

오목 음향 공동의 고정밀도 고유치 해석을 위한 새로운 MNDIF법 정식 개발

New Formulation of MNDIF Method for Accurate Eigenvalue Analysis of Concave Acoustic Cavities

강 상 옥[†]
S. W. Kang

(Received September 23, 2013 ; Revised November 12, 2013 ; Accepted November 12, 2013)

Key Words : Concave Acoustic Cavity(오목 음향 공동), Eigenvalue(고유치), MNDIF Method(개선된 무차원 동영향 함수법), Normal Direction(법선 방향), Helmholtz Equation(헬름홀츠 방정식)

ABSTRACT

A new formulation of the MNDIF method is introduced to extract highly accurate eigenvalues of concave acoustic cavities. Since the MNDIF method, which was introduced by the author, can be applicable for only convex acoustic cavities, a new approach of dividing a concave cavity into two convex domains and formulating an algebraic eigenvalue problem is proposed in the paper. A system matrix equation, which gives eigenvalues, is obtained from boundary conditions for each domain and the condition of continuity in the interface between the two domains. The validity and accuracy of the proposed method are shown through example studies.

1. 서 론

저자는 임의 형상 음향 공동의 고유치와 고유모드를 정확히 구하기 위한 방법으로 NDIF법(non-dimensional dynamic influence function method)을 2000년 처음으로 개발 하였다⁽¹⁾. 그리고 최근에 오목 형상 음향 공동에 대해서 해의 정밀도가 많이 떨어지는 NDIF법의 단점을 극복하기 위해, 분할영역법 기반 NDIF법을 새로이 제안하였다⁽²⁾.

NDIF법은 유한요소법⁽³⁾과 경계요소법⁽⁴⁾에 비해해의 정밀도면에서 탁월한 우수성을 가지고 있음이 저자의 선행연구에서 증명되었다^(1,2). 그러나, NDIF법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 최종 시스

템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 단점을 가진다. 결과적으로 최종 시스템 행렬식은 대수 고유치 문제(algebraic eigenvalue problem)의 형태를 가지지 못하게 되어서, 시스템 행렬로부터 고유치와 고유모드를 추출하는 과정이 매우 번거롭게 된다^(1,2).

저자는 이러한 문제점을 해결하기 위해, 최근에 기존 NDIF법 이론을 개선하여 임의 형상 음향 공동의 고유치와 고유모드를 수월하게 추출할 수 있는 개선된 NDIF법인 MNDIF법(modified NDIF method)을 개발하였다⁽⁵⁾. 그러나 새로이 개발된 MNDIF법은 볼록 형상의 음향 공동에만 적용 가능한 한계를 가지고 있다. 이 논문에서는 볼록 형상 음향 공동에 대한 MNDIF법 연구 결과⁽⁵⁾와 오목 형상 평판에 대한 MNDIF법 연구 결과⁽⁶⁾를 응용/확장하여, 오

[†] Corresponding Author ; Member, Dept. of Mechanical System Engineering, Hansung University
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : +82-2-760-4228, Fax : +82-2-760-4329

[‡] Recommended by Editor Hyung-Jo Jung

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

목형상 음향 공동을 두 개의 볼록 영역으로 분할하는 방법에 의해, 오목형상 음향 공동 고유치 문제를 대수 고유치 문제의 형태로 정식화해서 고정밀도 고유치를 구하는 새로운 MNDIF법 정식을 정립하고자 한다. 보다 일반적인 임의의 형상을 가진 오목형상 음향 공동을 3개 이상의 볼록 영역으로 분할하여 해석을 수행하는 연구는 향후 진행될 예정이다.

2. 이론 정식화

2.1 MNDIF법 리뷰

Fig. 1에서 실선은 강체벽(rigid wall) 경계조건을 가진 2차원 음향 공동의 경계(Γ)를 보여준다. 음향 공동의 지배방정식은 식 (1a)와 같은 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)으로 나타내어진다⁽¹⁾.

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + \Lambda^2 p(\mathbf{r}) = 0, \tag{1a}$$

여기서 \mathbf{r} 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에 대한 위치벡터를 의미하고, $p(\mathbf{r})$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에서의 음압(sound pressure)을 나타내며, Λ 는 주파수 파라미터이다. 그리고 강체벽 음향 공동의 경계 Γ 에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_\Gamma)}{\partial n} = 0, \tag{1b}$$

여기서 \mathbf{r}_Γ 는 음향 공동 경계 상의 한 점에 대한 위치벡터이며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

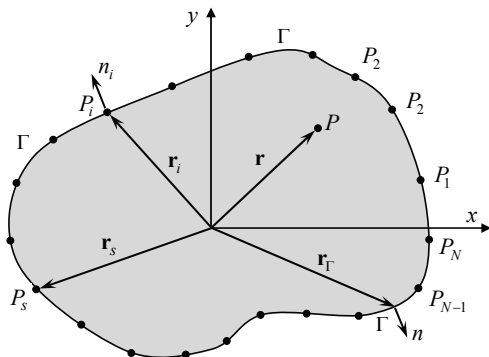


Fig. 1 Arbitrarily shaped, 2-D acoustic cavity discretized with boundary nodes P_1, P_2, \dots, P_N

MNDIF법을 적용하기 위하여 Fig. 1과 같이 음향 공동의 경계는 N 개의 노드들 P_1, P_2, \dots, P_N 으로 이산화 된다. 그리고 음향 공동 내부 음압 $p(\mathbf{r})$ 은 경계 노드들에서 정의된 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정된다⁽⁵⁾.

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^N A_s J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) \tag{2}$$

여기서 J_0 는 제1종 0차 베셀 함수를 나타내며, A_s 는 기여도 계수이고, \mathbf{r}_s 는 경계 Γ 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터를 의미한다.

2.2 경계조건을 고려한 시스템 행렬

Fig. 2는 오목형상을 가진 해석 대상 음향 공동을 보여 준다. 기존 MNDIF법⁽⁵⁾은 이러한 오목형상에 대해서는 정확한 해를 제공하지 않기 때문에, 이 논문에서는 이러한 오목형상 음향 공동을 2개의 볼록 영역 D_I 과 D_{II} 로 분할하여 각각의 영역에 대해 MNDIF법을 적용하는 방안을 시도한다. 영역 D_I 의 경계 Γ_I 과 접경 Γ_a 는 각각 노드 $P_1^{(I)}, P_2^{(I)}, \dots, P_{N_1}^{(I)}$ 와 $P_1^{(a)}, P_2^{(a)}, \dots, P_{N_a}^{(a)}$ 로 이산화된 후, 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 음압은 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정된다^(1,5).

$$p_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_I} A_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \tag{3}$$

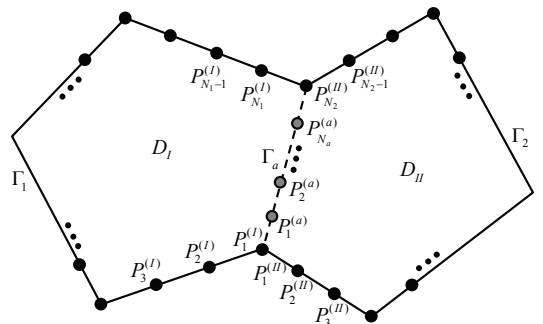


Fig. 2 Concave acoustic cavity divided with 2 convex domains

여기서 A_s 와 $A_k^{(a)}$ 는 기여도 계수이고, $\mathbf{r}^{(l)}$ 는 영역 D_l 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내며, $\mathbf{r}_s^{(l)}$ 와 $\mathbf{r}_k^{(a)}$ 는 경계 Γ_1 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터와 접경 Γ_a 에 위치한 k 번째 노드에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다. 참고로 N_1 과 N_a 는 영역 D_l 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다.

가정된 음압 식 (3)은 지배방정식 식 (1a)를 만족하므로, 경계조건 식 (1b)를 식 (3)에 적용하는 방법에 의해 음압을 구하고자 한다. 영역 D_l 의 경계 Γ_1 은 경계조건 식(1b)를 만족해야 하므로, 경계 Γ_1 위에 놓인 노드들은 다음과 같은 강제벽 경계조건을 만족한다.

$$\frac{\partial p_l(\mathbf{r}_i^{(l)})}{\partial n_i^{(l)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \tag{4}$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(l)}$ 와 $n_i^{(l)}$ 는 경계 Γ_1 위의 i 번째 노드의 위치벡터와 법선 방향을 각각 의미한다.

음압 식 (3)을 경계 조건 식 (4)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) = 0, \tag{5}$$

$i = 1, 2, \dots, N_1.$

식 (5)에 있는 법선 방향 미분을 수행하면,

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s \Lambda J_1(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|) \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}| + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \Lambda J_1(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}| = 0 \tag{6}$$

여기서 J_1 은 제 1종 1차 베셀 함수를 의미한다.

이제 식 (6)에 있는 베셀 함수 J_1 에서 주파수 파라미터 Λ 를 분리해내기 위해, 베셀 함수는 다음과 같이 M 개의 테일러 급수 전개⁽⁷⁾에 의해 근사화된다.

$$J_1(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}, \tag{7}$$

$$= \sum_{j=0}^M \Lambda^{1+2j} \varphi_j^{(l)}(i, s)$$

$$J_1(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}, \tag{8}$$

$$= \sum_{j=0}^M \Lambda^{1+2j} \varphi_j^{(la)}(i, k)$$

여기서 $\varphi_j^{(l)}(i, s)$ 와 $\varphi_j^{(la)}(i, k)$ 는 다음과 같다.

$$\varphi_j^{(l)}(i, s) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}, \tag{9}$$

$$\varphi_j^{(la)}(i, k) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}. \tag{10}$$

식 (7)과 식 (8)을 식 (6)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s \Lambda \sum_{j=0}^M \Lambda^{1+2j} \varphi_j^{(l)}(i, s) \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}| + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \Lambda \sum_{j=0}^M \Lambda^{1+2j} \varphi_j^{(la)}(i, k) \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}| = 0 \tag{11}$$

$i = 1, 2, \dots, N_1.$

식 (11)에서 서메이션(summation) 기호의 순서를 바꾸어서 다음과 같이 정리한다.

$$\sum_{j=0}^M \Lambda^{2(1+j)} \sum_{s=1}^{N_1} A_s \varphi_j^{(l)}(i, s) \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}| + \sum_{j=0}^M \Lambda^{2(1+j)} \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \varphi_j^{(la)}(i, k) \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} |\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}| = 0 \tag{12}$$

$i = 1, 2, \dots, N_1.$

식 (12)를 한번 더 간단히 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{j=0}^M \lambda^{(1+j)} \sum_{s=1}^{N_1} A_s \psi_j^{(I)}(i, s) + \sum_{j=0}^M \lambda^{(1+j)} \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \psi_j^{(Ia)}(i, k) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1. \tag{13}$$

여기서 $\lambda = \Lambda^2$ 이며 $\psi_j^{(I)}(i, s)$ 와 $\psi_j^{(Ia)}(i, k)$ 는 다음과 같다.

$$\psi_j^{(I)}(i, s) = \varphi_j^{(I)}(i, s) \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|, \tag{14}$$

$$\psi_j^{(Ia)}(i, k) = \varphi_j^{(Ia)}(i, k) \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|. \tag{15}$$

식 (13)에서 λ 를 맨 앞으로 묶어내면,

$$\lambda \left[\sum_{j=0}^M \lambda^j \sum_{s=1}^{N_1} A_s \psi_j^{(I)}(i, s) + \sum_{j=0}^M \lambda^j \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \psi_j^{(Ia)}(i, k) \right] = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1. \tag{16}$$

다음으로, 식 (16)에서 맨 앞의 λ 를 소거한 후, λ 에 대한 다항식의 형태로 다음과 같이 재배치한다.

$$\lambda^0 \sum_{s=1}^{N_1} A_s \psi_0^{(I)}(i, s) + \lambda^1 \sum_{s=1}^{N_1} A_s \psi_1^{(I)}(i, s) + \dots + \lambda^M \sum_{k=1}^{N_a} A_s \psi_M^{(I)}(i, s) + \lambda^0 \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \psi_0^{(Ia)}(i, k) + \lambda^1 \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \psi_1^{(Ia)}(i, k) + \dots + \lambda^M \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \psi_M^{(Ia)}(i, k) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1. \tag{17}$$

마지막으로, 식 (17)을 행렬식의 형태로 표현하면, 영역 D_I 에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \Psi_0^{(I)} + \lambda^1 \Psi_1^{(I)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(I)}) \mathbf{A} + (\lambda^0 \Psi_0^{(Ia)} + \lambda^1 \Psi_1^{(Ia)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(Ia)}) \mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{0}' \tag{18}$$

여기서, 크기 $N_1 \times N_1$ 인 행렬 $\Psi_j^{(I)}$ 의 i 번째 행과 s 번째 열에 위치한 성분은 식 (14)에 의해 주어지며, 크기 $N_1 \times N_a$ 인 행렬 $\Psi_j^{(Ia)}$ 의 i 번째 행과 k 번째 열에 위치한 성분은 식 (15)에 의해 주어진다. 그리고 식 (18)에서 기여도 벡터 \mathbf{A} 와 $\mathbf{A}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_{N_1}\}^T, \tag{19}$$

$$\mathbf{A}^{(a)} = \{A_1^{(a)} \quad A_2^{(a)} \quad \dots \quad A_{N_a}^{(a)}\}^T, \tag{20}$$

여기서 $\{\dots\}^T$ 는 전치 행렬(transpose matrix)을 의미한다.

마찬가지 방법으로, Fig. 2에서 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 음압을 경계 Γ_2 과 접경 Γ_a 에 놓인 노드들에 대한 무차원 동역학 함수들의 선형 결합으로 식 (21)과 같이 가정한다.

$$p_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) = \sum_{s=1}^{N_2} B_s J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|) + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \tag{21}$$

여기서 B_s 와 $B_k^{(a)}$ 는 기여도 계수이며, $\mathbf{r}^{(II)}$ 는 영역 D_{II} 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내고 $\mathbf{r}_s^{(II)}$ 는 경계 Γ_2 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터를 나타낸다. 참고로 N_2 는 영역 D_{II} 의 경계 Γ_2 위에 놓여진 노드의 개수를 나타낸다. 다음으로 경계 Γ_2 에 놓인 노드들에서의 음압은 식 (22)와 같은 강체벽 경계조건을 만족한다.

$$\frac{\partial p_{II}(\mathbf{r}_i^{(II)})}{\partial n_i^{(II)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \tag{22}$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(II)}$ 와 $n_i^{(II)}$ 는 경계 Γ_2 위의 i 번째 노드의 위치벡터와 법선 방향을 각각 의미한다.

식 (21)을 식 (22)에 대입한 후, 영역 D_I 에 대해 수행한 식 (5~20)의 과정을 수행하면, 영역 D_{II} 에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \Psi_0^{(II)} + \lambda^1 \Psi_1^{(II)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(II)})\mathbf{B} + (\lambda^0 \Psi_0^{(IIa)} + \lambda^1 \Psi_1^{(IIa)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(IIa)})\mathbf{B}^{(a)} = \mathbf{0}^T \tag{23}$$

여기서 행렬 $\Psi_j^{(II)}$ 와 $\Psi_j^{(IIa)}$ 의 크기는 각각 $N_2 \times N_2$ 와 $N_2 \times N_a$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식 (24)와 식 (25)에 의해 각각 주어지며,

$$\psi_j^{(II)}(i, s) = \varphi_j^{(II)}(i, s) \frac{\partial}{\partial n_i^{(II)}} \left| \mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|, \tag{24}$$

$$\psi_j^{(IIa)}(i, k) = \varphi_j^{(IIa)}(i, k) \frac{\partial}{\partial n_i^{(II)}} \left| \mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|, \tag{25}$$

여기서 $\varphi_j^{(II)}(i, s)$ 와 $\varphi_j^{(IIa)}(i, k)$ 는 식 (9), (10)에 의해 각각 주어진다. 기여도 벡터 \mathbf{B} 와 $\mathbf{B}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \{B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{N_2}\}^T, \tag{26}$$

$$\mathbf{B}^{(a)} = \{B_1^{(a)} \quad B_2^{(a)} \quad \dots \quad B_{N_a}^{(a)}\}^T. \tag{27}$$

2.3 연속 조건을 고려한 시스템 행렬

영역 D_I 와 D_{II} 의 접경 Γ_a 에서 음압과 음압의 기울기가 같다는 연속 조건⁽⁸⁾을 고려한다. 접경 Γ_a 에 위치한 노드들에서의 음압 연속 조건과 음압의 기울기 연속 조건은 식 (28), (29)와 같이 각각 표현될 수 있다.

$$p_I(\mathbf{r}_i^{(a)}) = p_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)}), i = 1, 2, \dots, N_a, \tag{28}$$

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i^{(a)}} = \frac{\partial p_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i^{(a)}}, i = 1, 2, \dots, N_a, \tag{29}$$

여기서 $n_i^{(a)}$ 는 접경 위에 놓인 i 번째 노드에서의 법선 방향을 의미한다.

이제 두 영역에서의 음압 식 (3)과 식 (21)을 음압 연속 조건 식 (28)에 대입한 후, 영역 D_I 에 대

해 수행한 식 (5~20)의 과정을 수행하면, 음압 연속 조건에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \Phi_0^{(aI)} + \lambda^1 \Phi_1^{(aI)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(aI)})\mathbf{A} + (\lambda^0 \Phi_0^{(a)} + \lambda^1 \Phi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(a)})\mathbf{A}^{(a)} = (\lambda^0 \Phi_0^{(aII)} + \lambda^1 \Phi_1^{(aII)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(aII)})\mathbf{B} + (\lambda^0 \Phi_0^{(a)} + \lambda^1 \Phi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(a)})\mathbf{B}^{(a)} \tag{30}$$

여기서 행렬 $\Phi_j^{(aI)}$, $\Phi_j^{(a)}$, $\Phi_j^{(aII)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1$, $N_a \times N_a$, $N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분 $\phi_j^{(aI)}(i, s)$, $\phi_j^{(a)}(i, k)$, $\phi_j^{(aII)}(i, s)$ 는 식 (31)~(33)에 의해 각각 주어진다.

$$\phi_j^{(aI)}(i, s) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right| / 2 \right)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}, \tag{31}$$

$$\phi_j^{(a)}(i, k) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right| / 2 \right)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}, \tag{32}$$

$$\phi_j^{(aII)}(i, s) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right| / 2 \right)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}. \tag{33}$$

다음으로 두 영역의 음압 식 (3)과 식 (21)을 기울기 연속 조건 식 (29)에 대입한 후, 영역 D_I 에 대해 수행한 식 (5~20)의 과정을 수행하면, 음압 기울기 연속 조건에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \Psi_0^{(aI)} + \lambda^1 \Psi_1^{(aI)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(aI)})\mathbf{A} + (\lambda^0 \Psi_0^{(a)} + \lambda^1 \Psi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(a)})\mathbf{A}^{(a)} = (\lambda^0 \Psi_0^{(aII)} + \lambda^1 \Psi_1^{(aII)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(aII)})\mathbf{B} + (\lambda^0 \Psi_0^{(a)} + \lambda^1 \Psi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(a)})\mathbf{B}^{(a)} \tag{34}$$

여기서 $\Psi_j^{(aI)}$, $\Psi_j^{(a)}$, $\Psi_j^{(aII)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1$, $N_a \times N_a$, $N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분 $\psi_j^{(aI)}(i, s)$, $\psi_j^{(a)}(i, k)$, $\psi_j^{(aII)}(i, s)$ 는 식 (35~37)에 의해 각각 주어진다.

$$\psi_j^{(aI)}(i, s) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right| / 2 \right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right| \right)}{\partial n_i}, \tag{35}$$

$$\psi_j^{(a)}(i, k) = \frac{(-1)^j \left(|\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)}| / 2 \right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|}{\partial n_i}, \tag{36}$$

$$\psi_j^{(all)}(i, s) = \frac{(-1)^j \left(|\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(ll)}| / 2 \right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(ll)} \right|}{\partial n_i}. \tag{37}$$

2.4 고유치 문제로의 정식화

2.2절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식(18)과 식(23) 및 2.3절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식(30)과 식(34)를 모두 연결하여 하나의 행렬식으로 나타내면, 다음과 같은 고차 다항 고유치 문제 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \lambda^0 \begin{bmatrix} \Psi_0^{(l)} & \Psi_0^{(la)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_0^{(ll)} & \Psi_0^{(lla)} \\ \Phi_0^{(al)} & \Phi_0^{(a)} & -\Phi_0^{(all)} & -\Phi_0^{(a)} \\ \Psi_0^{(al)} & \Psi_0^{(a)} & -\Psi_0^{(all)} & -\Psi_0^{(a)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{Bmatrix} \\ & + \lambda^1 \begin{bmatrix} \Psi_1^{(l)} & \Psi_1^{(la)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1^{(ll)} & \Psi_1^{(lla)} \\ \Phi_1^{(al)} & \Phi_1^{(a)} & -\Phi_1^{(all)} & -\Phi_1^{(a)} \\ \Psi_1^{(al)} & \Psi_1^{(a)} & -\Psi_1^{(all)} & -\Psi_1^{(a)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{Bmatrix} \\ & + \dots \\ & + \lambda^M \begin{bmatrix} \Psi_M^{(l)} & \Psi_M^{(la)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_M^{(ll)} & \Psi_M^{(lla)} \\ \Phi_M^{(al)} & \Phi_M^{(a)} & -\Phi_M^{(all)} & -\Phi_M^{(a)} \\ \Psi_M^{(al)} & \Psi_M^{(a)} & -\Psi_M^{(all)} & -\Psi_M^{(a)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

다음으로, 위 식을 다음과 같이 간단한 형태로 표현한다.

$$\lambda^0 \mathbf{SM}_0 \mathbf{C} + \lambda^1 \mathbf{SM}_1 \mathbf{C} + \dots + \lambda^M \mathbf{SM}_M \mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{39}$$

여기서

$$\mathbf{SM}_j = \begin{bmatrix} \Psi_j^{(l)} & \Psi_j^{(la)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_j^{(ll)} & \Psi_j^{(lla)} \\ \Phi_j^{(al)} & \Phi_j^{(a)} & -\Phi_j^{(all)} & -\Phi_j^{(a)} \\ \Psi_j^{(al)} & \Psi_j^{(a)} & -\Psi_j^{(all)} & -\Psi_j^{(a)} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{A} \quad \mathbf{A}^{(a)} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{B}^{(a)} \right\}^T. \tag{41}$$

λ 에 대한 고차 다항 행렬식 식(39)는 다음과 같이 선형화될 수 있다⁽⁹⁾.

$$\mathbf{SM}_L \mathbf{D} = \lambda \mathbf{SM}_R \mathbf{D}, \tag{42}$$

여기서 시스템 행렬 \mathbf{SM}_L 과 \mathbf{SM}_R 그리고 기여도 벡터 \mathbf{D} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} \\ -\mathbf{SM}_0 & -\mathbf{SM}_1 & -\mathbf{SM}_2 & \dots & -\mathbf{SM}_{M-1} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$\mathbf{SM}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_M \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{C}^T \quad \lambda \mathbf{C}^T \quad \lambda^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad \lambda^{M-1} \mathbf{C}^T \right\}. \tag{45}$$

마지막으로 식(42)는 다음과 같이 변경된다.

$$\mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L \mathbf{D} = \lambda \mathbf{D}. \tag{46}$$

식(46)을 다시 작성하면, 다음과 같이 대수 고유치 문제로 정식화된 최종 시스템 행렬식을 얻을 수 있다⁽⁶⁾.

$$\mathbf{SM} \mathbf{D} = \lambda \mathbf{D}, \tag{47}$$

여기서

$$\mathbf{SM} = \mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L. \tag{48}$$

식(47)의 고유치 문제를 푸는 방법에 의해 구한 고유치 λ 를 $\Lambda = \sqrt{\lambda}$ 에 대입하여 Λ 를 계산하는 방식에 의해 음향 공동의 고유치를 구할 수 있다.

3. 검증 예제

이 논문에서 제안된 방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해, 엄밀해가 존재하는 직사각형 공동과 엄밀해가 존재하지 않는 오목 사각 공동에 대해 제안된 방법을 적용하였다.

3.1 직사각형 음향 공동

Fig. 3과 같이 엄밀해가 존재하는 직사각형 2차원 음향 공동(가로 1.2 m, 세로 0.9 m)을 두 영역 D_I 과 D_{II} 로 분할한 후, 두 영역의 경계 및 접경에 총 25개의 노드($N_I = N_{II} = 11, N_a = 3$)를 배치하여 해석을 수행하였다. 그 결과는 Table 1에 제시되었다. 참고로, Fig. 3의 노드 $P_{10}^{(I)}$ 과 같은 코너 노드에서의 법선 방향은 $n_{10}^{(I)}$ 과 같이 코너의 양 변 법선 방향의 평균값으로 결정하였다.

Table 1에서 제안된 방법(proposed method)에 의해 구해진 고유치들은 엄밀해(exact solution)⁽¹⁰⁾와 아주 잘 일치함을 확인할 수 있다. 여기서 M 은 테일러 급수 전개 항의 개수이다. 첫 번째부터 다섯 번째 고유치까지는 엄밀해와 오차 없이 완전히 일치함을 확인할 수 있으며, 여섯 번째 고유치의 경우 0.04%의 매우 작은 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 참고로 여섯 번째 고유치에 대한 이러한 오차는 노드 수를 증가시킬 경우 더 작아짐을 확인하였다. 반면에 2500개의 많은 노드를 사용한 FEM(ANSYS) 해석 결과는 제안된 방법에 비해 더 큰 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 결과적으로 이 논문에서 제안된 방법은 FEM에 비해 적은 노드(적은 수치 해석 계산 량)를 사용함에도 불구하고 엄밀해와 거의 오차가 없는 매우 정밀한 고유치 해석 결과를 제공한다 고 결론지을 수 있다.

3.2 노치를 가진 오목 직사각형 음향 공동

이 예제에서는 Fig. 4와 같이 깊이 0.2 m의 노치(notch)를 가진 오목 직사각형 공동(가로 1.2 m, 세로 0.9 m)이 고려된다. Fig. 4와 같이 먼저 영역을 분할하지 않고 기존 MNDIF법을 적용하였다. 20개의 경계 노드를 사용하여 해석하였으며, 그 결과는 Table 2에 제시되었다. 참고로 Fig. 4에서 코너 노드

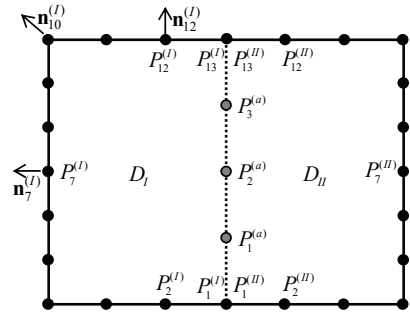


Fig. 3 Rectangular acoustic cavity divided with 2 domains($n_7^{(I)}, n_{10}^{(I)}$ and $n_{12}^{(I)}$ denote the normal directions at the corresponding nodes)

Table 1 Eigenvalues of the rectangular acoustic cavity by the proposed method, the exact solution, and FEM(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by the exact solution)

	Proposed method (25 nodes, $M=15$)	Exact solution ⁽¹⁰⁾	FEM(ANSYS) (2500 nodes)
1	2.618 (0.00)	2.618	2.618 (0.00)
2	3.491 (0.00)	3.491	3.492 (0.03)
3	4.363 (0.00)	4.363	4.364 (0.02)
4	5.236 (0.00)	5.236	5.238 (0.04)
5	6.293 (0.00)	6.293	6.295(0.03)
6	6.978 (0.04)	6.981	6.989(0.11)

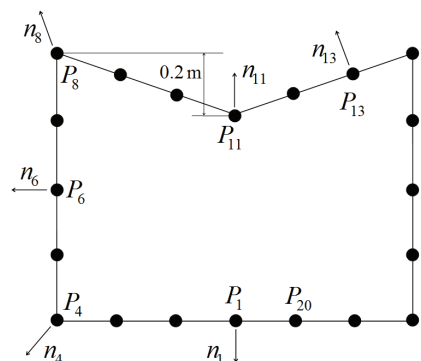


Fig. 4 Concave rectangular acoustic cavity with a notch

에 대한 법선 방향 n_4, n_8, n_{11} 은 3.1결과 마찬가지로 방법으로 평균 법선방향에 의해 결정되었다.

Table 2 Eigenvalues of the concave rectangular acoustic cavity with a notch by the proposed method and FEM(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by FEM)

	1	2	3	4	5
MNDIF method ($M=15$)	2.374 (3.34)	3.152 (18.2)	4.453 (0.79)	5.763 (9.48)	6.382 (2.88)
FEM (2806 nodes)	2.456	3.856	4.418	5.264	6.571

Table 3 Eigenvalues of the concave rectangular acoustic cavity with a notch by the proposed method and FEM(parenthesized values denote errors (%) with respect to the values by FEM)

	1	2	3	4	5
Proposed method ($M=15$)	2.487 (1.26)	3.890 (0.88)	4.427 (0.20)	5.231 (0.63)	6.441 (1.98)
FEM (2806 nodes)	2.456	3.856	4.418	5.264	6.571

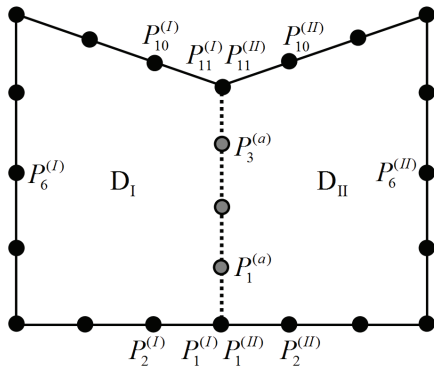


Fig. 5 Concave rectangular acoustic cavity with a notch divided with two convex domains

Table 2에서 기존 MNDIF법으로 구해진 고유치 결과들을 FEM(ANSYS) 결과와 비교해보면, 오차가 매우 큼을 확인할 수 있으며, 특히 두 번째 고유치의 경우 18.2%의 가장 큰 오차가 발생함을 확인할 수 있다. 이러한 기존 MNDIF법의 부정확성을 극복하기 위해 Fig. 5와 같이 해석 대상 공동을 두 개의 블록 영역으로 분할하는 제안된 방법(proposed method)을 적용하였다. 그 결과는 Table 3에 제시되었다.

Table 3에서 알 수 있듯이, 단지 25개의 노드($N_1=N_2=11, N_a=3$)를 사용하여 제안된 방법(proposed method)에 의해 구해진 고유치 결과들은 2806개의 많은 노드를 사용한 FEM(ANSYS)에 구한 결과와 2% 이내의 작은 오차를 가지는 것으로 확인된다. 특히, 첫 번째와 다섯 번째 고유치 결과가 상대적으로 큰 오차를 가지는 것으로 확인되는데, 이러한 오차는 노드의 개수를 증가시켜서 해석해 본 결과 오차가 줄어들음을 확인하였다.

제안된 방법을 사용한 Table 3의 결과를 기존 MNDIF법을 사용한 Table 2의 결과와 비교해볼 때, 오차가 확연히 개선되었음을 알 수 있다.

4. 결 론

기존 MNDIF법이 오목 형상 음향 공동에 대해 정확한 결과를 제공하지 못하는 단점을 극복하기 위해, 해석 대상 음향 공동을 두 개의 블록 영역으로 분할하는 방법에 의해 보다 정확한 고유치를 얻을 수 있는 MNDIF법 정식을 새로이 정립하였다. 또한, 두 가지 예제 연구를 통해 이 논문에서 제안된 정식의 타당함과 정확함을 증명하였다. 향후에는 해석 대상 음향 공동을 3개 이상의 영역으로 분할하여, 보다 복잡한 형상을 가지는 오목 음향 공동을 해석할 수 있는 방안에 대한 연구가 수행될 예정이다.

후 기

이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원과제이다.

References

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.
 (2) Kang, S. W. and Yon, J. I., 2012, Development

of a Modified NDIF Method for Extracting Highly Accurate Eigenvalues of Arbitrarily Shaped Acoustic cavities, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 22, No. 8, pp. 742~747.

(3) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.

(4) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New York.

(5) Kang, S. W. and Yon, J. I., 2011, Development of an Improved NDIF Method for Efficiently Extracting Eigenvalues and Eigenmodes of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 10, pp. 960~966.

(6) Kang, S. W. and Yon, J. I., 2013, New Formulation of MNDIF Method for Extracting Accurate Natural Frequencies of Plates, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 23, No. 8, pp. 725~733.

(7) Spiegel, M. R., 1983, Advanced Mathematics,

McGraw-Hill, Inc, Singapore.

(8) Kinsler, L. E., 1982, Fundamentals of Acoustics, John Wiley & Sons Inc., New York.

(9) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Litton Educational Publishing, New York.

(10) Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, Matrix Polynomials, Academic Press, New York.



Sang-Wook Kang received a B.S., M.S. and Ph.D. degree in Dept. of Mechanical Design Engineering from Seoul National University in 1992, 1994 and 1999, respectively. He is currently working in Hansung University as a professor of the mechanical system engineering. His research interests include the development of NDIF method for free vibration analysis of membrane, acoustic cavities, and plates with general shapes.