

우리나라 고등학생들의 상관관계 이해도 조사

노 아 리* · 유 언 주**

상관관계는 두 통계적 변량 사이의 관계를 이해하는 데 필요한 핵심적인 통계의 개념이다. 우리나라의 중등교육과정에서는 제7차 교육과정까지 산점도와 분할표를 이용하여 상관관계를 비형식적으로 다루도록 하였고, 2007 교육과정 이후 상관관계에 대한 내용을 삭제하였다. 이 연구에서는 비형식적인 상관관계의 교육을 받은 고등학생들의 상관관계와 관련된 이해도 및 오개념을 조사하였다. 학생들은 상관관계가 선형적 관계성에 근접한 정도를 의미하는 것을 잘 알지 못하였고 자료의 밀집된 모양이 유발하는 시각적 오개념에 취약하였다. 또한 글로 표현된 상관관계의 강도 비교에 대한 서술문의 진위성을 잘 판단하지 못하였다. 많은 학생들이 2×2 분할표에 제시된 범주형 자료를 보고 상대빈도수의 개념을 이용하여 연관성을 판단하지 못하였다. 우리나라 고등학생들의 상관관계 개념의 이해도가 부족하고 오개념이 빈번한 것으로 볼 때, 통계의 기본적 소양인 두 변량 사이의 상관관계에 대한 지도가 강화되어야 할 것이다.

I. 서론

현대인들은 개인적, 사회적, 직업적 맥락에서 다양한 매체를 통해 많은 정보를 접하게 된다. 이 가운데 수량적 참조를 가진 정보를 정확히 이해하고 활용하기 위해서는 통계자료를 올바르게 해석할 수 있는 통계적 사고가 요구된다. 특히, 관찰된 두 변량 사이의 상관관계를 이해하는 것은 가장 기본적으로 요구되는 통계적 사고 중 하나이다. McKenzie & Padilla(1981)는 일상적인 영역에서 접하는 사건을 합리적으로 이해하기 위해서나 생활 중심 소재의 과학이나 사회 영역 연구에 있어서도 상관에 관한 사고는 중요한 역할을 한다고 언급한 바 있다. 또한, Jones 외 3인(2004)은 상관관계와 회귀에 관한 개념이 둘이

상의 변량 간의 통계적 관계를 확인하고 인과성을 설명하는데 사용되기 때문에 상관관계와 회귀를 이해하는 것은 학교 수학 교육과정에서 중요하다 하였다. 미국, 호주, 영국, 뉴질랜드 등과 같은 여러 나라에서는 상관관계, 선형회귀 등의 개념을 관련된 시각적 표현과 함께 중등 수학교육과정에 포함시키고 있다(Moritz, 2004).

이러한 다른 나라의 교육과정 모습과는 대조적으로 우리나라 중등수학 교육과정상의 통계 영역에서 상관관계 개념은 낮은 비중으로 다루어져 왔고 교육과정의 개편이 진행됨에 따라 통계 영역에서 상관관계의 비중은 점점 낮아지고 있다. 제7차 수학교육과정의 9-나 단계(중학교 3학년)에서는 ‘산점도, 상관관계, 분할표’의 개념을 비형식적인 정의 중심으로 다루고 있고 그 이후의 학년에서는 다루고 있지 않다. 제7차 교

* 서울대학교 대학원, callus01@snu.ac.kr (제1 저자)

** 서울대학교, yyoo@snu.ac.kr (교신저자)

육과정의 수학교과서의 내용 중 상관관계를 다루고 있는 부분은 그 내용을 직관적으로만 다루는 자료를 이용한 통계적 분석내용이 거의 없고, 상관에 대한 정의가 두 변량에 대한 ‘어떤 관계’라고만 정의되어 있어 그 설명이 미흡하였다(김미경, 2003, p.2). 또한, 분할표와 산점도는 초·중·고 확률과 통계 교육과정 전체에서 유일하게 이변수 확률벡터와 결합분포에 관해 다루는 것이나 그 전후 맥락이 분명치 않았고(김영신, 2001, p.23), 특이점(outlier)을 포함하는 자료에 대한 언급은 전혀 이루어지지 않았다. 하지만 이러한 내용마저도 2007 개정 수학교육과정 이후부터는 ‘학습내용 정선’이라는 이유로 교육과정상에서 완전히 삭제되어, 현재 시행되고 있는 우리나라 중등수학 교육과정상에서는 상관관계를 전혀 다루고 있지 않다.

본 연구는 우리나라 고등학생들의 상관관계 개념의 이해도 및 오개념을 조사하고 이를 근거로 상관관계 관련 개념의 지도와 관련하여 우리나라 중등수학교육의 통계교육 영역에서의 시사점을 도출하고자 한다. 이를 위해 상관관계의 이론적 의미와 상관관계와 관련된 공변동적 사고, 상관관계의 오개념에 대한 선행연구를 바탕으로 산점도, 제시글, 분할표 등의 형태로 표현된 이변량 자료에 대한 문항을 개발하고 이를 상관관계 개념의 비형식적이고 직관적인 정의만을 배운 우리나라 고등학생들에게 적용하여 학생들이 상관관계 개념의 이해과정에서 보이는 특징과 자주 출현하는 오개념을 관찰하고 분석하고자 한다.

이를 위하여 다음과 같은 구체적인 연구문제를 설정하였다.

첫째, 우리나라 고등학생들은 산점도를 보고 상관관계에 관한 특성을 바르게 파악할 수 있는가?

둘째, 상관관계 개념을 비형식적으로 배운 우

리나라 고등학생들은 현실의 맥락을 반영한 제시문 속의 상관관계를 바르게 해석할 수 있는가?

셋째, 상관관계 개념을 비형식적으로 배운 우리나라 고등학생들은 2×2 분할표를 보고 상관관계의 유무를 바르게 판단할 수 있으며 올바른 판단 근거를 제시할 수 있는가?

II. 이론적 배경

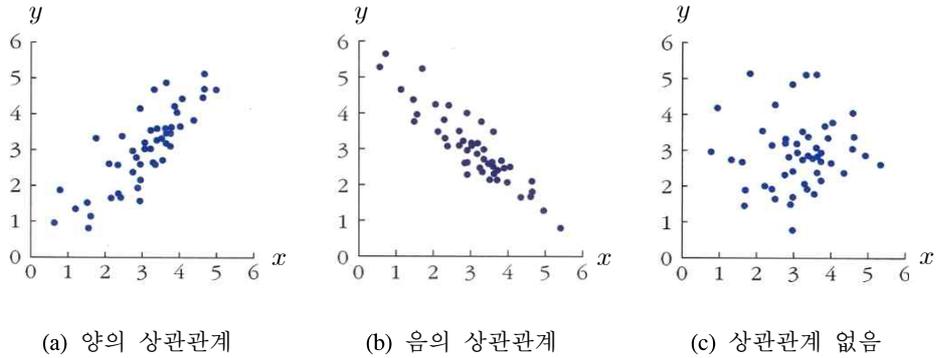
본 장에서는 상관관계와 관련된 통계적 개념과 상관관계, 연관성에 대한 공변동적 사고의 교육적 의미를 밝히고, 이와 관련하여 발생할 수 있는 오개념을 서술하였다.

1. 상관관계와 관련 개념

자료의 분석에서 두 변량 사이의 선형적 관계성의 정도를 상관관계(correlation)이라 한다. 상관관계는 이변량 결합(확률)분포와 관련된 것으로, 표준화된 변량들의 선형적 동일성(identity)에 대한 근접성의 척도로 이해할 수 있다(Falk & Well, 1997). 이 절에서는 상관관계의 시각적 판단을 위해 사용하는 산점도와 상관계수, 회귀분석 및 분할표에 관해 살펴본다.

가. 산점도

어떤 측정, 관찰이 둘 이상의 변량에 대해 함께 이루어질 때, 두 변량의 측정값을 순서쌍으로 하여 좌표평면 위의 점으로 나타낸 것을 산점도(scatter plot 혹은 scatter diagram)라 한다. 두 변량 x 와 y 의 관찰 값의 순서쌍을 산점도에 나타내었을 때, 점들이 어떤 직선 주위에 밀집하여 있으면서 x 값이 증가할 때 y 값도 증가하는 경



[그림 II-1] 산점도

향이 있으면 이 두 변량 x 와 y 사이에는 “양의 상관관계(positive correlation)가 있다”([그림 II-1 (a)])고 하고 거꾸로 x 값이 증가할 때 y 값이 감소하는 경향이 있을 때 이 두 변량 x 와 y 사이에는 “음의 상관관계(negative correlation)가 있다”([그림 II-1 (b)])고 한다. 또한, [그림 II-1 (c)]와 같이 산점도의 점들이 공동의 증가와 감소의 뚜렷한 경향을 나타내지 않고 고르게 흩어져 있는 경우는 두 변량 x 와 y 사이에는 “상관관계가 없다”고 한다. 이와 같이 산점도에 찍힌 점들이 어떤 직선을 중심으로 흩어진 정도, 즉, 선형성(linearity)에 따라 상관의 정도를 시각적으로 파악할 수 있다.

산점도는 상관관계 개념 지도의 도입부분에서 학생들에게 소개된다. 학생들은 이변량 자료를 산점도에 표현한 것을 보고, “상관관계가 있다/없다”, “양/음의 상관관계가 있다” 등의 시각적 분류법을 배우고 상관의 개념에 대한 개념을 형성하기 시작한다. 그러나 상관관계의 형식적 정의를 생략한 채 산점도와 같은 시각적 자료를 통한 상관관계의 비형식적 정의만 배운 학생들은 몇 가지 오개념을 갖게 될 수 있다. 몇몇 연구자들은 산점도의 시각적 특성에 따라 피험자들이 상관관계를 과대추정 또는 과소추정한다는

연구결과를 제시하고 있다(Cleveland, Diaconis & McGill, 1982; Strahan & Hansen, 1978). Cleveland 외 2인(1982)은 두 개의 산점도가 동일한 자료를 나타내고 있으나 둘 중 하나는 나머지 산점도의 측정단위(scale)가 두 배가 되도록 하여 산점도상의 점들이 가운데에 보다 더 밀집된 형태를 띠고 있도록 만든 후, 32명의 피험자에게 ‘두 산점도 중 상관이 더 높아 보이는 게 있는지, 있다면 어떤 것인지’를 물어보았다. 그 결과 66%의 피험자들이 그 두 산점도가 나타내는 상관계수 값이 동일함을 알고 있음에도 불구하고 점들이 가운데에 보다 더 밀집된 형태를 띠고 있는 산점도의 상관관계가 더 강해보인다고 답하였다. Strahan & Hansen(1978)은 80명의 피험자에게 상관계수가 .01부터 .995까지 다양하게 나타난 13개의 산점도를 보여주고 상관계수를 어렵짐작하도록 하는 실험을 하였다. 그 결과 대부분의 피험자가 본래의 상관계수보다 그 값을 과소추정하는 모습을 관찰하였다. 즉, 이 두 가지 연구에서 모두 상당수의 피험자들이 산점도를 시각적 표현자체로 해석하여 두 변량들의 상관정도를 실제보다 높거나 혹은 낮게 추론하는 경향을 관찰할 수 있었다.

나. 공분산과 상관계수

상관관계는 상관계수(correlation coefficient)로 수량화될 수 있고 이는 공분산(covariance) 과 관련된다. 공분산은 두 확률변수 X 와 Y 에 대해, 두 변수의 평균점인 \bar{X} 와 \bar{Y} 값을 기준으로 각각의 두 변수의 공통 증감의 정도인 $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ 의 평균을 말한다. X 와 Y 두 변량의 측정치를 X_i 와 Y_i 로 나타내면 공분산은 다음과 같이 계산된다.

$$s_{XY} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n - 1}$$

공분산은 이변량 자료에서 두 확률변수의 관계의 정도 및 방향을 측정하는 연관성의 척도로, 그 값이 양수이면 두 변수가 같은 방향으로, 음수이면 반대 방향으로 중심값(평균)으로부터 주로 변화함을 의미한다.

공분산의 값은 두 변수의 척도에 의존하기 때문에 이를 표준화 한 것이 상관계수이다. 상관계수는 다음과 같이 계산된다.

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

상관계수는 항상 -1 이상 $+1$ 이하의 값을 가지도록 표준화 되었으며, 따라서 서로 다른 두 쌍의 상관의 정도를 비교하는 것이 가능하다. 상

관의 정도에 대하여 “상관이 높다/낮다/없다” 등의 언어적으로 표현이 자주 사용되나 이에 대한 절대적 기준은 없고 관습적 기준이 학제별로 사용된다. 상관계수가 $+1$ 과 -1 인 경우는 두 변량 X 와 Y 의 측정치 X_i 와 Y_i 사이에 항상 공통의 선형관계가 성립할 때이다. 즉 어떤 측정치에 대해서도 고정된 a, b ($b > 0$)의 값이 있어서 $Y_i = a + bX_i$ 가 성립할 경우이다. 이때 $b < 0$ 이면 상관계수가 -1 , $b > 0$ 이면 상관계수가 $+1$ 이고 a, b 의 값의 크기와는 무관하게 1 또는 -1 이 된다.

상관관계를 상관계수로 수치화하는 것은 유일한 방법이 아니고 다른 통계적 수치가 사용되기도 한다²⁾. 그러나 상관계수는 상관관계를 나타내는 가장 보편적인 방법으로 여러 나라의 중등 교육과정에서 산점도, 회귀분석법 등과 함께 그 계산 공식이 소개되고 있다 (ACARA, 2013; ME, 2000; Pope, 2013). 상관계수의 공식은 이변량 결합확률분포라는 고등 통계이론을 통해 도출되는 공식이나, 여러 나라의 수학교육과정에서는 이변량 관찰값의 선형모델의 적합도 판단을 위한 수치로 그 공식이 소개되고 통계소프트웨어 등을 이용하여 계산하며, 그 수치의 크고 작음과 $+$ 방향의 의미를 지도한다.

라. 선형 회귀분석과 회귀직선

회귀분석은 상관분석과 밀접한 관련을 가진 통계적 분석법으로, 특히 선형 회귀분석(linear regression analysis)이 널리 쓰인다. 선형 회귀분석은 두 변량의 관계를 선형함수관계로 모델링

-
- 1) 이 식은 모공분산 σ_{XY} 에 대한 비편향 추정량(unbiased estimator)으로 분모가 n 인 경우에는 편향성의 문제로 $n-1$ 로 나눈 식을 주로 이용하고, n 으로 나눈 경우는 모공분산의 기대식이며, 또한 최대우도추정량(maximum likelihood estimator)에 해당한다.
 - 2) 스피어만의 등위상관계수(rank correlation coefficient), 양류상관계수(point-biserial correlation coefficient), 양분상관계수(biserial correlation coefficient), ϕ 계수(phi coefficient) 등이 있다(성태제, 2011. pp.139-151).

하는 것으로, 선형함수 모델과 실측 자료사이의 차이의 분산을 최소화하는 최소자승법을 이용하여 그 모델이 추정되는 것이 보편적이다. 이러한 선형함수 모델은 회귀직선이라 불리고 다음과 같은 방정식으로 표현된다.

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$$

회귀직선의 방정식의 기울기 계수 b_1 과 X 와 Y 의 상관계수 r_{XY} 의 관계는 다음과 같다.

$$r_{XY} = b_1 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} = b_1 \frac{s_X}{s_Y}$$

여기서 s_X 와 s_Y 는 각각 X 와 Y 의 표준편차이다.

위의 관계에서 알 수 있듯이 Y 에서 X 로의 회귀직선의 기울기 b_1 이 크고 작은 것과 X 와 Y 의 상관계수 r_{XY} 의 값의 크고 작음은 관련은 있으나 같은 것은 아니다. X 와 Y 의 표준편차의 비를 곱한 만큼의 차이를 가지게 된다. 그러나 한 편 $b_1 = 0$ 일 경우에는 r_{XY} 도 0이 된다.

회귀분석은 여러 나라에서 탐색적 자료분석

중심의 통계교육의 일환으로 고등학교 과정 등에서 지도되고 있다 (NCTM, 2000; ACARA 2013; ME, 2000). 이변량 자료가 다루어지고 공학도구를 이용하여 회귀직선을 그리고 그 직선의 적합도를 상관계수를 이용하여 판정하는 활동이 이루어진다.

마. 분할표

통계 자료 가운데, 범주형 자료(categorical data)는 그 변량이 갖는 속성에 의해 몇 개의 범주로 나누어지고 각 변량의 측정값은 해당하는 범주에 할당하는 것으로 얻어진다. 예를 들어, 성별, 연령, 지역, 선호도 등의 조사 결과 등이 해당한다. 어떤 두 범주형 자료를 동시에 한 대상으로부터 측정하였을 경우, 한 변량의 특정 범주와 다른 변량의 특정 범주가 높은 빈도수로 함께 관찰되는 현상이 있을 수 있는데 이런 경우 두 변량 사이의 연관성(association)이 있다고 하며 이는 범주형 자료의 상관관계를 판정하는 것이다.

두 변량 사이의 연관성은 범주에 수치를 부여할 수 있는 경우에는 상관계수로 추정될 수도 있고, 연관성 분석법인 카이제곱(χ^2)검정으로 판정되기도 하고, 크래머 계수 (Cramér's coefficient, V) 등으로 추정되기도 한다. 또한 연관성은 한 변량의 각 범주에서 다른 변량 값들의 비율 분

<표 II-1> $r \times c$ 분할표

변량 A \ 변량 B	B_1	B_2	...	B_c	행의 합
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1c}	$t_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2c}	$t_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rc}	$t_{r.}$
열의 합	$t_{.1}$	$t_{.2}$...	$t_{.c}$	n

포를 비교하는 범주별 상대빈도수를 비교함으로써 그 강도가 판정될 수 있다.

<표 II-1>는 r 개의 범주와 c 개의 범주를 가진 두 범주형 변량에 대한 분할표의 일반형으로, 각 i 행, j 열에 대응하는 칸에는 변량 A 와 B 의 각 범주의 해당하는 경우의 빈도수인 n_{ij} 의 값을 표시한다. 이처럼 변량들의 속성에 따라 분류된 전체 자료의 빈도표를 $r \times c$ 분할표($r \times c$ contingency table)라고 한다(김우철 외 8인, 2010, p.313). 한 변량에 대해 도수를 나타낸 분할표를 일원분할표(one-way contingency table) 혹은 도수 분포표라 하며, 변량이 2개인 경우의 분할표를 이원분할표(two-way contingency table)라 한다. 이는 이차원 모집단의 표본자료를 하나의 표로 요약한 것이다. 이원분할표의 가장 간단한 형태인 2×2 분할표는 두 변량이 질적 속성을 나타내거나, 양적인 속성을 두 범주로 양분한 경우에 쓰일 수 있다. 변량이 3개 이상인 경우에도 여러 차원의 범주의 조합에 대하여 각각 이원분할표로 나타내어 다차원 분할표(multi-dimensional contingency table)를 구성할 수 있다.

분할표에 제시된 범주형 자료에 대한 연관성에 대한 판단은 χ^2 등의 방법을 쓰지 않고도 범주별 상대빈도수를 구하여 비형식적으로 실행될 수 있다. 위의 분할표에서 변량 A 의 첫 번째 범주 A_1 의 총 빈도수에 해당하는 t_1 에 대한 변량 B 의 범주 B_1, B_2, \dots, B_n 의 상대빈도수는

$$\frac{n_{11}}{t_1}, \frac{n_{12}}{t_1}, \dots, \frac{n_{1c}}{t_1} \text{로, 만약 두 번째 범주 } A_{2z} \text{에 대한 상대빈도수}$$

$\frac{n_{21}}{t_2}, \frac{n_{22}}{t_2}, \dots, \frac{n_{2c}}{t_2}$ 와 그 분포가 크게 다르다면, 변량 A 의 범주 A_1 과 A_{2z} 는 변량 B 에 대하여 어떤 영향력이 있고 따라서 A 와 B 사이에 연관성이 있다고 판단할 수 있다. 이렇게 상대빈도수를 범주별로 구하는

것은 조건부확률의 구하여 비교하는 것과 유사한 활동이기도 하다. 2×2 분할표가 주어졌을 때 표에서 구할 수 있는 상대빈도의 값들은 다음 세 가지 종류로 나누어 볼 수 있다: 1) 결합 상대빈도, 2) 변량 1에 대한 상대빈도, 3) 변량 2에 대한 상대빈도. 연관성에 대한 비형식적 판단은 자료가 해결하려고 하는 문제 상황의 맥락과 자료를 수집한 방식에 비추어 이 가운데 어떤 상대빈도를 구하여 연관성을 판단하는 것이 적절한지에 대한 판단을 요구한다. 학생들은 많은 경우, 각 범주의 결합상황의 상대빈도가 아닌 절대빈도를 비교하는 오류를 범하게 된다. 이때 기준이 되는 변량의 각 범주의 총합의 개수가 큰 차이를 보일 경우, 절대빈도를 이용한 판단은 오류를 낳게 된다.

상대빈도(relative frequency)의 개념은 중학교 교육과정에서 상대 도수분포표를 통해 소개되고 있지만, 이원분할표를 배울 때에는 상대빈도의 개념을 거의 활용하지 않는다. 이원분할표, 특히, 2×2 분할표는 타교과의 자료를 이용한 학습과 평가에 자주 등장하는 자료 제시 방법이고, 분할표를 통한 자료 분석의 핵심적인 활동이 조건부확률의 개념을 이용한 상대빈도의 비교임에도 불구하고 우리나라 교육과정에서는 이를 공식적으로 지도하지 않고 있다.

2. 상관관계의 교육적 의미

상관관계에 대한 이해는 변량 사이의 관계성을 이해하는 공변동적 사고와 깊은 연관이 있고 또한 인과관계와 관계성의 근거를 이해하는데 핵심적인 개념이다. 이 절에서는 공변동적 사고와 상관관계와 인과관계의 관련성을 설명하고 이와 관련하여 발생할 수 있는 오개념을 살펴본다.

가. 공변동적 사고

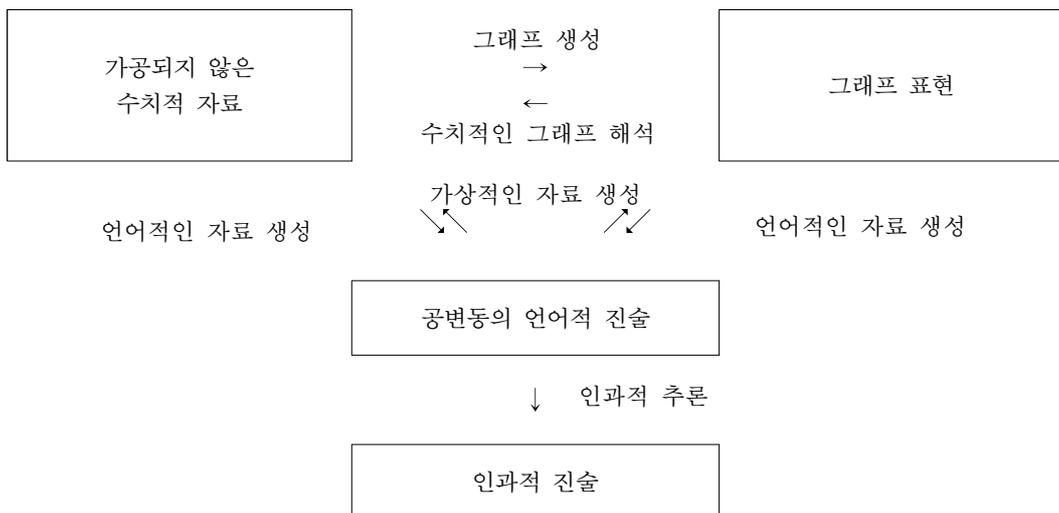
상관관계는 공변동(covariation)의 개념으로 설명되며 상관관계와 관련된 사고는 공변동적 사고(covariational reasoning)이다. 넓은 의미에서 공변동은 변이 사이의 관계를 다루는 것을 말하는 것으로, 크게 논리적 공변동, 수치적 공변동, 통계적 공변동으로 구분할 수 있다. 이 중 통계적 공변동은 수치적 크기에 따라 변하는 두 통계 변량의 대응관계를 말하며 통계적 변량의 특징인 변이성이 공동으로 발생하는 현상에 대한 이해와 연결된다(Moritz, 2004). 즉 논리적, 혹은 수치적 공변동의 경우 변화의 유무가 결정적이라는 특징을 가지나 통계적 공변동은 이러한 공통 변화에 대한 판단을 확률적으로 하게 된다.

Moritz(2004)는 공변동에 관한 사고는 주로 본래의 수치적 자료, 그래프 표현, 통계적 공변동 및 인과관계에 대한 언어적 설명을 서로 다른 형태로 변환하는 과정을 포함한다고 하였으며, 그러한 변환 과정을 [그림 II-2]와 같이 나타내었다.

학생들은 편견(bias) 혹은 오류 가능성을 항상

고려하기 위해 이러한 변환 과정이 의미하는 바를 알아야 한다. 따라서 학생들은 학교에서 그래프를 그리고 해석하는 활동을 경험한다. 그러나 성인의 경우 신문을 읽을 때와 같이 일상생활에서 그래프를 그려 일련의 자료를 분석하거나 언어적으로 그래프를 해석하여 인과적으로 추론하는 일은 거의 없다. 대부분의 신문기사와 광고에는 인과적 주장을 뒷받침하는 언어적 설명이 있지만 그 중 일부만이 그러한 주장의 이면에 있는 통계적 자료를 설명하기 위해 그래프를 사용한다. 대부분의 경우 성인들은 통계적 연관성에 기초한 인과적 주장을 듣고, 이해하고 비판적으로 평가하기 위해 이러한 주장을 뒷받침할 만한 통계적 자료를 상상해야 하는데, 이를 가상적 자료 생성(speculative data generation)이라 한다. 가상적 자료 생성을 하기 위해서는 수치적 공변동을 이해해야 하며 자료가 어떻게 수집되고 측정되는가와 같은 자료에 대한 맥락적 이해가 필요하다(Moritz, 2004).

‘공변동적 사고’ 혹은 ‘이변량 자료에 관한 사고’라고도 언급되는 두 변량간의 연관성(관계)에 관한 사고는 두 변량간의 관계를 판단하고 해석



[그림 II-2] 통계적 공변동을 표현하는 형태와 그것을 변환하는 능력(Moritz, 2004)

하는 것과 관련된 것이다(Zieffler & Garfield, 2009). 이러한 사고의 유형은 수학적 형태(예, 일차함수), 통계적 형태(예, 산점도에 관한 추론) 또는 질적인 형태(예, 심리학의 원인 모형 이론에서 묘사되는 ‘공부하는 시간이 많아질수록 시험성적이 나아진다’와 같은 관측된 연관성에 근거한 사건의 원인 추측)로 이루어진다. 따라서 공변동의 개념은 심리학, 수학교육, 과학교육, 통계교육과 같은 다양한 분야에서 조금씩 다르게 묘사되고 있으나 모두 중요한 개념으로 다루어지고 있고, 공변동적 사고와 관련된 연구 역시 위의 다양한 학문분야에서 활발히 이루어져 왔다(예, Inhelder & Piaget, 1958; Batanero 외 3인, 1996; Moritz, 2004; Cobb, McClain, & Gravemeijer, 2003; Gravemeijer, 2000).

Zieffler & Garfield(2009)는 그동안 심리학, 수학교육, 과학교육, 통계교육 등의 다양한 학문 분야에서 이루어진 공변동적 사고에 관한 연구들의 일반적인 발견들을 다음과 같이 정리하였다.

- 두 변량의 관계에 대한 학생들의 사전 지식이 그들의 공변동 판단에 큰 영향을 미친다.
- 학생들은 종종 상관관계가 없는 두 사건을 상관관계가 있다고 믿는다.
- 학생들의 공변동에 관한 판단은 대부분 변량들의 공동 존재(joint presence)에 영향을 받고, 변량들의 공동 부재(joint absent)의 영향은 거의 받지 않는다.
- 학생들은 관계가 부적일 때 공변동에 관한 사고에 어려움을 겪는다.
- 학생들은 자료나 그래프 상의 두 변량의 관계를 실제보다 덜 상관있다고 파악하는 경향이 있다.
- 학생들은 공변동적 사고를 근거로 인과관계를 유도해내려는 경향이 있다.

최근의 몇몇 연구에서는 공변동적 사고를 위한 기반으로서의 일변량 분포 개념의 중요성이 강조되고 있다. Cobb 외 2인(2003)과 Gravemeijer (2000)는 분포의 모양, 분포의 중심, 분포의 변이 등과 같은 분포의 특성에 대한 깊은 이해가 이변량 자료의 완벽한 이해를 위한 중요한 기초 지식이라고 말하였다. 즉, 이 두 연구에서는 학생들이 이변량 자료에 대한 추론을 할 수 있려면 일변량 분포에 대한 추론 능력이 필요하다고 주장하고 있다. 그러나 Zieffler & Garfield (2009)은 이러한 가설에 대한 의구심을 불러일으킬만한 연구결과를 제시하고 있다. 그들은 일변량 자료의 분포에 관한 추론 능력의 향상과 이변량 자료에 대한 추론 능력의 향상이 서로 관련이 있는가에 관한 실험 연구를 실시하였으나 그 둘 사이의 특별한 관계를 밝혀내지 못하였다. 다만, 일변량에 관한 추론 과제에서 평균 이상의 향상을 보인 학생들이 이변량 양적 자료에 관한 추론에 있어서 높은 초기 능력수준을 보였다고 언급하면서, 이변량 자료에 대한 추론 능력 향상의 대부분이 일변량 분포의 학습 중에 일어나므로 아마도 이 두 가지 유형의 추론은 불가분의 관계일 것이라고 설명하였다.

나. 상관관계와 인과관계

상관관계는 변량간의 연관성 정도를 나타내어 주로 사회현상의 특성을 밝히고 발생빈도를 있는 그대로 보여주는 기술(discription)을 위한 기능을 수행한다. 반면 인과관계는 원인이 되는 변량과 결과로 나타나는 변량간의 관계를 나타내는 것으로 어떠한 현상이나 사건의 원인과 결과를 설명(explanation)하기 위한 기능을 수행한다(남궁근, 2010, pp.201-204). 이렇듯 상관관계와 인과관계에는 개념적·기능적 차이가 있음에도 불구하고 우리는 주변에서 상관의 의미를 인과

관계로 잘못 해석하는 경우를 어렵지 않게 발견할 수 있다. 사람들은 특정 관계에 대한 선입견을 갖고 있는 거의 모든 경우에 대하여 공변동적 분석을 근거로 인과관계를 형성하려는 경향을 갖고 있다는 것은 몇몇 연구의 일관된 결과이기도 하다(예, Ross & Cousins, 1993).

다음은 J. S. Mill이 제시한 인과추론의 세 가지 조건이다(남궁근, 2010, pp.204-211).

- 공동변화의 원칙³⁾ : 변량들의 변화가 연관을 가지면서 동시에 이루어져야 한다.
- 시간적 선행성(temporal precedence)의 원칙 : 원인이 되는 사건이나 현상은 결과보다 시간적으로 먼저 발생해야 한다.
- 경쟁가설(rival hypothesis) 배제의 원칙 : 변량들 간의 관계가 제 3의 변량 또는 외부의 변량의 개입에 의해 설명될 가능성이 없어야 한다.

위의 세 가지 조건 중 공동변화의 원칙만 갖춰진 경우를 상관관계라고 하고 세 조건이 모두 갖추어져 있는 경우를 인과관계라고 한다. 우리 주변에서 상관관계를 인과관계로 혼동하는 경우를 어렵지 않게 볼 수 있는데, 그 중 대다수의 사례들은 다음 두 가지 경우로 요약된다.

첫째, 공동변화의 원칙과 시간적 선행성의 원칙만을 만족시키는 상관관계를 인과관계로 잘못 해석하는 경우로, 이를 전후 인과의 오류(post hoc ergo propter hoc)라고도 한다. 이 전후 인과의 오류란 시간적 발생에 따라 인과관계를 설명하려고 하는 논리적 오류로서 A에 따라 B가 일어나면 A는 B의 원인이 된다고 결론짓는 오류이다.

둘째, 공동변화의 원칙과 경쟁가설 배제의 원칙만을 만족시키는 상관관계를 인과관계로 오인

하는 경우이다. 예를 들어, 초등학교 학생의 어휘력과 발 크기는 강한 상관관계를 보이거나 이는 인과관계는 아니다. 새로운 단어를 습득한다고 발이 커지는 것도 아니고 발이 커진다고 단어가 저절로 외워지는 것도 아니다. 나이를 먹을수록 어휘력도 늘고 발도 커지는 것뿐이다. 나이라는 변수가 제 3의 요인, 즉, 혼동요인으로 작용한 셈이다.

두 변량의 관계에서 인과성에 대한 추론이 현대인에게 중요한 사고인 만큼 상관관계를 바탕으로 하여 올바른 인과관계의 결론을 얻기 위해서는 우연에 의한 요소 및 제 3의 요인을 배제시키고 전후 인과의 오류를 범했는지 살펴본 후 귀납 추론을 해야 한다. 다시 말해, 경험 자료에 바탕을 둔 상관관계를 바르게 이해하기 위해서는 인과관계와 관련된 오개념을 주의해야 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 설계

본 연구에서는 우리나라 고등학생들의 상관관계 개념에 대한 이해도를 조사하여 우리나라 중등수학 교육과정, 특히 통계 영역에서의 교육적 시사점을 도출하고자 상관관계 개념의 이해도를 측정할 수 있는 문항을 개발하여 문항검사를 실시하였다. 각 문항은 다음 3가지의 자료 형태 중 하나의 자료를 포함하고 있다: 1) 산점도, 2) 두 변량 사이의 상관관계에 관한 제시문, 3) 2×2 분할표.

문항의 정제와 타당도 및 신뢰도의 확인을 위하여 먼저 현직 중등학교 수학교사, 수학교육과 대학원생, 통계전문가 등으로 구성된 문항개발 전문가 7명의 의견을 통하여 내용 타당도를 점검하였고 두 차례의 예비검사를 시행하였다. 첫

3) '상시연결성(constant conjunction)의 원칙' 또는 '공변동의 원칙'이라고도 한다.

<표 III-1> 문항검사 진행 과정

문항 개발	- 상관계 개념 이해도 조사를 위한 문항 개발 - 국내외 문헌 검토 및 전문가 검토 시행
↓ (1차 문항지 완성 및 적용)	
1차 예비 검사	- 2011년 7월 말 - 인천시 부평구 소재 A고등학교 1학년 47명
↓ (1차 문항 수정, 2차 문항지 완성 및 적용)	
2차 예비 검사	- 2011년 11월 초 - 서울시 성북구 소재 B고등학교 1학년 40명
↓ (2차 문항 수정, 최종 문항지 완성 및 적용)	
본검사	- 2011년 11월 말 - 서울시 성북구 소재 C고등학교 1학년 140명 - 서울시 동작구 소재 D고등학교 2학년 100명
↓ (응답자 선별)	
최종 결과 분석	- 2011년 12월 - 216명의 응답결과를 대상으로 문항의 신뢰도 및 정답률 분석

번째 예비검사는 인천 소재의 A고등학교 1학년 학생 47명을 대상으로 실시하였고 그 결과를 분석하여 1차 문항 수정과정을 거쳤다. 두 번째 예비검사는 서울 소재의 B고등학교 1학년 40명을 대상으로 실시하였다. 이러한 두 차례의 예비검사에서 얻어진 문항검사 결과 분석에 근거하여 최종적으로 본검사용 문항지를 완성하였다. 본검사용 문항지에는 35개의 문항이 포함되어있고 이는 학생 1인당 20분 이내에 충분히 응답 완료 가능한 수준의 문항들이다.

본검사는 서울 소재의 C고등학교 1학년 학생 140명, D고등학교 2학년 학생 100명, 총 240명을 대상으로 실시하였다. 대상이 된 C고등학교 학생들의 학력수준은 중하위권, D고등학교 학생들의 학력수준은 중상위권이고 가정의 사회 경제적 수준은 중산층 정도에 해당된다. 이들 240명

의 학생들은 모두 중학교 때 제7차 교육과정을 이수한 학생들로 중학교 3학년 당시 학교 수험시간에 산점도, 상관관계, 분할표에 관한 비형식적 정의를 배운 학생들이다.

불성실한 응답은 자료 분석 결과를 왜곡시킬 수 있으므로 최종 분석 대상에서 제거하였다. 전체 35문항 중 결측치가 8개 이상(전체 문항의 약 23%에 해당)인 응답자는 모두 제거하였고, 이 과정에서 19명이 제거되었다. 다음으로 선다형 문항의 반응을 한 가지 선택지로 통일한 극단적인 응답자 5명 역시 제거되었다. 따라서 총 240명의 응답자 중 위의 과정을 통하여 24명이 제거된 216명의 응답자를 대상으로 최종 결과분석을 실시하였다.

<표 III-2> 문항 범주표

자료형태	내용	문항 번호
1. 산점도	가. '상관관계가 있다/없다', '양/음의 상관관계'를 구분할 수 있는가?	1~3, 6
	나. 서로 다른 산점도를 보고 상관관계의 강도를 비교, 판단할 수 있는가?	4, 5, 14~18
	다. 회귀직선의 기울기와 상관관계의 강도는 관계가 없음을 알고 있는가?	7, 8, 9
	라. 산점도의 측정단위의 증감과 상관관계의 강도는 관계가 없음을 알고 있는가?	10, 11
	마. 산점도에 나타난 특이점이 상관관계에 미치는 영향을 알고 있는가?	12, 13
2. 제시문	가. 제시문에 드러난 상관관계 관련 상황을 바르게 해석할 수 있는가?	19~21
3. 2×2 분할표	가. 서로 다른 두 그룹의 2×2 분할표를 보고 상관관계의 강도를 비교, 판단할 수 있는가?	22, 23
	나. 2×2 분할표를 보고 상관관계 존재여부를 바르게 판단하고 올바른 판단근거를 제시할 수 있는가?	24~35

2. 문항 범주 및 내용

본검사용 문항은 <표 III-2>에 제시한 바와 같이 이변량 자료의 형태에 따라 산점도(18개), 제시문(3개), 2×2 분할표(14개)의 세 가지 범주로 구성되어 있고 각각의 범주마다 다시 하위 범주로 나뉘어 있다. 전체 35문항인 본검사용 문항지는 선다형 문항 22개, 서술형 문항 10개, 진위형 문항 3개로 구성되어 있으며 이 중 10개의 서술형 문항은 모두 앞 번호의 선다형 문항의 응답 선택이유를 묻는 문항이다. 본검사용 문항지는 부록에 제시하였다.

전체 35개의 문항 중 이유를 묻는 10개의 서술형 문항을 제외한 나머지 25개의 선다형 및 진위형 문항의 신뢰도는 본검사 후 SPSS 이용하여 점검되었으며 크론바흐 알파(Cronbach's α) 값은 .645이다.

IV. 문항검사 결과분석

상관관계 개념에 관한 35개 문항에 대한 검사 결과를 <표 III-2>의 문항 범주표의 자료형태 및 내용 범주별로 분석하였다. 선다형과 진위형 문항의 경우 정답률을 <표 IV-1>에 제시하였다.

1. 산점도

가. '상관관계가 있다/없다', '양/음의 상관관계'를 구분할 수 있는가?

주어진 6개의 산점도를 보고 그 중에서 양/음의 상관관계가 있는 것과 상관관계가 없는 것을 구별해내는 문항인 1~3번과, 3개의 산점도의 공통점을 찾아내는 6번 문항의 정답률은 순서대로 93.52%, 93.52%, 84.26%, 88.43%로 모두 80%를

<표 IV-1> 서술형을 제외한 문항별 정답률 및 신뢰구간

자료 형태	내용	문항 번호	정답률	신뢰구간
1. 산점도	가. '상관관계가 있다/없다', '양/음의 상관관계'를 구분할 수 있는가?	1	93.5	(0.90,0.97)
		2	93.5	(0.90,0.97)
		3	84.3	(0.79,0.89)
		6	88.4	(0.84,0.93)
	나. 서로 다른 산점도를 보고 상관관계의 강도를 비교, 판단할 수 있는가?	4	89.8	(0.86,0.94)
		14	84.7	(0.08,0.09)
		15	84.7	(0.08,0.09)
		16	47.7	(0.41,0.54)
		17	79.2	(0.74,0.85)
	다. 회귀직선의 기울기와 상관관계의 강도는 관계가 없음을 알고 있는가?	7	57.9	(0.51,0.64)
		8	17.1	(0.12,0.22)
	라. 산점도의 측정단위의 증감과 상관관계의 강도는 관계가 없음을 알고 있는가?	10	19.0	(0.14,0.24)
	마. 산점도에 나타난 특이점이 상관관계에 미치는 영향을 알고 있는가?	12	46.3	(0.40,0.53)
13		51.4	(0.45,0.58)	
2. 제시문	가. 제시문에 드러난 상관관계 관련 상황을 바르게 해석할 수 있는가?	19	88.4	(0.84,0.93)
		20	74.5	(0.69,0.80)
		21	47.7	(0.41,0.54)
3. 분할표	가. 서로 다른 두 그룹의 2×2 분할표를 보고 상관관계의 강도를 비교, 판단할 수 있는가?	22	77.3	(0.72, 0.83)
		24	75.0	(0.69,0.81)
	나. 2×2 분할표를 보고 상관관계 존재여부를 바르게 판단하고 올바른 판단근거를 제시할 수 있는가?	26	68.5	(0.62,0.75)
		28	35.2	(0.27,0.42)
		30	37.5	(0.31,0.44)
		32	57.4	(0.51,0.64)
		34	36.1	(0.30,0.43)

웃도는 높은 정답률을 보였다. 대부분의 학생들은 주어진 산점도를 보고 상관관계의 유무와 방향성(양/음)을 바르게 해석할 수 있음을 알 수 있다.

나. 서로 다른 산점도를 보고 상관관계의 강도를 비교, 판단할 수 있는가?

서로 다른 산점도를 보고 상관관계의 강도를

비교, 판단할 수 있는 능력과 관련된 문항들 중에서 4번 문항의 정답률을 살펴보면 84.26%로 상당히 높은 편임을 알 수 있다. 하지만 4번 문항지의 선택 이유를 묻는 문항인 5번 문항의 응답결과를 살펴보면 대부분의 학생들이 상관관계의 강도를 단순히 '산점도상에 나타난 점들이 얼마나 밀집해있는가 혹은 퍼져있는가'에 기준하여 판단한 것으로 드러난 반면(177명), 상관

관계의 강도를 선형성과 관련지어 생각한 경우는 전체의 7.87%(7명)에 불과한 것으로 나타났다. 즉, 대다수의 학생들은 상관관계의 강도를 판단하는 명확한 기준이 무엇인지 바르게 인지하고 있지 못한 채 밀집성이라는 시각적 이미지에 의존하여 상관관계의 강도를 판단하고 있는 것으로 조사되었다.

14번의 경우 상관관계의 강도는 같고 방향만 다른 두 산점도의 상관관계의 강도를 비교하는 문항으로 정답률은 84.72%로 나타났다. 15번과 18번 문항은 상관관계의 방향은 같지만 강도는 다른 두 산점도의 상관관계의 강도를 비교하는 문항으로 정답률은 각각 84.72%, 87.96%로 서로 비슷한 정답률을 나타내었다. 상관관계의 강도와 방향이 모두 다른 두 산점도의 상관관계의 강도를 비교하는 문항인 16번, 17번 문항의 정답률은 각각 47.69%와 79.17%로 매우 상이한 결과가 나타났다. 두 문항의 차이점은 16번 문항의 경우 양의 상관관계를 갖는 산점도와 음의 상관관계를 갖는 산점도를 비교 판단하는 문항인 반면, 17번 문항은 상관관계가 없는 산점도와 양의 상관관계를 갖는 산점도를 비교 판단하는 문항이었다. 즉, 상관관계의 강도를 상대적으로 비교할 때, 그 방향이 다른 경우 학생들은 더 어려움을 겪는 것으로 보였다.

다. 추세선의 기울기와 상관관계의 강도는 관계가 없음을 알고 있는가?

주어진 네 개의 산점도에 관한 설명 ①~④ 중 옳은 것을 고르는 7번 문항의 정답률은 57.87%으로 이 중 상관관계는 같으나 추세선의 기울기가 다른 산점도 (나)와 (다)에 대한 판정을 요구하는 설명은 ③과 ④였다. 상관관계의 강도와 추세선의 기울기에 관해 학생들이 갖고 있는 오개념은 다음 8번과 9번 문항의 응답결과를 통하여

더욱 명확하게 드러난다. 8번 문항은 상관관계의 강도는 추세선의 기울기와는 관련이 없음을 알고 있는지를 확인하고자 했던 문항이고 9번은 8번의 선택이유를 묻는 서술형 문항이다. 8번 문항의 정답률은 17.1%인 반면 추세선의 기울기가 크면 상관관계의 강도도 크다는 것을 오개념에 대응하는 ②번의 응답률은 정답률의 4배가 넘는 72.2%나 되어 상당수의 학생들이 오개념을 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 8번에서 ②번을 선택한 학생의 대부분이 9번에서 그러한 선택을 한 이유로 ‘기울기가 더 크기 때문’(101명), ‘(추세선의) 변화가 더 뚜렷하므로’(15명), ‘그래프(다)가 $y = -x$ 의 그래프 모양에 더 가까워서(5명)’ 등을 들었다. 이는 모두 추세선의 기울기와 직·간접적으로 관련된 이유들이다.

라. 산점도의 측정단위의 증감과 상관관계의 강도는 관계가 없음을 알고 있는가?

10번 문항은 Cleveland 외 2인(1982)의 세 번째 실험을 ‘산점도의 시각적 효과에 따른 오개념 확인’이라는 검사목적에 맞도록 변형하여 제작한 것으로 본래 Cleveland 외 2인(1982)의 실험의 의도 및 진술방식과는 약간의 차이가 있다. Cleveland 외 2인(1982)의 경우 10~11번 문항에 제시된 두 산점도 (가)와 (나)를 보여주고 두 산점도의 상관계수는 같다고 말해준 뒤 ‘두 산점도 중 상관이 더 높아 보이는 것이 있는지, 만약 있다면 어떤 것인지’를 물었다. 반면 본 검사에서는 상관계수의 개념을 배우지 않은 학생들이 이해할 수 있도록 상관계수라는 용어의 언급을 하지 않고 ‘(나)는 (가)의 일부를 확대하여 나타낸 것’이라고 진술한 뒤 ‘산점도 (가)와 (나) 중 상관관계가 더 큰 것은?’이라고 물었다.

전체 학생의 62.04%는 산점도 (가)가 더 상관관계가 크다(①)고 하였고, 18.52%는 산점도 (나)

가 더 상관관계가 크다(②), 그리고 18.98%만이 두 산점도의 상관관계의 크기는 동일하다(③)고 답하여 18.98%의 낮은 정답률을 보였다. 9번의 응답이유를 물은 10번의 응답유형을 살펴보면, 9번에서 ①을 선택한 학생의 대부분은 ‘(가)의 점들이 (나)의 점들 보다 더 밀집되어 있다’(114명)를 그 이유로 들었다. 이는 많은 학생들이 ‘동일한 데이터를 근거로 작성되었을지라도 산점도 상의 점들이 서로 가까이 분포할수록 상관관계는 더 강하다’는 오개념을 갖고 있음을 확인할 수 있는 대목이다.

또한 10번 문항의 각 보기별 응답률인 62.04%, 18.52%, 18.98%는 Cleveland 외 2인(1982)의 실험 결과인 66%, 13%, 22%와 매우 유사한 패턴이다. 즉, 9, 10번 문항의 결과를 통하여 ‘점-군집 크기(point-cloud size)⁴⁾의 감소에 따른 산점도의 세로축과 가로축의 측정단위의 증가는 개인의 시각적 판단에 의한 연관성의 크기(judged association)를 증가 시킨다’는 Cleveland 외 2인(1982)의 연구결과를 확인할 수 있었다.

마. 산점도에 나타난 특이점이 상관관계에 미치는 영향을 알고 있는가?

Zieffler & Garfield(2009)의 검사 문항지를 참고하여 제작한 12번, 13번 문항을 통해서 학생들이 특이점이 상관관계에 미치는 영향을 알고 있는지를 알아볼 수 있었다. 이들 문항의 정답률은 각각 46.3%, 51.39%이었고 특이점을 추가 혹은 제거함에 따라 상관관계의 변화는 생기지 않는다고 대답한 학생도 각각 35.19%, 36.57%이나 되었다. 이들 오답자들은 아마도 ‘한 개의 점이 전체 자료에 미치는 영향은 무시해도 될 만큼 미비하다’고 생각한 것으로 보인다. 즉, 특이점의 성질과 조작방법에 대한 이해가 상당히 부족하다고 짐작

할 수 있다. 실제로 특이점은 통계학에서 차지하는 중요성에도 불구하고 학교수학에서는 전혀 다루어지지 않는 개념이다(이경화, 2004).

2. 제시문에 드러난 상관관계 관련 상황을 바르게 해석할 수 있는가?

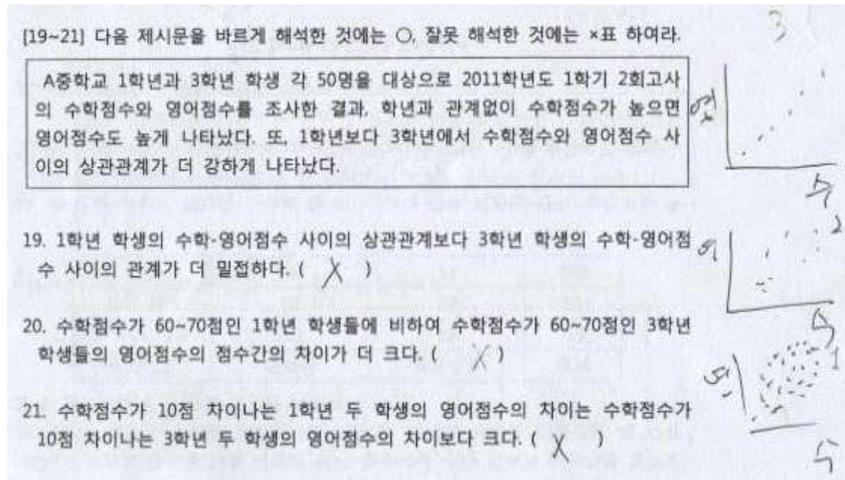
실세계에서 흔히 접할 수 있는 상관관계의 강도와 관련된 제시문을 읽고 상관관계의 강도와 자료의 분포 사이의 관계 해석에 관련된 내용을 진위형으로 구성된 19~21번 문항의 정답률은 순서대로 각각 88.43%, 74.54%, 47.69%이다. 19, 20번 문항의 정답률을 통하여 학생들이 상관관계의 강도와 자료의 전체적인 분포 사이의 관계는 대체적으로 잘 파악하고 있음을 알 수 있다. 그러나 21번 문항의 정답률이 50%에도 미치지 못한 것으로부터 학생들이 상관관계의 강도와 자료의 국소적인 분포 사이의 관계 파악에는 힘들어 하고 있음을 확인할 수 있다.

제시문에 묘사된 상황을 문항지의 여백에 산점도로 표현하는 전략을 사용하여 문제를 풀고자 한 학생들도 있었다. 이는 Moritz(2004)가 언급한, 공변동의 언어적 진술을 그래프 표현으로 변환하는 가상적 자료 생성을 시도한 것으로 [그림IV-1]은 19~21번 문항의 해결을 위해 가상적 자료 생성을 시도한 학생의 예를 보여주고 있다(이 학생의 경우, 20, 21번 문항의 정답을 잘 맞추었으나 19번 문항의 정답을 맞히는 데에는 실패하는 모습을 보였다).

3. 2×2 분할표

가. 서로 다른 두 그룹의 2×2 분할표를 보고 상관관계의 강도를 비교, 판단할 수 있는가?

4) 점들이 모여 군집의 형태를 나타내고 있는 것의 크기



[그림 IV-1] 가상적 자료 생성을 통해 제시문을 이해하려고 시도한 예

서로 다른 두 모집단에서 얻은 2×2 분할표를 보고 상관관계가 더 강하게 드러난 모집단을 물었던 22번 문항의 정답률은 77.31%이다. 22번의 정답자들의 대부분은 ‘영국이 성별에 따른 특정 종류의 차량 쏘림이 더 강하게 나타나므로’, ‘영국이 성별에 따른 차이가 더 뚜렷하므로’ 등을 그 선택의 이유로 들었다.

나. 2×2 분할표를 보고 상관관계 존재여부를 바르게 판단하고 올바른 판단근거를 제시할 수 있는가?

24~35번 문항은 6개의 2×2 분할표에 각기 제시된 두 질적 변량에 대한 연관성의 유무에 대하여 옳은 판단을 할 수 있는지를 조사하기 위하여 Batanero 외 3인(1996)을 참고 및 변형하여 설계된 문항들이다. 문항에 제시된 2×2 분할표의 모든 수치는 피셔의 정확검정(Fisher's exact test)에 의해 통계적 연관성이 검증된 수치들로, 문항 24, 26, 30, 34의 해당문항은 실제 두 변량의 연관성이 통계적으로 유의하였고, 28과 32의 문항은 통계적으로 유의하지 않은 문항이었다.

24번과 26번의 분할표는 모두 행과 열 사이에

연관성이 있는 상황으로, 두 문항의 차이점은 24번의 분할표는 원인이 되는 변량은 행에 해당하는 변량은 열에 적는 일반적인 형태인 데 비해 26번은 그 둘의 위치를 바꾸어 표기했다는 점이다. 두 문항의 정답률은 각각 75%, 68.52%이다. 24번 응답 이유를 물어본 25번의 응답결과를 살펴보면 24번에서 정답을 택한 학생 162명 중 156명(정답자의 약 96.30%, 전체의 약 72.22%)의 학생들은 ‘생활양식에 따른 피부 알러지 여부의 차이가 뚜렷하기 때문’이라고 대답하였고 3명은 ‘좌식생활이 피부 알러지를 일으키는 바이러스에 덜 노출될 것이다’라는 반응을 보여 주어진 자료가 아닌 자신의 선입견에 근거한 판단을 했음을 드러냈다. 26번의 선택 이유를 물었던 27번의 응답결과에서도 이러한 반응 형태를 확인할 수 있었다.

다음으로 행과 열 사이에 통계적 연관성이 없는 경우의 분할표가 주어진 28번과 32번의 정답률을 살펴보면 각각 35.19%, 57.41%으로 두 문항의 정답률에는 유의미한 차이가 있다($p < 0.0001$). 두 문항 모두 연관성이 없는 자료이지만 이 두 문항의 정답률이 크게 차이나는 이유는 학생들이 문제해결에 있어서 필요한 개념인 조건부 확

률의 개념을 이용하여 범주별 상대빈도수를 비교하지 않고 각 교차범주의 절대빈도수를 그대로 비교했기 때문으로 보인다. 정답률이 더 높은 32번의 경우 각 두 범주(남,여)의 조사대상의 크기가 같아서 절대빈도수를 비교하더라도 올바른 결론을 내릴 수 있었으나 28번은 두 범주(흡연자, 비흡연자)의 조사대상의 크기가 150명과 100으로 달랐기 때문에, 절대빈도를 비교한 학생들은 오답을 선택하였다. 그리고 28, 32번에서 정답을 선택한 학생 중 29, 33번에서 조건부 확률 및 상대빈도의 개념을 언급하며 그 이유를 정확하게 제시한 학생은 각각 전체의 15.74%(34명, 정답자의 44.74%), 6.02%(13명, 정답자의 10.48%)에 불과했다.

마지막으로 실제로 연관성이 있는 자료인 30번과 34번의 분할표에 대한 정답률은 각각 37.5%, 36.11%으로, 정답률이 오답인 ③번 보기를 선택한 학생의 비율과 거의 비슷하거나 오히려 높다는 점이다. 30번에서 ③번 보기(상관관계의 유무를 판단할 수 없다)를 선택한 대다수의 학생들은 31번 문항에서 그 선택의 이유로 ‘행(혹은 열)의 합계의 차이가 크기 때문’을 꼽았다. 즉, 각 범주별 합계의 차이가 너무 클 경우 절대빈도에 대한 비교가 무의미함을 알고는 있었으나, 이를 상대빈도수를 이용하여 비교할 수 있음을 알지는 못하였다. 역시, 34번에서 ③번 보기를 선택한 대다수의 학생들은 35번 문항에서 그 선택의 이유로 ‘조사 인원이 너무 적기 때문’, ‘두 그룹간 조사 인원의 수가 다르기 때문’등을 들며 상관관계의 판단을 할 수 없다고 답하였다. 34번 분할표의 총 조사수 합계는 75로 다른 문항에 비하여 적기는 하였으나 통계적 판단을 내리기에 충분한 수였음에도 불구하고, 절대 빈도수에서 그 차이가 많이 느껴지지 않으므로 인해 학생들이 판단을 유보하고 있음을 알 수 있었다.

V. 결론

이 연구에서는 우리나라 고등학생들의 상관관계 개념의 이해도를 산점도, 제시문, 분할표로 표현된 자료를 포함하는 문항을 중심으로 조사하였다. 분석결과에서 알 수 있듯이 총 25개의 선다형 및 진위형 문항 중 13개에 대해서는 70% 이상의 높은 정답률을 얻었지만, 8개 문항에 대해서는 50% 미만의 낮은 정답률에 그쳤다. 또한 정답을 맞힌 경우에도 그 이유를 서술한 응답을 분석한 결과 많은 경우 오개념을 가지고 있음을 알 수 있었다. 연구 결과로 부터 다음과 같은 몇 가지 결론을 도출 할 수 있었다.

첫째, 학생들은 산점도 상에 드러난 상관관계의 강도를 판단하는 올바른 근거를 갖고 있지 않았다. 대부분의 학생들은 주어진 산점도의 상관관계 유무와 방향성을 빠르게 판단할 수 있는 것으로 보였다. 하지만 학생들은 상관관계 강도를 상대적으로 비교할 수 있는 판단기준을 가지고 있지는 않은 것으로 드러났다. 학생들은 회귀직선을 기준으로 자료점의 직선에의 근접도를 판단하기 보다, 자료점들 사이의 시각적 밀집도나 회귀직선의 기울기등과 상관관계의 강도를 혼동하고 있었다. 이는 학생들이 상관관계에 대한 직관적이며 비형식적인 정의를 배울 때 두 변량 사이의 선형적 관계성의 의미가 제대로 지도되고 있지 않기 때문에, 산점도의 자료분포의 시각적 특성이 상관관계에 대한 학생들의 오개념을 유발하고 있음을 보여준다고 할 수 있다.

둘째, 상관관계의 강도와 관련된 서술이 실생활 맥락에서 제시문으로 주어지는 경우 학생들은 그 의미를 명확하게 이해하고 그로부터 자료의 분포적 특성을 파악하는 능력은 부족한 것으로 드러났다. 학생들은 산점도에 제시된 자료의 경우 강한 상관과 약한 상관을 어느 정도 비교

할 수 있었지만, 그 서술된 표현에 대해서는 취약함을 보였다. 학생들은 ‘상관관계가 더 강하다’라는 표현으로부터 가상적 자료구성을 시도하여 자료들의 국소적인 분포 특징을 파악하려는 노력을 거의 하지 않았다. 상관관계와 관련된 서술은 우리 주변의 각종 매체를 통하여 흔히 접할 수 있으며 각종 의사결정의 근거가 되는 자료로 활용되고 있다. 이는 학생들이 이러한 자료에 보다 더 익숙해지고 올바른 판단을 할 수 있도록 적절한 교육적 조치가 필요함을 시사한다.

셋째, 상당수의 학생들이 2×2 분할표에 제시된 자료를 보고 두 변량의 상관성을 판정할 때, 상대빈도 또는 조건부 확률에 대한 개념을 활용하지 못하고 있었다. 또한, 상관관계가 있는 두 변량의 분할표에 대해서도 범주간의 조사수 크기가 동일하지 않거나 총 조사수가 적다는 이유로 상관관계의 유무 판단을 할 수 없다고 생각하는 학생이 상당수 관찰되었다. 학생들이 상대빈도수를 토대로 비교하기보다 절대빈도수의 비교만을 고려하였고, 조사수의 크기가 달라 절대빈도수의 비교가 무의미하다는 옳은 판단을 한 경우에도 상대빈도수를 이용하여 비교를 시행할 것을 생각하지 못하였다. 또한 여러 선행연구에서 보고된 것과 같이 조사된 수치에 의한 상관관계의 판단을 내리기보다, 두 변량에 대한 개인적 선입견에 의해 판단을 내리는 경향도 많이 관찰되었고, 이것은 인과관계와 상관관계를 혼동하는 오개념에도 영향을 미쳤다. 2×2 분할표는 질적 범주형 자료를 요약하는 매우 단순한 표임에도 불구하고 고등학생들의 대부분이 간단한 상대도수의 비교에 의한 연관성 판정의 능력이 부재하다는 것은 상관관계와 관련된 기초적인 교육의 부재가 고등학생들의 기본적 통계적 소양의 부족을 가져오고 있음을 보여준다고 할 수 있다.

상관관계는 중요한 통계적 사고에 해당하고 또한 현대인의 기본적인 소양임에도 불구하고,

그 이론의 도출의 과정에 고급 통계학의 이론이 필요하다는 이유 때문에 형식적인 내용이 중등 교육과정에 포함되지 않으며, 또한 중학교 과정에 포함되어 오던 비형식적인 지도의 내용마저도 삭제된 상태이다. 이 연구에서 관찰한 대로 상관관계에 대한 비형식적인 학습을 한 학생들의 경우에도 많은 오개념을 가지고 있다고 한다면, 비형식적인 지도조차 받지 않는 우리나라 학생들의 통계적 소양은 크게 떨어지게 될 것을 예상할 수 있다. 따라서 중등 교육과정에서 상관관계를 포함한 현대인의 기본적인 소양이 되는 통계적 사고를 교육할 수 있는 방안에 대한 논의가 필요한 것으로 보인다.

참 고 문 헌

- 김미경 (2003). **중학교 3학년 상관관계 지도 내용 향상 방안에 관한 연구**. 이화여자대학교 석사학위 논문.
- 김영신 (2001). **초·중등학교 수학과 교육과정의 확률과 통계 지도 내용에 관한 연구**. 이화여자대학교 석사학위 논문.
- 김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭, 이상열, 이영주, 전종우, 조신섭 (2010). **일반통계학**. 서울: 영지문화사.
- 남궁근 (2010). **행정조사방법론**. 서울: 법문사.
- 성태제 (2011). **현대 기초통계학의 이해와 적용**. 서울: 교육과학사.
- 이경화 (2004). 상관관계의 교수학적 변환에 관한 연구. **학교수학**, 6(3), 251-266. 대한수학교육학회.
- Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority (2013). *Senior Secondary Curriculum*, www.australiancurriculum.edu.au.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green,

- D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Cleveland, W. S., Diaconis, P. & McGill, R. (1982). Variables on Scatterplots Look More Highly Correlated. *Science*, 216(4), 1138-1141.
- Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. P. E. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction*, 21(1), 1-78.
- Falk, R., & Well, A. D. (1997). The many faces of the correlation coefficient. *Journal of Statistics Education*, 5(3), 1-18.
- Gravemeijer, K. P. E. (2000). *A rationale for an instructional sequence for analyzing one- and two-dimensional data sets*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). Random variations and correlations. In B. Inhelder & J. Piaget, *The growth of logical thinking from childhood to adolescence* (A. Parsons & S. Milgram, Trans.) (224 - 242). London: Routledge & Kegan Paul.
- Jones, Graham A., Langrall, Cynthia W., Mooney, Edward S. & Carol A. Thornton (2004). Models of development in statistical reasoning. In D. Ben-Zvi & Garfield(Eds.), *The challenge of developing Statistical Literature, Reasoning, and Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- McKenzie, Danny L. & Padilla, Michael J. (1981). Patterns of Reasoning: Correlational Thinking. *Paper presented at the 54th Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching*. Ellenville, NY.
- Ministry of Education (2000). The Ontario Curriculum Grades 11 and 12. <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math1112curr.pdf>
- Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (95 - 137). Washington, DC: National Academy Press.
- Moritz, J. (2004). Reasoning about Covariation. In D. Ben-Zvi & Garfield(Eds.), *The challenge of developing Statistical Literature, Reasoning, and Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Pope, S (2013). Leaving Certificate Mathematics: a comparative analysis. http://www.ncca.ie/en/Curriculum_and_Assessment/Post-Primary_Education/Project_Maths/Information_on_Project_Maths/Information_on_Project_Maths.html
- Ross, J. A., & Cousins, J. B. (1993). Patterns of student growth in reasoning about correlational problems. *Journal of Educational Psychology*, 85(1), 49-65.
- Strahan, R. F. & Hansen, C. J. (1978). Underestimating correlation from scatterplots. *Applied Psychological Measurement*, 2(4), 543-550.
- Zieffler, Andrew S. & Garfield, Joan B. (2009). Modeling the Growth of Students' Covariational Reasoning During an Introductory Statistics Course. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 7-31.

Korean High School Students' Understanding of the Concept of Correlation

No, A Ra (Graduate School, Seoul National University)

Yoo, Yun Joo (Seoul National University)

Correlation is a basic statistical concept which is necessary for understanding the relationship between two variables when they change values. In the middle school curriculum of Korea, only informal definition of correlation is taught with two-way data representations such as scatter plots and contingency tables. In this study, we investigated Korean high school students' understanding of correlation using a test consisting of 35 items about interpretation of scatter plot, contingency table, and text in realistic situation. 216 students from a high school in Seoul took the test for 20 minutes.

From the results, we could observe the following:

First, students did not have right criteria for determining the strength of correlation presented in scatter plots. Most of students could determine if there is correlation/no correlation and if the correlation is positive/negative by seeing the data presented in scatter plots. However, they did not judge by the closeness to the regression line but rather judged by the closeness between data points.

Second, when statements about comparing the strength of correlation in the context of real life situation were given in text, the students had difficulty in understanding the distribution-related characteristic of the bi-variate data. Students had difficulty in figuring out the local distribution characteristic of data, which cannot be guessed merely based on the expression 'The correlation is strong' without statistical knowledge of correlation.

Third, a large number of students could not judge the association between two variables using conditional proportions when qualitative data are given in 2-by-2 tables. They made judgement by the absolute cell count and when the marginal sum of two categories are different for explanatory variable they thought the association could not be determined.

From these results, we concluded that educational measures are required in order to remove such misconceptions and to improve understanding of correlation. Considering that the current mathematics curriculum does not cover the concept of correlation, we need to improve the curriculum as well.

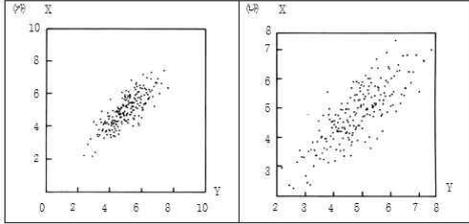
* Key Words : Correlation(상관관계), Covariational reasoning(공변동적 사고), Scatter plots(산점도), Contingency tables(분할표)

논문접수 : 2013. 9. 4

논문수정 : 2013. 11. 7

심사완료 : 2013. 11. 14

[10~11] 아래 산점도 (가)와 (나)는 동일한 두 변수 X와 Y 사이의 상관관계를 나타낸 것으로, (나)는 (가)의 일부를 확대하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여라.

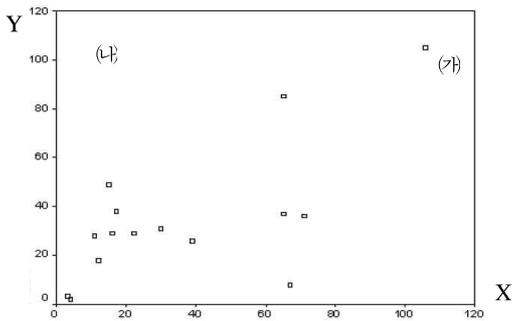


10. 위의 산점도 (가)와 (나) 중 상관관계가 더 큰 것은? ()

- ① (가) ② (나)
- ③ (가)와 (나)의 상관관계의 크기는 동일하다.

11. 위 10번에서 그렇게 대답한 이유는 무엇인가? 이유 : ()

[12~13] 다음 상관도를 보고 밑줄에 들어갈 말로 가장 적합한 것을 골라라.



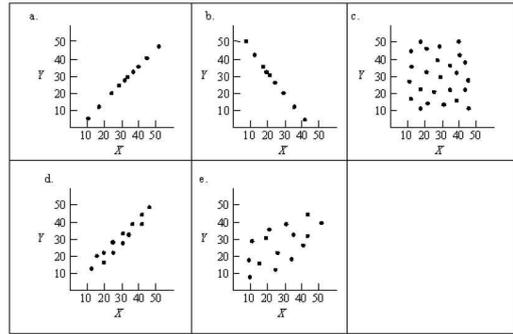
12. 만약 위 산점도에서 (가)의 점을 지운다면, X와 Y사이의 상관관계는 _____ .

- ① 강해진다 ② 약해진다
- ③ 변하지 않는다

13. 만약 위 산점도에서 (나)의 위치에 점을 추가한다면 X와 Y사이의 상관관계는 _____ .

- ① 강해진다 ② 약해진다
- ③ 변하지 않는다

[14~18] 다음 a~e의 산점도를 보고 밑줄에 들어갈 말로 가장 적합한 것을 골라라.



14. 산점도 a와 b 중에서 두 변수 X와 Y 사이의 상관관계는 _____ .

- ① a가 더 강하다. ② b가 더 강하다.
- ③ a와 b가 거의 동일하다.

15. 산점도 a와 d 중에서 두 변수 X와 Y 사이의 상관관계는 _____ .

- ① a가 더 강하다. ② d가 더 강하다.
- ③ a와 d가 거의 동일하다.

16. 산점도 b와 d 중에서 두 변수 X와 Y 사이의 상관관계는 _____ .

- ① b가 더 강하다. ② d가 더 강하다.
- ③ b와 d가 거의 동일하다.

17. 산점도 c와 e 중에서 두 변수 X와 Y 사이의 상관관계는 _____ .

- ① c가 더 강하다. ② e가 더 강하다.
- ③ c와 e가 거의 동일하다.

18. 산점도 d와 e 중에서 두 변수 X와 Y 사이의 상관관계는 _____ .

- ① d가 더 강하다. ② e가 더 강하다.
- ③ d와 e가 거의 동일하다.

27. 위 26번에서 그렇게 대답한 이유는 무엇인가?
이유 : ()

[28~29] 다음 표는 한 건강 검진 센터에서 250명의 성인을 대상으로 흡연여부와 기관지 질환에 대한 조사를 실시한 결과이다. 표를 보고 다음 물음에 답하여라.

흡연여부와 기관지 질환의 유무	기관지 질환 있음	기관지 질환 없음	합계
	흡연자	90	
비흡연자	60	40	100
합계	150	100	250

28. 위 표에 포함된 정보를 근거로 할 때, 흡연여부와 기관지 질환 유무 사이에는 상관관계가 있다고 볼 수 있는가? ()

- ① 상관관계가 있다. ② 상관관계가 없다.
③ 상관관계의 유무를 판단할 수 없다.

29. 위 28번에서 그렇게 대답한 이유는 무엇인가?
이유 : ()

[30~31] 원료의 종류에 따라 제품의 합격, 불합격품 수가 차이가 있는가를 알아보기 위하여 일본산 원료로 185개, 국산 원료로 83개의 제품을 만들었을 때 각각 합격, 불합격 제품의 수를 조사한 자료이다.

원료에 따른 합격/불합격 여부	합격품	불합격품	합계
일본산 원료	127	58	185
국산 원료	68	15	83
합계	195	73	268

30. 위 표에 포함된 정보를 근거로 할 때, 원료에 따른 제품의 합격, 불합격품 수 사이에는 상

관관계가 있다고 볼 수 있는가? ()

- ① 상관관계가 있다. ② 상관관계가 없다.
③ 상관관계의 유무를 판단할 수 없다.

31. 위 30번에서 그렇게 대답한 이유는 무엇인가?
이유 : ()

[32~33] 성별에 따른 자동차 색의 선호도를 알아보고자 남녀 각 115명을 대상으로 조사한 결과가 다음 표와 같다. 표를 보고 다음 물음에 답하여라.

성별에 따른 자동차색 선호도 조사	자주색	푸른색	합계
남자	42	73	115
여자	44	71	115
합계	86	144	230

32. 위 표에 포함된 정보를 근거로 할 때, 성별과 선호하는 자동차 색 사이에는 상관관계가 있다고 볼 수 있는가? ()

- ① 상관관계가 있다. ② 상관관계가 없다.
③ 상관관계의 유무를 판단할 수 없다.

33. 위 32번에서 그렇게 대답한 이유는 무엇인가?
이유 : ()

[34~35] 지역구별 외제차와 국산차 선호도를 조사한 결과가 아래 표와 같을 때, 물음에 답하여라.

지역구에 따른 외제차와 국산차 선호도를 조사	외제차	국산차	합계
강남구	27	24	51
강북구	21	3	24
합계	48	27	75

