, 면담을 통해 문제 상황을 특수하게 인식하고 있음을 알 수 있었다. S3는 ∠FDC을 구해야한다고 생각하고 있었으며, 이 각을 알면 다른 각을 구할 수 있다고 하면서, 이 각을 구하지 못하여 문제 해결이 어렵다고 하였다.

이후 S3에게 지필환경의 문제를 GSP에 구현하는 경험을 제공하였다. 먼저 선분을 긋고 선분을 두 부분으로 분리하는 점을 찍은 후, 각 부분을 한 변으로 하는 2개의 정삼각형을 작도하였다. 이때, 선분을 분리하는 점을 이동시켜도 두 삼각형은 여전히 정삼각형임을 확인시켜주었다. 그리고 마침내 구하고자 하는 ∠DFE의 크기를 S3 스스로 측정하고 탐구해 볼 것을 요구하였다. S3는 주로 점 C를 드래깅하였다.

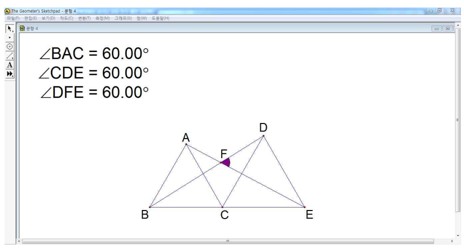
RS : 느낀 점을 이야기해줄 수 있겠니?

S2 : 이 각(∠DFE)이 60° 예요? 움직여 봤는데, 이게 60° 인지는 잘 모르겠어요.

RS : 그게 무슨 말인지 좀 더 자세히 이야기 해 주겠니?

S2 : 그러니까 이게 왜 60° 인지를 모르겠어요.

DGE의 단점 중의 하나는 그러한 현상이 발생 이유에 대한 어떠한 통찰도 제공하지 않는다는 점이다. S3는 이에 대한 의구심을 가진 것이다. 이후 연구자는 GSP에서 점 C의 위치를 [그림 Ⅳ-12]와 같이 이동시킨 후 다음과 같이 질문하였다.



[그림 Ⅳ-12] 점 C의 위치 변화

RS : 이 문제(지필환경의 문제)와 비교해서 이건 어떻니?

S3 : 똑같은 것 같은데요.

RS : 왜 그렇게 생각하니?

S3 : 이것(점 C)을 당기면 정삼각형 한 개는 작아지고 한 개는 커지는 것 말고는 같은 것 같은데요.

이후 연구자는 지필환경의 문제를 또 다시 제공하여 해결하도록 하였다. 이번에는 ∠BDC=∠AEC라는 것과 선분 DC와 선분 EF의 교점을 G라고 할 때 ∠DGF=∠CGE(맞꼭지각)라는 것으로부터 쉽게 문제를 해결하였다.

RS : 이전에는 ∠FDC를 구하려고 했잖아. 이번에는 왜 이걸 안 구했니?
S3 : 못 구할 것 같아요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S3 : 이걸 구해도 이것 하나만 안다고 다른 각을 모두 다 알 수는 없어요.
RS : 그럼 구할 수 있는 거니?
S3 : 못 구해요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S3 : 이 문제는 각을 모두 구해서 하는 문제는 아니에요.

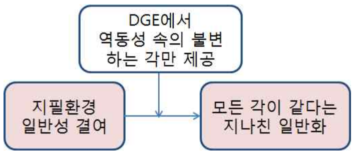
S3는 DGE에서 문제 상황을 구현하고 그것을 역동적으로 경험해보면서 지필환경에서 접한 문제에 대한 인식을 개선할 수 있었다. 즉 DGE 경험을 통해 주어진 문제는 일반성을 함의한 문제이므로 ∠FDC을 구할 수 없다는 사실을 알아낼 수 있었던 것이다.

S3의 인식 변화에 대해 좀 더 자세히 알아보고자, DGE에 구현된 [그림 Ⅳ-12]의 상황을 지필환경의 문제로 제공하여 풀도록 하였다. 이에 즉각적으로 답하지는 않았지만, 지필환경의 원문제와 동일한 방법으로 문제를 해결하였다.

RS : 이 문제(지필환경의 변형문제)는 앞 문제(지필환경의 원문제)와 비교해서 똑같다고 생각하는지 아니면 비슷하지만 다른 문제라고 생각하니?
S3 : 똑같은 문제라고 생각해요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S3 : 그냥 옆으로 살짝 당겨서 모양만 틀리지 모두 다 같은 것 같은데요.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S3 : 각도 모두 다 같고 모양만 틀리지 다른 것은 모두 다 같아요.
RS : 어떤 각이 같다는 거니?
S3 : 모두 다요. 여기 있는 각 전부가 같아요.
RS : 그럼 이 문제(지필환경의 원 문제)의 ∠FDC와 이 문제(지필환경의 변형문제)의 ∠FDC도 같니?
S3 : 예 같아요.
RS : 왜 같은거니?
S3 : 그냥 그렇게 보여요.
RS : (점 C가 점 B 가까이에 있는 그림을 보여주며) 이렇게 점 C를 점 B 가까이로 이동시켜도 ∠FDC은 변하지 않니?
S3 : 예.
RS : 왜 변하지 않는 거니?
S3 : 이것은 작게하고, 이것은 크게 한거니까 각은 똑 같아요.
RS : 컴퓨터 문제와 이 문제(지필환경의 원문제)는 어떻니?
S3 : 처음에는 조금 다른 문제라고 생각했는데, 움직여보니 같은 것인줄 알게 되었어요.
RS : 처음에는 왜 다르다고 생각했니?
S3 : 모양이 달라서 다르다고 생각했어요.
RS : 그런데 어떻게 같다는 것을 알았니?
S3 : 움직여보니 모양만 다르고 각이 모두 같다는 것을 알았어요. 그래서 같은 문제라는 것을 알았어요.

이상의 대화를 통해 DGE가 일반성 인식에 도움이 될 수 있는 반면, 동시에 오개념을 유발시킬 수 있음을 알 수 있다. S3는 역동성 속에서 주어진 삼각형이 정삼각형이라는 것과 구하고자 하는 각이 불변임을 경험할 수 있었다. 그러나 그로 인해 S3는 모든 각이 불변한다는 지나친 일반화에 도달하게 되었다([그림 IV-13]). 역동성 속에서 ∠FDC의 크기도 변하지 않는다고 생각한 것이다. 이는 연구자가 GSP에 측정값으로 제

공한 ∠BAC, ∠CDE, ∠DFE가 모두 불변이라는 사실에서 야기된 결과로 생각된다. 이는 DGE를 통해 지필환경의 문제를 구현할 경우 불변하는 것과 동시에 변화하는 것 역시도 제시하여 지나친 일반화의 오류를 초래하지 않도록 주의해야 함을 시사한다.



[그림 Ⅳ-13] S3의 인식 변화

Ⅴ. 논 의

본 장에서는 앞서 기술한 연구 결과 및 분석을 토대로 교수학적 논의를 하고자 한다. 먼저, 문항1의 해결자 16명 중 지필환경의 변형문제에 대해 즉각적으로 답을 제시한 학생은 없었으며, 이것은 해결자 모두 문제가 함의한 일반성을 인식하지 못하였음을 보여준다. 더욱이 변형문제의 해결 이후 문항1과 그 변형문제의 동일함을 인식한 학생이 특수하게 문제를 해결한 G1에서는 한 명도 없었으며, 일반적으로 해결한 G2에서도 2명밖에 없다는 사실은 학생들이 문제가 함의하는 일반성을 인식하는 것이 쉽지 않을 뿐만 아니라, 성공적인 문제 해결과 일반성의 인식은 별개로 접근되어야 함을 시사한다. 따라서 기하 정리의 일반성 인식을 돕는 교수 방안이 필요하며, 본 연구에서는 DGE를 활용한 것이다.

본 연구의 결과, S4의 사례를 통해 DGE가 기하 정리의 일반성 인식에 도움이 될 수 있음을 확인하였다. S4는 DGE를 통해 문제의 일반성 인식과 아울러 지필환경에서 변형문제의 해결 이후 인식한 해법의 동일성을 또 다른 변형문제에까지 전이할 수 있었다. DGE 경험을 통해 문제의 일반성과 해법의 일반성을 동시에 인식한 것이다. 또한 S3 역시 비록 지나친 일반화의 오류를 범하였지만, DGE 경험을 통해 이전에는 인식하지 못한 문제가 갖는 일반성을 인식할 수 있게 되었다. 연구자의 안내가 절제되었음을 감안하면, 이러한 결과는 DGE 경험이 기하 정리의 일반성 인식을 도울 수 있는 유용한 도구가 될 가능성을 제안한다.

반면 S1, S2, S3의 사례는 정리의 일반성 인식을 위한 DGE의 역할이 유효하기 위해 다음과 같은 점을 고려할 필요를 제안한다.

첫째, DGE에서의 시각적 경험만으로는 기하 정리의 일반성 인식을 돕는 데 한계가 있기 때문에, 연구자의 지나친 도움을 절제하며 학생 스스로 발견해야 할 것들을 탐구하도록 하였는데, 그로 인해 DGE의 경험이 일반성 이해로 전이되지 못한 경우가 종종 나타났다. 이는 DGE 경험을 통해 성공적인 일반성 인식을 유도하기 위해서는 교사의 안내가 보다 세심하게 계획되고 수반되어야 함을 시사한다.

둘째, S3를 통해 DGE 경험이 잘못하면 지나친 일반화로 연결될 수 있음을 보았다. 이는 S3에게 측정값으로 보여준 각이 모두 불변인 각이었던 데서 기인한 결과라 생각된다. 따라서 DGE를 통해 일반성 인식을 돕는 수업을 설계할 때 불변요소뿐만 아니라 변화하는 요소를 동시에 보여주는 세심한 구상이 요구된다. 이를 통해 역동적인 변화 속에서 불변하는 것과 변하는 것이 무엇인지를 정확하게 인식할 수 있어야 할 것이다.

셋째, S1과 S2의 사례를 보면, DGE가 반드시 지필환경의 문제와 연결되는 것이 아님을 확인할 수 있다. 이는 DGE 경험이 곧 지필환경의 문제를 역동적으로 재경험하는 것이 아닐 가능성을 시사한다. 이는 동일 현상을 인식하는 개인의 경험은 제각기 다를 수 있다는 점을 고려함으로

써 설명 가능하며 DGE와 지필환경의 연결을 돕는 매개 활동이 필요함을 시사한다.

넷째, 주어진 조건에 주목하지 못할 경우 DGE와 지필환경의 연결이 어려울 수 있음을 S2를 통해 확인할 수 있었다. S2는 주어진 조건 $\overline{AD}=\overline{BE}$를 간과함으로써 연구자에게 [그림 Ⅳ-10]과 같은 반례를 보여주었다. 이는 DGE와 별도로, 결론뿐만 아니라 가정이 되는 조건 자체에 대한 인식이 지속되어야함을 보여준다. 결국 DGE와 지필환경의 연결을 위해서는 그 연결 고리인 문제의 조건을 역동적 변화 속에서 주목할 수 있어야 하며, 결론의 불변성과 아울러 문제의 조건 역시 DGE의 역동성 속에서 불변하는 요소임을 인식시켜야 할 것이다.

다섯째, 본 연구 결과에 따르면, 일반성 인식을 돕기 위해 DGE에서 경험한 역동성을 지필환경으로 전이하는 것과 연속성에 대한 인식이 우선한다. S1의 사례에서 역동성이 DGE의 본질임에도 불구하고 DGE 경험이 지필환경으로의 전이를 보장하지 않았다. S1은 DGE 경험 이후, 처음에는 DGE에서의 각 상황을 지필환경의 원문제와 동일시하였으나 지필환경의 변형문제와는 다르다고 생각하였고, 이는 DGE에서의 역동성을 지필환경으로 전이하지 못한 데서 원인을 찾을 수 있다. 이후 역동성 전이를 돕기 위해 DGE에서 지필환경의 변형문제를 구현할 수 있음을 주지시켜 주었는데도, S1은 정리의 일반성 인식에 도달하지 못하였다. 이는 일반성 인식을 위해 DGE의 역동성 전이만으로는 부족함을 보여준다. 왜냐하면 역동성 전이 이후, S1은 DGE에서 포착된 각 상황이 서로 상이하다는 인식을 갖고 있었고, 그로 인해 DGE에서의 변형 전후 표현이 다르다고 답함으로써 DGE에서 역동성 전이와 더불어 연속성 인식이 수반되어야 함을 보여준다. 연속성 인식의 결여는 S2의 사례에서도 관찰되었다. 이로부터 DGE 경험을 통한 일반성 인식을 돕기 위해서는 DGE의 역동성 전이와 연속성 인식을 돕는 안내가 필요함을 시사한다.

S1과 S2의 사례에서 DGE에서 포착된 각 상황이 개별적으로 인식될 가능성이 있다는 것이 확인된 만큼, DGE에서 연속성 인식을 돕는 활동이 필요하다. S3와 S4의 사례에서 그 해결책을 모색해본다면, S3와 S4가 상황의 동일성을 인식할 수 있었던 주요인 중 하나인 역동적 상황에서도 주어진 조건이 유지된다면 결과의 불변성에 대해 인식 가능함을 이용할 수 있다. 따라서 DGE 수업을 설계할 교수자는 DGE의 각 상황에서 문제의 조건이 역동성 속에 유지되고, 그 결과 역시도 불변함을 인식할 수 있도록 적절한 발문을 계획하고 준비할 필요가 있다. 이것은 단순히 시각적으로 보는 것만으로 해결될 수 있는 문제가 아닌 것이다.

여섯째, S2의 사례에서 보듯, 지필환경과 DGE의 비교 활동이 일반성 인식에 도움이 되는 만큼, 지필환경과 DGE를 교대로 제시하고, 이들을 비교하는 활동을 통해 지필환경의 재현이 곧 DGE에서의 탐구 과정에 대응함을 인식하는 과정이 필요할 것이다. 또한 DGE의 연속성 인식을 통해 이들을 통합함으로써 궁극적으로 지필환경의 정리를 일반적으로 인식할 수 있어야 한다.

이상에서 보았듯이 4명의 연구 참여자가 DGE를 각각 다르게 경험하고 이해하는 만큼, 일반성 인식이라는 목적을 위해 학생들이 경험할 DGE를 단순히 제시하는 것만으로는 부족하다. 기하 정리의 일반성 인식을 돕기 위해서는 DGE에서 역동성 전이와 연속성 인식, DGE와 지필환경 사이의 연결을 도울 수 있는 비교 활동, 그리고 지나친 일반화를 막기 위한 변화 요인의 투입 등이 수반되는 정교한 교수 설계가 요구된다.

참고문헌

강정기(2013). **본질적 속성 추출을 통한 일반화에 관한 연구**. 경상대학교대학원 박사학위논문

김화경(2006). **'컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구**. 서울대학교대학원 박사학위논문

류성림(1998). 수학교육에서 '증명의 意義'에 관한 연구. 韓國數學教育學會誌 시리즈A **<數學教育> 37권** 1호. 73-85.

서동엽(1995). 증명 지도의 목표와 수준에 대한 소고. **대한수학교육학회논문집**. 5권 1호. 203-215

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교대학원 박사학위논문

de Villiers, M.(1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In Lehrer, R. & Chazan, D.(Eds.), *Desinging learning environments for developing understanding of geometry and space*. pp369-393. Mahwah: Lawrence erlbaum associates, publishers

Dienes, Z.P.(1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson

Dienes, Z.P.(1963). *An experimental study of mathematics learning*. London: Hutchinson

Gonobolin, F. N.(1975). Students' comprehension of geometric proofs. In J. W. Wilson (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*(Vol. 12), Problems of instruction. Chicago: University of Chicago Press (원본은 1954년 출간)

Harel, G. and Sowder, L.(1996) *Students' Proof Schemes*. Purdue University and San Diego State University

Hoyles, C and Jones, K. (1998), Proof in Dynamic Geometry Contexts. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. pp121-128. Dordrecht: Kluwer

Lakatos, I.(1961). Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery. 우정호(역). **수학적 발견의 논리**. 서울: 아르케

Leung, A.(2012). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. *12th international congress on mathematical education*

Marrioti, A. M.(2006). Proof and proving in mathematics. In Gutiérrez, A. & Boero, P.(Eds), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education - past, present and future*, pp173-204

Mesquita, A.L.(1994). On the utilization of non-standard representations in geometrical problems, *18th Conference of the international group for psychology of mathematics education*, 271-278

Polya, G.(1945). *How to solve it*. Doubleday anchor books

Sarracco, L.(2005) The effects of using dynamic geometry software in the middle school classroom. EDT 896 Research Report, Iona College

White, P. & Mitchelmore, M.(1999). Learning mathematics: a new look at generalization and abstraction. *Proceedings of the combined conference of the Australian and New Zealand Association for research in education*

Using DGE for Recognizing the Generality of Geometrical Theorems

Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)
Kang, Jeong-Gi (Namsan Middle School)

This study is based on the problem that most middle school students cannot recognize the generality of geometrical theorems even after having proved them. By considering this problem from the point of view of empirical verification, the particularity of geometrical representations, and the role of geometrical variables, we suggest that some experiences in dynamic geometry environment (DGE) can help students to recognize the generality of geometrical theorems. That is, this study aims to observe students' cognitive changes related to their recognition of the generality and to provide some educational implications by making students experience some geometrical explorations in DGE. To do so, we selected three middle school students who couldn't recognize the generality of geometrical theorems although they completed their own proofs for the theorems. We provided them exploratory activities in DGE, and observed and analyzed their cognitive changes. Based on this analysis, we discussed the effects of DGE on studensts' recognition of the generality of geometrical theorems.

* Key Words : generality(일반성), geometry(기하), dynamic geometry environment(DGE)(동적기하환경), 경험적 확신(empirical verification), 연역적 증명(deductive proofs), 도형 표현(figural representations)

논문접수 : 2013. 9. 1
논문수정 : 2013. 11. 7
심사완료 : 2013. 11. 14