동역학의 새로운 변분이론: 혼합합성이론

A New Variational Principle of Dynamics: Mixed Convolved Action

김 진 규*

*고려대학교 건축사회환경공학부 연구교수

1. 서 론

해밀턴 이론(Hamilton's principle: 1834, 1835)은 현재까지 동역학에 관한 유일한 변분이론으로써, Principle of virtual work 및 Principle of minimum total potential energy 등의 다른 정역학의 변분이론과 같이 여러 엔지니어링 분야(ex: Networks in computer science, RLC circuit in electrical engineering, Seismic waves in geotechnical engineering, etc.)에 널리 쓰이고 있다. 하지만, 해밀턴 이론은 다른 변분이론과는 다르게 2가지의 큰 이론적인 약점이 있으며, 근래, 이를 극복한 혼합합성이론(Mixed convolved action: 2012)이 필자를 포함한 공동연구로 제안되었기에 이 글을 통해 소개하고자 한다.

2. 해밀턴 이론(Hamilton's principle)

해밀턴 이론은 동적 시스템을 Lagrangian에 대한 시간 적분인 action으로 정의하고, 그 action에 대한 정상성을 (stationarity) 통해, 동적 시스템의 true trajectory를 찾는 analytical mechanics의 근간이 되는 변분이론이다. 곧, 뉴턴의 운동방정식이 미분 방정식임에 반해, 해밀턴 이론은 functional(function of function)로 표현되는 적분 방정식으로 뉴턴의 운동방정식과 비교시 다음의 장점이 있다.

(i) 동적 시스템을 action으로 간단히 정의함.
(ii) 동적 시스템의 true trajectory를 거시적으로 바라봄.
(iii) 일반화 좌표(generalized coordinates)를 사용해 Lagrangian을 정의함으로 더 일반적이며, 효율적임.

2.1. 초기 조건(Initial conditions)

앞서 언급한 몇가지 장점에도 불구하고, 해밀턴 이론은 다른 정역학의 변분이론이 정적시스템의 경계치를(boundary conditions) 제대로 산정할 수 있음에 반해 동적 시스템의 초기치를(Initial conditions) 제대로 산정할 수 없는 큰 약점이(end-point constraints) 있다.

그림 1의 질량 m, 선형 탄성 강성 k를 갖는 Harmonic oscillator의 예에서 해밀턴 이론은 질량이 equilibrium position

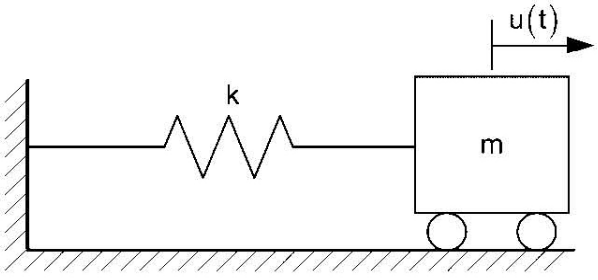

그림 1 Harmonic oscillator

에서 시간에 따라 변하는 변위 $u(t)$와 속도 $\dot{u}(t)$ 로써 Lagrangian L을 다음과 같이 정의하며,

$$L(u,\dot{u};t)=\tfrac{1}{2}m\left[\dot{u}(t)\right]^2-\tfrac{1}{2}k\left[u(t)\right]^2 \tag{1}$$

고정된 시간간격, 예를 들어 $[0,t]$에 대한 action A는 아래와 같이 정의한다.

$$A(u,\dot{u};t)=\int_0^t L(u,\dot{u};\tau)\,d\tau \tag{2}$$

해밀턴 이론은 식 (2)로 표현되는 functional인 action의 정상성 곧, $\delta A=0$을 통해, 동적 시스템의 적분 방정식을 표현한다. 곧, 식 (1)을 식 (2)에 대입한 후, 정상성을 고려하면 다음의 식이 되며,

$$\delta A=\int_0^t\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\delta\dot{u}+\frac{\partial L}{\partial u}\delta u\right]d\tau=0 \tag{3}$$

이는 아래와 같다.

$$\delta A=\int_0^t\left[m\,\dot{u}\,\delta\dot{u}-k\,u\,\delta u\right]d\tau=0 \tag{4}$$

식 (4)의 첫번째 항목에 부분적분을(integration by parts) 적용하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\delta A=-\int_0^t\left[m\,\ddot{u}+k\,u\right]\delta u\;d\tau+\left[m\,\dot{u}\,\delta u\right]_0^t=0 \tag{5}$$

해밀턴 이론의 큰 약점 end-point constraints는 그림 1에서 주어지게 되는 초기값

$$u(0)=u_0;\quad \dot{u}(0)=v_0 \tag{6}$$

이 아닌, $u(0)$와 $u(t)$의 시간에 대한 경계조건을 알고 있다고 보는 것이다. 곧, 해밀턴 이론은 식 (5)의 δu값의 시간 경계치에서의 variation을 허용하지 않는 다음의 식을 반영하며,

$$\delta u(0)=0;\quad \delta u(t)=0 \tag{7}$$

식 (5)는 아래와 같이 표현된다.

$$\delta A=-\int_0^t\left[m\,\ddot{u}+k\,u\right]\delta u\;d\tau=0 \tag{8}$$

마지막으로, 식 (8)의 적분 내에 δu가 임의로 변화하는 점(시간내에서는 위치가 어떻게 변화할지 모르는 사실)을 통해, 뉴턴의 운동방정식과 같은 다음의 식

$$m\ddot{u}+ku=0 \tag{9}$$

을 시간에 대한 적분식에서 이끌어낼 수 있다.

해밀턴 이론의 약점인 초기치가 아닌 초기와 최종 시간에서의 시스템의 위치를 알려져 있다는 것은 초기치 문제가 초기조건에 의해 어떻게 시스템이 변화하는지를 살펴보는 관점에 비춰 적절치 않음을 알 수 있다. 이는 정역학의 여러 변분이론이 경계치를 적절하게 반영할 수 있는 것과는 다르게, 해밀턴 이론이 갖고 있는 치명적인 문제이다.

2.2. 레일레이 함수(Rayleigh's dissipation)

해밀턴 이론은 초기조건을 제대로 사용할 수 없다는 점 이외에도, non-conservative system에 적용시, Lagrangian이외의 별도의 scalar function인 Rayleigh's dissipation function이 (Rayleigh, 1877) 필요하다는 단점을 가지고 있다. 이 Rayleigh's dissipation function은 수학적, 물리적으로 적절치 않는데 이를 아래의 Damped oscillator예를 통해 살펴보고자 한다.

그림 2의 Damped oscillator 운동방정식은 아래식으로 표현되는데,

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \tag{10}$$

이 시스템을 해밀턴 이론에서 정의하기 위해서는 앞의 Lagrangian(식 (1)) 외에 다음의 Rayleigh's dissipation(1877)이 필요하다.

$$\varphi(\dot{u};t)=\tfrac{1}{2}c\left[\dot{u}(t)\right]^2 \tag{11}$$

곧, 해밀턴 이론은 하나의 functional인 action(앞의 Harmonic

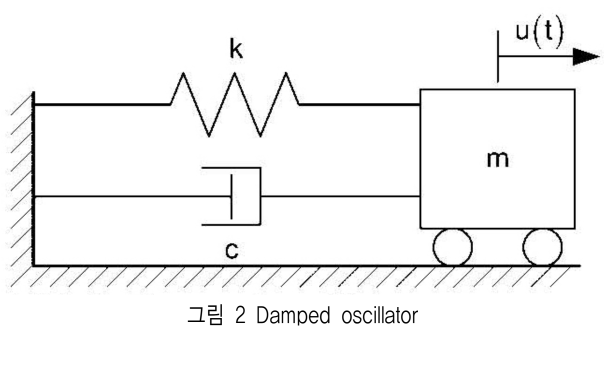

그림 2 Damped oscillator

oscillator의 경우, 식 (2))을 이 Damped oscillator의 경우에 정의할 수 없고, Lagrangian이 energy의 단위로 된 scalar function임에 반해, Rayleigh's dissipation(식 (11))은 energy-rate 단위의 scalar function으로, 서로 다른 물리량을 다루는 scalar function의 조합으로 운동방정식 (10)을 이끌어 내게 된다.

정상성을 고려한 action의 first variation인 δA는 아래의 식으로 정의되는데,

$$\delta A = \delta \int_0^t L(u, \dot{u}; \tau) d\tau - \underline{\int_0^t \frac{\partial \varphi(\dot{u}; \tau)}{\partial \dot{u}} \delta u \, d\tau} = 0 \tag{12}$$

식 (12)에서 보듯, Rayleigh's dissipation의 first variation (밑줄 표현)은 수학적으로 적절치 않은 다소 즉흥적인 표현을 사용하고 있다.

식 (12)는 다음과 같이 표현되며,

$$\delta A = \int_0^t \left[m \, \dot{u} \, \delta \dot{u} - k \, u \, \delta u \right] d\tau - \int_0^t \left[c \, \dot{u} \right] \delta u \, d\tau = 0 \tag{13}$$

Integration by parts, end-point constraints와 적분내 δu가 임의로 변한다는 점을 식 (13)에 적용하게 되면, Damped oscillator의 운동방정식 (10)을 이끌어 낼 수 있다.

3. 혼합합성적분의 근간

해밀턴 이론의 두가지 약점을 극복, 제안된 혼합합성적분이론은 다음의 3가지를 근간으로 나온 것이다.

① Mixed formulation: 힘과 변위를 모두 고려한 variational formulation

② Convolved action: convolution 사용

③ Fractional calculus: integer order의 미적분이 아닌 fractional order의 미적분 사용

3.1. 혼합변수(Mixed formulation)

해밀턴 이론에서 변위 기반의(u, $\dot{u}$) formulation이 아닌 혼합변수에 의한 Mixed Lagrangian formulation은 Sivaselvan and Reinhorn(2006)에 의해 제안되었다. 그 후, 여러 연구가 (Apostolakis and Dargush; 2012, 2013: Lavan et al., 2009: Sivaselvan el al. 2009) 진행되고 있으나, 그 기본적인 framework는 해밀턴 이론에 근거한 것으로 그 약점 또한 그대로 가진다.

앞서 언급한, 그림 1의 Harmonic oscillator 경우, Mixed Lagrangian formalism은 다음의 Lagrangian으로 힘과 변위를 동시에 고려하며,

$$L(u, \dot{u}, \dot{J}; t) = \frac{1}{2} m \, \dot{u}^2 + \frac{1}{2} a \, \dot{J}^2 - \dot{J} \, u \tag{14}$$

식(14)에서, $J(t)$와 a는 각각 스프링 힘 $F(t)$의 impulse와 flexibility로, 아래의 관계를 가진다.

$$F(t) = \dot{J}(t) \tag{15}$$

$$a = 1/k \tag{16}$$

곧, 스프링의 힘과 변위는 Mixed formulation으로 다음과 같이 표현된다.

$$u - a \, \dot{J} = 0 \tag{17}$$

따라서, Lagrangian의 시간적분으로 표현되는 action은 아래의 식과 같으며,

$$A = \int_0^t L(u, \dot{u}, \dot{J}; \tau) d\tau \tag{18}$$

그 first variation, δA는 다음과 같으며,

$$\delta A = \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial \dot{J}} \delta \dot{J} \right] d\tau = 0 \tag{19}$$

이는 식(20)을 의미한다.

$$\delta A = -\int_{t_0}^{t_1} \left[m \, \dot{u} \, \delta \dot{u} + a \, \dot{J} \, \delta \dot{J} - u \, \delta \dot{J} - \dot{J} \, \delta u \right] d\tau = 0 \tag{20}$$

식 (20)에 부분 적분, end-point constraints(여기서는, $\delta u(0) = 0$; $\delta u(t)$=0, $\delta J(0) = 0$; $\delta J(t) = 0$) 및 적분내 δu와 δJ임의 의로 변하는 점을 적용하면 앞의 운동 방정식과 동등한 식

$$m \, \ddot{u} + \dot{J} = 0 \tag{21}$$

이외에 constitutive relation식

$$a \, \ddot{J} - \dot{u} = 0 \tag{22}$$

을 얻을 수 있는데, 식 (21)~(22)에서 보이듯, mixed formulation은 힘과 변위를 primary variables로 동등하게 다룸을 알 수 있다. 이는 여러 다른 state variables을 포함하는 formulation을

유도하기에 적절한 것으로 Mixed Lagrangian formulation의 큰 장점이다.

3.2. 합성적분(convolved action)

해밀턴 이론의 문제점을 해결하고자, Gurtin(1964a,b)은 convolution functional을 이용하는 방법을 최초로 제안하였다. 하지만, 그 방법은 초기치 문제(Initial value problems)를 시간에 대한 합성적분(convolution)을 통해 서로 동등한 경계치 문제로(boundary value problems) 치환하여 접근한 것으로, 직접적으로 초기치 문제를 다룰 수 없는 단점이 있다.

이후, Tonti(1973)는 그림 2의 Damped oscillator의 초기치가 모두 0인 다음의 경우에 한해,

$$u(0)=0;\quad \dot{u}(0)=0 \tag{23}$$

아래의 functional action을 제안하였다.

$$A=\frac{1}{2}m(\dot{u}*\dot{u})+\frac{1}{2}c(\dot{u}*u)+\frac{1}{2}k(u*u) \tag{24}$$

식 (24)에서 *는 time duration [0, t]에 대한 합성적분(convolution)을 의미한다.

식 (24)의 정상성, 곧, $\delta A=0$은 아래와 같이 표현되며,

$$\delta A=m(\dot{u}*\delta\dot{u})+\frac{1}{2}c(\dot{u}*\delta u)+\frac{1}{2}c(u*\delta\dot{u})+k(u*\delta u)=0 \tag{25}$$

식 (25)의 합성적분에 대해 부분 적분을 적용하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta A&=m(\ddot{u}*\delta u)+c(\dot{u}*\delta u)+k(u*\delta u)\\&+\left[m\dot{u}(0)+\frac{c}{2}u(0)\right]\delta u(t)-\left[m\dot{u}(t)+\frac{c}{2}u(t)\right]\delta u(0)=0\end{aligned} \tag{26}$$

식 (26)에서 $u(0)$가 주어지는 값이라는 것과(곧, $\delta u(0)=0$) 합성적분 내 δu가 임의로 변하는 점을 적용하면, Damped oscillator의 운동방정식을 유도할 수 있으나,

식 (26)의 모멘텀에 관한 식

$$m\dot{u}+\frac{c}{2}u \tag{27}$$

은 계수가 다음의 형태여야 맞는 것이다.

$$m\dot{u}+cu \tag{28}$$

곧, Tonti의 방법은 초기치가 모두 0인 경우에 한정되어 적용될 수 있지만, Damped oscillator의 모멘텀을 제대로 표현할 수 없는 단점이 있다.

3.3. Fractional calculus

일반적인 integer order의 미적분에서 확장된 fractional order의 미적분에 대한 접근은 l'Hôopital과 Leibniz를 비롯한 17세기 동시대인에 의해 미적분학이 정립된 시점 이후 얼마되지 않아 제기되었고, 몇가지 다른 정의가 있다. 혼합합성이론에서는(Mixed convolved action) Riemann과 Liouville에 의해 정립된 fractional calculus를 그 기본으로 사용하였다.

먼저, Riemann-Liouville fractional integral을 살펴보면, 구간 [0, t]내에서의 점 τ에 대해 α의 order로 적분시, forward와 backward의 두 방향으로 각각 아래와 같이 정의한다.

$$\left(I_{0^+}^{\alpha}u\right)(\tau)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau}\frac{u(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}d\xi\quad\text{for}\quad \tau>0,\ \alpha>0 \tag{29}$$

$$\left(I_{t^-}^{\alpha}u\right)(\tau)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau}^{t}\frac{u(\xi)}{(\xi-\tau)^{1-\alpha}}d\xi\quad\text{for}\quad \tau<t,\ \alpha>0 \tag{30}$$

식 (29)~(3)에서, Γ는 gamma function을 나타낸다.

또한, order α의 fractional differentiation에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\left(D_{0^+}^{\alpha}u\right)(\tau)\equiv\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau}\frac{u(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha}}d\xi\quad\text{for}\quad 0\le\tau\le t,\ 0<\alpha<1 \tag{31}$$

$$\left(D_{t^-}^{\alpha}u\right)(\tau)\equiv-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{t}\frac{u(\xi)}{(\xi-\tau)^{\alpha}}d\xi\quad\text{for}\quad 0\le\tau\le t,\ 0<\alpha<1 \tag{32}$$

Fractional integro-differentiation은 다음의 semigroup property를 갖고 있으며,

$$\begin{cases}\left(I_{0^+}^{\alpha}I_{0^+}^{\beta}u\right)(\tau)=\left(I_{0^+}^{\alpha+\beta}u\right)(\tau)\\\left(I_{t^-}^{\alpha}I_{t^-}^{\beta}u\right)(\tau)=\left(I_{t^-}^{\alpha+\beta}u\right)(\tau)\end{cases}\qquad\begin{cases}\left(D_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\beta}u\right)(\tau)=\left(D_{0^+}^{\alpha+\beta}u\right)(\tau)\\\left(D_{t^-}^{\alpha}D_{t^-}^{\beta}u\right)(\tau)=\left(D_{t^-}^{\alpha+\beta}u\right)(\tau)\end{cases} \tag{33}$$

또한, 아래의 부분 적분관계와

$$\int_0^t\varphi(\tau)\left(D_{0^+}^{\alpha}\psi\right)(\tau)\,d\tau=\int_0^t\left(D_{t^-}^{\alpha}\varphi\right)(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau+\left(I_{t^-}^{1-\alpha}\varphi\right)(t)\,\psi(t)-\varphi(0)\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\psi\right)(0) \tag{34}$$

Reflection property를 갖는데

$$\begin{cases} \left(I_{t^-}^{\alpha}\hat{g}\right)(\tau) = \left(I_{0^+}^{\alpha}g\right)(t-\tau) \\ \left(I_{0^+}^{\alpha}\hat{g}\right)(\tau) = \left(I_{t^-}^{\alpha}g\right)(t-\tau) \end{cases} \tag{35}$$

식 (35)에서, $\hat{g}(\tau) = g(t-\tau)$를 의미한다.

덧붙여, 합성적분에서 complementary order의 integro-differentiation relation은 다음과 같다.

$$\int_0^t \left(D_{0^+}^{1-\alpha}u\right)(\tau)\ \left(D_{0^+}^{\alpha}u\right)(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \dot{u}(\tau)\ u(t-\tau)\,d\tau + u(0)u(t) \tag{36}$$

4. 혼합합성이론(The mixed convolved action)

혼합합성이론은 그림 2의 Damped oscillator의 functional action을 아래의 식으로 정의하는데,

$$A\left(u,\breve{u},\dot{u},J,\breve{J},\dot{J};t\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{u}*\dot{u}\right) - \frac{1}{2}a\left(\dot{J}*\dot{J}\right) + \breve{J}*\breve{u} + \frac{1}{2}c\left(\breve{u}*\breve{u}\right) \tag{37}$$

식 (37)에서 $\breve{u}$과 $\breve{J}$는 각각 다음의 semi derivative을 의미한다.

$$\breve{u} = \left(D_{0^+}^{1/2}u\right)(t);\quad \breve{J} = \left(D_{0^+}^{1/2}J\right)(t) \tag{38}$$

Functional action의 정상성은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta A = m\left(\dot{u}*\delta\dot{u}\right) - a\left(\dot{J}*\delta\dot{J}\right) + \delta\breve{J}*\breve{u} + \breve{J}*\delta\breve{u} + c\left(\breve{u}*\delta\breve{u}\right) = 0 \tag{39}$$

식 (39)에서 처음 두 식에는 앞서 살펴본 부분적분을 적용하고, semi derivatives로 표현된 나머지 세 식에는 식 (33)~(35)을 적용하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta u*\left(m\ddot{u} + c\dot{u} + \dot{J}\right) + \delta J*\left(-a\ddot{J} + \dot{u}\right) \\ &+ \delta u(t)\left[m\dot{u}(0) + cu(0) + J(0)\right] \\ &+ \delta u(0)\left(m\dot{u}(t)\right) + \delta J(t)\left[-a\dot{J}(0) + u(0)\right] - \delta J(0)\left(-a\dot{J}(t)\right) = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

식 (40)에서 초기조건은 $u(0)$, $\dot{u}(0)$, $J(0)$ 및 $\dot{J}(0)$로써, $J(0)$와 $\dot{J}(0)$는 다음의 관계식으로부터 산정된다.

$$m\dot{u}(0) + cu(0) + J(0) = 0;\quad a\dot{J}(0) - u(0) = 0 \tag{41}$$

합성적분내의 δu와는 δJ임의로 변한다는 점과, 주어진 초기조건에 의한 다음의 식을

$$\delta u(0) = 0;\quad \delta J(0) = 0 \tag{42}$$

이용하면, 식은 아래와 같이 표현되는데,

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta u*\left(m\ddot{u} + c\dot{u} + \dot{J}\right) + \delta J*\left(-a\ddot{J} + \dot{u}\right) \\ &+ \delta u(t)\left[m\dot{u}(0) + cu(0) + J(0)\right] \\ &+ \delta J(t)\left[-a\dot{J}(0) + u(0)\right] = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

식 (43)에서 보듯 Mixed variables로 표현되는 equilibrium, constitutive relations 및 momentum balance at the initial time 등 모두가 제대로 산정됨을 알 수 있다.

간단한 Damped oscillator의 예에서 보듯, 혼합합성이론은 별도의 Rayleigh's dissipation이 필요없고, 하나의 완전한 functional인 action으로 동적시스템을 정의하여 적절한 governing equations 및 초기치를 제대로 산정할 수 있음을 살펴보았다. 지적할 점은, 이 예제에서는 semi derivatives를 사용해 action을 정의했지만, 식 (36)의 관계식으로 인해, 어떠한 complementary order의 formulation도 식 (43)과 같은 결과를 낳는다는 점이다.

5. 결론

혼합합성이론은 과거 유일한 동역학의 변분이론인 해밀턴 이론의 단점을 극복한 새로운 것으로 현재, 동적 시스템을 해석하는데 있어 사용되고 있는 semi-discretization scheme, 곧, 공간에 대해서는 Finite Element Methods로 모델링하고 시간에 대해서는 Newmark's methods를 비롯한 여러 numerical methods을 적용해 해석하는 상황에 시공간 유한요소해석을 (Space-time finite element method) 적용시킬 수 있는 이론적 근간을 제공한다.

과거 해밀턴 이론이 여러 분야에 쓰여왔듯, 이 이론 또한, 그 확장성이 매우 크며, 현재, Elastodynamic continuum, dynamic thermoelastic continuum, dynamic fractional viscoelastic continuum 까지 이론이 확장되어 있고, 이 이론에 근거한 시공간 유한요소해석법도 일부 개발되어 있다.

참 고 문 헌

1. Hamilton, W.R., 1834. On a general method in dynamics. Philos. Trans. R. Soc. London 124, 247-308.

2. Hamilton, W.R., 1835. Second essay on a general method in dynamics. Philos. Trans. R. Soc. London 125, 95-144.
3. Dargush, G.F., Kim, J., 2012. Mixed convolved action. Phys. Rev. E. 85, 066606.
4. Rayleigh, J.W.S., 1877. The Theory of Sound. Dover, New York.
5. Sivaselvan, M.V., Reinhorn, A.M., 2006. Lagrangian approach to structural collapse simulation. J. Eng. Mech. 132, 795-805.
6. Apostolakis, G., Dargush, G.F., 2012. Mixed Lagrangian formulation for linear thermoelastic response of structures. J. Eng. Mech. 138, 508-518.
7. Apostolakis, G., Dargush, G.F., 2013. Mixed variational principles for dynamic response of thermoelastic and poroelastic continua. Int. J. Solids. Struct. 50, 642-650.
8. Lavan, O., Sivaselvan, M.V., Reinhorn, A.M., Dargush, G.F., 2009. Progressive collapse analysis through strength degradation and fracture in the mixed Lagrangian formulation. Earthquake Eng. Struct. Dyn. 38, 1483-1504.
9. Sivaselvan, M.V., Lavan, O., Dargush, G.F., Kurino, H., Hyodo, Y., Fukuda, R., Sato, K., Apostolakis, G., Reinhorn, A.M., 2009. Numerical collapse simulation of large-scale structural systems using an optimization-based algorithm. Earth Earthquake Eng. Struct. Dyn. 38, 655-677.
10. Gurtin, M.E., 1964a. Variational principles for linear elastodynamics. Arch. Ration. Mech. Anal. 16, 34-50.
11. Gurtin, M.E., 1964b. Variational principles for linear initial-value problems. Q. Appl. Math. 22, 252-256.
12. Tonti, E., 1973. On the variational formulation for linear initial value problems. Ann. Mat. Pur. Appl. 95, 331-359.

[담당 : 김승직 편집위원]