

시간영역 Gauss-Newton 전체파형 역해석 기법의 성능평가

강 준 원^{1*} · Alireza Pakravan²

¹홍익대학교 토목공학과, ²뉴멕시코주립대학교 토목공학과

Performance Evaluation of a Time-domain Gauss-Newton Full-waveform Inversion Method

Jun Won Kang^{1*} and Alireza Pakravan²

¹Department of Civil Engineering, Hongik University, Seoul, 121-791, Korea

²Department of Civil Engineering, New Mexico State University, New Mexico, 88003, USA

Abstract

This paper presents a time-domain Gauss-Newton full-waveform inversion method for the material profile reconstruction in heterogeneous semi-infinite solid media. To implement the inverse problem in a finite computational domain, *perfectly-matched-layers*(PMLs) are introduced as wave-absorbing boundaries within which the domain's wave velocity profile is to be reconstructed. The inverse problem is formulated in a partial-differential-equations(PDE)-constrained optimization framework, where a least-squares misfit between measured and calculated surface responses is minimized under the constraint of PML-endowed wave equations. A Gauss-Newton-Krylov optimization algorithm is utilized to iteratively update the unknown wave velocity profile with the aid of a specialized regularization scheme. Through a series of one-dimensional examples, the solution of the Gauss-Newton inversion was close enough to the target profile, and showed superior convergence behavior with reduced wall-clock time of implementation compared to a conventional inversion using Fletcher-Reeves optimization algorithm.

Keywords : Gauss-Newton full-waveform inversion, perfectly-matched layers, PDE-constrained optimization framework, wall-clock time

1. 서 론

최근 수십년간 초음파, 전자기파, 탄성파 등 다양한 형태의 파동을 이용하여 구조물의 물성치 분포를 추정하는 역해석(inverse analysis) 연구가 의학, 물리탐사, 비파괴검사 등의 분야를 중심으로 지속적으로 발전해 왔다. 이러한 미지 물성치 분포의 도출을 위한 파동의 역해석은 측정응답과 물성치 간에 비선형 관계가 있기 때문에 신뢰도 높은 비선형 역해석 알고리즘을 필요로 한다. 전체파형 역해석 기법(full-waveform inversion)은 이러한 대표적 방법으로서, 파동 전파에 따른 측정응답의 전체파형을 고려하여 비선형 최적화 알고리즘을 통해 미지의 물성 분포를 결정한다.

최근 탄성파의 전체파형 역해석 기법을 이용하여 구조물의

손상평가, 지반조사, 지진파 탐사 등을 수행하는 연구가 활발히 이루어져 왔다(Epanomeritakis *et al.*, 2008; Kang *et al.*, 2010; 2011). 이 논문에서는 기존에 개발된 탄성파의 역해석 기법을 확장, 발전시키기 위하여 반무한 고체의 표면에서 측정된 변위응답을 이용해 미지의 탄성파속도 분포를 도출하는 시간영역 전체파형의 역해석 방법을 논한다.

반무한 영역을 유한 계산영역으로 치환하기 위해서는 유한영역의 경계에 수치적 파동흡수 경계조건이 필요하다. 이를 위해 이 연구에서는 perfectly-matched-layers(PMLs)를 유한영역의 경계로 하여 탄성파의 역해석을 수행하였다. Kang 등(2010; 2011)은 PML을 경계로 하는 1차원 및 2차원 탄성영역에서 Fletcher-Reeves 공액경사법(conjugate gradient method)에 기반한 탄성파의 전체파형 역해석 기법을 개발하였

* Corresponding author:

Tel: +82-2-320-1601; E-mail: jwkang@hongik.ac.kr

Received June 4 2013; Revised June 20 2013;

Accepted June 21 2013

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

다. 이 기법에 의해 표면의 동적 변위응답으로부터 균일하지 않은 1차원 탄성파속도 및 2차원 전단파속도의 분포를 효과적으로 도출하였다. 그러나 이 기법은 고차원 문제에서 계산시간이 오래 걸리므로 역해석의 수렴을 개선이 요구된다. 따라서 이 연구는 Gauss-Newton 최적화 알고리즘에 기반한 탄성파의 전체파형 역해석 기법을 개발하여 해의 정확도와 수렴율을 개선하는 것을 목적으로 한다. 특히, 전체 계산 소요시간(wall-clock time)을 Fletcher-Reeves 역해석의 소요시간과 비교하여 Gauss-Newton 역해석 기법의 효율성을 검증하고자 한다.

이 논문에서는 먼저 PML을 경계로 하는 영역에서 정의된 탄성파동방정식을 구속조건으로 하는 최적화 기법(Kang *et al.*, 2011)을 통해 역해석 문제를 정의하고, Gauss-Newton 최적화 알고리즘과 혼합유한요소법을 이용하여 미지의 탄성파속도 분포를 도출하는 방법을 소개한다. 그리고 1차원 수치예제를 통해 Gauss-Newton 역해석 결과의 정확도를 검토하고, Fletcher-Reeves 역해석 결과와 비교하여 수렴율과 계산 소요시간의 개선 정도를 분석한다.

2. 물성치 분포 재구성을 위한 탄성파의 역해석

2.1 편미분 방정식을 구속조건으로 하는 최적화

이 논문에서는 Fig. 1(a)와 같이 수직 방향으로 이질적 물성을 갖는 반무한 고체영역의 탄성파속도 분포를 표면의 동적 변위응답을 이용해 재구성하는 역해석 문제를 고려한다. 반무한 영역을 대신하기 위해 Fig. 1(b)와 같이 표면으로부터 거리 L 의 위치에 수치적 파동흡수 경계조건인 PML ($L \leq x \leq L_t$)을 도입하여 PML을 경계로 하는 유한 계산영역을 구성하였다.

PML을 경계로 하는 고체영역에서 표면의 측정응답을 이용해 탄성파속도($c(x)$)의 분포를 재구성하는 역해석 문제는 다

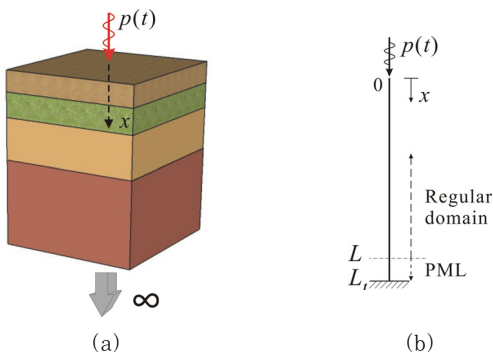


Fig. 1 (a) Horizontally layered and vertically heterogeneous semi-infinite solid medium; (b) One-dimensional schematic of the PML-truncated domain

음과 같이 구속조건이 있는 최적화 문제로 표현할 수 있다.

$$\text{minimize } J := \frac{1}{2} \int_0^T [v(0,t) - v_m(0,t)]^2 dt + \Upsilon(c) \quad (1)$$

subject to:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cg \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + cg\sigma - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = 0 \text{ for } 0 < x < L_t, 0 < t \leq T \quad (2b)$$

$$v(L_t, 0) = 0 \quad (3)$$

$$\sigma(0, t) = p(t) \quad (4)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (6)$$

$$\sigma(x, 0) = 0 \quad (7)$$

식 (1)은 최적화 문제의 목적함수로서, 표면($x=0$)에서의 측정응답(v_m)과 계산응답(v)간의 차이를 L^2 -norm 형태로 표현한 범함수(functional)이다. 이 최적화 문제는 PML을 경계로 하는 1차원 유한영역에서의 탄성파동지배방정식 ((2a)~(2b))과 경계조건((3)~(4)), 초기조건((5)~(7))으로 구성된 정해석 문제(forward problem)를 구속조건으로 한다. 식 (2)의 탄성파동방정식은 변위(v)와 응력(σ)이 혼합된 연립미분방정식(Kang *et al.*, 2010)으로서, $v(x,t) = \rho u(x,t)$ 는 물리적 변위($u(x,t)$)에 밀도 ρ 를 곱한 의미상의 변위이고 $c \equiv c(x) = \sqrt{E/\rho}$ 는 매질의 탄성파속도이다. $g \equiv g(x)$ 는 PML의 특성함수로서 일반영역($0 \leq x \leq L$)으로부터 전파되어 오는 파동의 위상을 감소시키는 댐핑의 역할을 한다. Kang 등(2010)은 PML의 감쇠함수 $g(x)$ 를 일반영역에서 0, PML 영역에서 2차의 다항함수로 정의하였다. 일반영역에서 식 (2a)와 (2b)는 감쇠함수 $g(x)$ 가 0이므로 결국 1차원 탄성파동방정식 $\frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 와 동일함을 알 수 있다.

이러한 역해석 문제에는 일반적으로 해의 유일성이 보장되지 않는 문제점이 있다. 따라서 해($c(x)$)의 수렴성과 정확성을 향상시키기 위하여 목적함수 J 에 정규화 항 $\Upsilon(c)$ 을 포함시켰다. Total Variation 정규화기법에 의한 $\Upsilon(c)$ 는 정규화 계수 R_c 를 사용하여 다음의 식으로 표현될 수 있다(Vogel, 2002).

$$\Upsilon(c) = R_c \int_0^{L_t} \left| \frac{dc}{dx} \right| dx. \quad (8)$$

2.2 라그랑지안의 구성

탄성과동방정식을 구속조건으로 하는 최적화 문제를 구속 조건이 없는 최적화 문제로 변환하기 위하여 다음과 같은 라그랑지안 범함수를 구성하고, 이를 구속조건이 없는 최적화 문제의 목적함수로 설정하였다.

$$L(v, \sigma, \lambda_v, \lambda_\sigma, c) = \frac{1}{2} \int_0^T [v(0, t) - v_m(0, t)]^2 dt + \Upsilon(c) \quad (9)$$

$$+ \int_0^T \int_0^{L_t} \lambda_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cg \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_0^{L_t} \lambda_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + cg\sigma - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) dx dt$$

위의 라그랑지안은 최적해에서 라그랑주 승수($\lambda_v, \lambda_\sigma$), 상태변수(v, σ), 제어변수(c)에 대한 1차 변분식이 0이 된다. 이러한 최적화 조건을 만족시키는 탄성과속도(c)의 분포가 이 역해석 문제의 해가 된다.

2.3 KKT(Karush-Kuhn-Tucker) 조건

우선, 최적해에서 $\lambda_v, \lambda_\sigma$ 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_{\lambda_v} L=0, \delta_{\lambda_\sigma} L=0$)으로부터 상태방정식(state equations)과 그에 따른 경계 및 초기조건을 얻을 수 있다. 이렇게 유도한 상태문제(state problem)는 식 (2)~(7)의 정해석 문제와 동일하며, 이를 미분연산자(differential operator)를 이용해 표현하면 다음과 같다.

$$A(c)\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ for } 0 < x < L_t, 0 < t \leq T \quad (10)$$

$$B\mathbf{u} = I\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (11)$$

여기서, 상태변수 벡터 $\mathbf{u} = [v(x) \ \sigma(x)]^T$ 에 대한 상태연산자 $A(c)$, 경계조건 연산자 B , 초기조건 연산자 I 는 다음과 같다.

$$A(c)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cg \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + cg\sigma - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v(L_t, t) \\ \sigma(0, t) - p(t) \end{bmatrix}, \quad I\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v(x, 0) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) \\ \sigma(x, 0) \end{bmatrix} \quad (13)$$

둘째로, 최적해에서 상태변수 v, σ 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_v L=0, \delta_\sigma L=0$)으로부터 다음과 같은 수반방정식(adjoint equations)과 그에

따른 경계 및 최종조건(final condition)을 얻을 수 있다.

$$A^*(c)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \text{ for } 0 < x < L_t, 0 \leq t < T \quad (15)$$

$$B^*\boldsymbol{\lambda} = [0 \ [v(0, t) - v_m(0, t)]]^T \quad (16)$$

$$I^*\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (17)$$

수반변수 벡터 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_v \ \lambda_\sigma]^T$ 에 대한 수반연산자 $A^*(c)$, 경계조건 연산자 B^* , 최종조건 연산자 I^* 는 다음과 같다.

$$A^*(c)\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \lambda_v}{\partial t^2} - cg \frac{\partial \lambda_v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} - cg\lambda_\sigma - \frac{\partial \lambda_v}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$B^*\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_v(L_t, t) \\ c(0)^2 \frac{\partial \lambda_v}{\partial t}(0, t) \end{bmatrix}, \quad I^*\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_v(x, T) \\ \frac{\partial \lambda_v}{\partial t}(x, T) \\ \lambda_\sigma(x, T) \end{bmatrix} \quad (18)$$

수반방정식 (15)는 라그랑주 승수 $\lambda_v, \lambda_\sigma$ 에 대한 연립미분방정식으로서 상태방정식 (10)과 비슷한 미분연산자를 가진다. 수반문제의 경계조건은 변위의 계산값과 측정값의 차이(misfit)로 나타내어지며, 상태문제가 초기조건을 갖는데 반해 수반문제는 최종시각 $t = T$ 에서의 최종조건을 갖는다.

셋째로, 최적해에서 제어변수 c 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_c L=0$)으로부터 다음과 같이 탄성과속도 c 에 대한 제어방정식(control equation)과 경계조건을 얻을 수 있다.

$$R_c G(c)c + S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \text{ for } 0 \leq x \leq L_t \quad (19)$$

$$B_c c = \mathbf{0} \quad (20)$$

제어방정식 (19)에 포함된 연산자 $G(c)$, $S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 와 경계조건 연산자 B_c 는 다음과 같다.

$$G(c)c = - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dc}{dx}\right)^2}} \frac{dc}{dx} \right] \quad (21)$$

$$S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_0^T \left(g\lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} + g\sigma\lambda_\sigma - 2c\lambda_\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) dt \quad (22)$$

$$B_c c = \left[\frac{dc}{dx}(0) \ \frac{dc}{dx}(L_t) \right]^T \quad (23)$$

위의 상태, 수반, 제어방정식들은 이 최적화 문제에 대한 연속적 형태의 KKT 조건이며, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} L \\ \nabla_c L \\ \nabla_{\lambda} L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*(c)\lambda \\ R_c G(c)c + S(\mathbf{u}, \lambda) \\ A(c)\mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (24)$$

여기서, $\nabla_x L$ 은 변수 x 에 대한 라그랑지안 L 의 그레디언트 (Fréchet derivative)를 의미한다.

위의 KKT 조건은 상태변수 $\mathbf{u} = [v \ \sigma]^T$, 수반변수 $\lambda = [\lambda_v \ \lambda_\sigma]^T$, 제어변수 c 에 대한 비선형 연립미분방정식 시스템이다. 이 연구에서는 KKT 조건을 모든 변수에 대해 풀지 않고, 탄성파속도 c 만을 최적화 변수로 보고 Gauss-Newton-Krylov 최적화 알고리즘(Akcelik *et al.*, 2008)을 이용한 반복계산을 통해 c 의 최적해를 구하는 축소공간법(reduced-space method)(Kang *et al.*, 2010: 2011)을 이용하였다. 축소공간에서 제어변수 c 를 업데이트하기 위한 그레디언트는 식 (24)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$g_c = \nabla_c L = R_c G(c)c + S(\mathbf{u}, \lambda) \quad (25)$$

각 반복계산마다 그레디언트 g_c 는 다음과 같은 과정으로 계산된다. 현 반복단계에서의 탄성파속도 $c(x)$ 에 대하여 상 문제 (10)~(11)의 해 $\mathbf{u} = [v \ \sigma]^T$ 를 구한다. 이를 이용해 수반문제 (15)~(17)의 해 $\lambda = [\lambda_v \ \lambda_\sigma]^T$ 를 계산한다. 계산된 \mathbf{u} 와 λ 를 이용하여 식 (25)의 그레디언트를 계산한다. 상 문제와 수반문제의 수치 해는 혼합유한요소법(mixed finite element method)에 의해 구할 수 있다. 이렇게 계산한 그레디언트를 이용하여 각 반복계산마다 Gauss-Newton-Krylov 최적화 알고리즘에 의해 탄성파속도 c 의 업데이트를 구할 수 있다.

3. Gauss-Newton-Krylov 최적화 알고리즘

3.1 KKT 시스템

일반적인 Newton 최적화 기법에 의한 상태, 수반, 제어 변수의 업데이트 ($\bar{\mathbf{u}} = [\bar{v} \ \bar{\sigma}]^T$, $\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_v \ \bar{\lambda}_\sigma]^T$, \bar{c})는 다음과 같은 KKT 시스템을 만족한다(Akcelik, 2002).

$$\begin{bmatrix} B & C^*(\lambda) & A^*(c) \\ C(\lambda) & F(c) & D^*(\mathbf{u}) \\ A(c) & D(\mathbf{u}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{c} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A^*(c)\lambda \\ R_c G(c)c + S(\mathbf{u}, \lambda) \\ A(c)\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (26)$$

이 식에서 좌변의 행렬은 라그랑지안 L 의 헤시안(Hessian)이며 내부의 각 요소들은 $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda}, \bar{c}$ 에 대한 미분연산자로서 다음

과 같이 표현된다.

$$B\bar{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} \nabla_{vv}^2 L & \nabla_{v\sigma}^2 L \\ \nabla_{\sigma v}^2 L & \nabla_{\sigma\sigma}^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}(x, t)\delta(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$C(\lambda)\bar{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} \nabla_{cv}^2 L & \nabla_{c\sigma}^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \lambda_v g \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - 2\lambda_\sigma \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial t} + \lambda_\sigma g \bar{\sigma} \quad (28)$$

$$C^*(\lambda)\bar{c} := \begin{bmatrix} \nabla_{vc}^2 L \\ \nabla_{\sigma c}^2 L \end{bmatrix} \bar{c} = \begin{bmatrix} -\bar{c}g \frac{\partial \lambda_v}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{c} \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} \right) \\ \lambda_\sigma \bar{c} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$D(\mathbf{u})\bar{c} := \begin{bmatrix} \nabla_{\lambda_v c}^2 L \\ \nabla_{\lambda_\sigma c}^2 L \end{bmatrix} \bar{c} = \begin{bmatrix} \bar{c}g \frac{\partial v}{\partial t} \\ \bar{c}g\sigma - 2\bar{c} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$D^*(\mathbf{u})\bar{\lambda} := \begin{bmatrix} \nabla_{\lambda_v}^2 L & \nabla_{\lambda_\sigma}^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_v \\ \bar{\lambda}_\sigma \end{bmatrix} = \bar{\lambda}_v g \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{\lambda}_\sigma g\sigma + 2c \int_0^T \frac{\partial \bar{\lambda}_\sigma}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} dt \quad (31)$$

$$F(c)\bar{c} := (\nabla_{cc}^2 L)\bar{c} = 2\bar{c} \int_0^T \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} dt \quad (32)$$

식 (26)의 KKT 시스템으로부터 반복계산마다 상태, 수반, 제어변수의 업데이트를 구할 수 있다. 그런데 Newton 헤시안은 반복계산의 해가 최적해에 가깝지 않으면 일반적으로 부정부호행렬(indefinite matrix)이 되며, 따라서 최적화 문제의 초기 반복단계에서는 적절한 업데이트를 계산하기 어려울 수 있다(Akcelik, 2002). 이러한 문제점을 개선하기 위하여 Newton 헤시안 대신 $C(\lambda)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, $C^*(\lambda)\bar{c} = \mathbf{0}$ 으로 가정한 Gauss-Newton 헤시안을 사용할 수 있다. 이러한 Gauss-Newton 헤시안을 사용해 KKT 시스템을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} B & 0 & A^*(c) \\ 0 & F(c) & D^*(\mathbf{u}) \\ A(c) & D(\mathbf{u}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{c} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A^*(c)\lambda \\ R_c G(c)c + S(\mathbf{u}, \lambda) \\ A(c)\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (33)$$

탄성파속도 $c(x)$ 를 업데이트하기 위한 역해석의 반복계산에서는 항상 상태방정식과 수반방정식을 만족하므로 식 (33)의 우변에서 $A(c)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $A^*(c)\lambda = \mathbf{0}$ 이 된다. 상태방정식의 해 \mathbf{u} 를 이용해 식 (33)의 세 번째 블록방정식을 풀어 $\bar{\mathbf{u}}$ 를 계산하고, 이를 이용해 첫 번째 블록방정식을 풀어 $\bar{\lambda}$ 를 구한 후, $\bar{\lambda}$ 와 수반방정식의 해 λ 를 이용해 두 번째 블록방정식을 풀면 탄성파속도의 업데이트 \bar{c} 를 계산할 수 있다. 이러한 연쇄적 블록제거 과정은 다음과 같은 증분상태, 증분수반, 증분

제어문제로 나타낼 수 있다.

증분상태문제:

$$A\bar{\mathbf{u}} = -D\bar{c} \text{ for } 0 < x < L_t, 0 < t \leq T \quad (34)$$

$$B\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (35)$$

증분수반문제:

$$A^*\bar{\lambda} = -B\bar{\mathbf{u}} \text{ for } 0 < x < L_t, 0 \leq t < T \quad (36)$$

$$B^*\bar{\lambda} = I^*\bar{\lambda} = \mathbf{0} \quad (37)$$

증분제어문제:

$$F\bar{c} + D^*\bar{\lambda} = -[R_c G(c)c + S(\mathbf{u}, \lambda)], \text{ for } 0 \leq x \leq L_t \quad (38)$$

$$B_c\bar{c} = \mathbf{0} \quad (39)$$

위의 증분상태문제와 증분수반문제의 해는 혼합유한요소법을 이용해 구할 수 있으며, 이들을 미분연산자를 이용해 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{u}} = -A^{-1}D\bar{c} \quad (40)$$

$$\bar{\lambda} = (A^*)^{-1}BA^{-1}D\bar{c} \quad (41)$$

식 (41)을 (38)에 대입하면 식 (42)와 같이 탄성파속도 업데이트 \bar{c} 에 대한 축소공간 KKT 시스템(reduced KKT system)을 얻을 수 있다.

$$W_c\bar{c} = -g_c \quad (42)$$

$$W_c = [F + D^*(A^*)^{-1}BA^{-1}D] \quad (43)$$

여기서, W_c 는 축소공간 헤시안(reduced Hessian)이다. W_c 를 매트릭스의 형태로 나타내어 \bar{c} 를 계산하는 것은 매트릭스의 방대한 크기로 인해 쉽지 않고, 특히 고차원 역해석 문제에서는 이러한 문제가 더욱 심화된다. 따라서 이 연구에서는 Krylov subspace method를 이용하여 축소공간 헤시안 매트릭스를 직접 구성하지 않고 반복계산을 통하여 식 (42)로부터 탄성파속도의 업데이트 \bar{c} 를 근사적으로 계산한다.

3.2 역해석 프로세스

Krylov subspace method는 대규모 선형방정식 시스템의 해를 반복계산을 통하여 근사적으로 계산하는 방법으로서, Arnoldi, Lanczos, Conjugate Gradient, GMRES, BiCGS-

TAB 방법 등이 있다(Saad, 2000). 이 연구에서는 Conjugate Gradient법을 선택하여 식 (42)에 대응하는 선형시스템 매트릭스의 역행렬을 계산하지 않고 매트릭스와 벡터의 곱을 이용해 반복적으로 시스템의 해를 구하였다. 연속함수 형태의 식 (42)를 이산화된 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$W_c\bar{\mathbf{c}} = -\mathbf{g}_c \quad (44)$$

여기서, W_c 와 \mathbf{g}_c 는 각각 이산화된 형태의 축소공간 헤시안과 그라디언트이고, $\bar{\mathbf{c}}$ 는 각 노드의 탄성파속도 업데이트 값들로 구성된 벡터이다. \mathbf{g}_c 는 식 (25)의 각 노드값들로 구성된다. Table 1에 축소공간 헤시안 W_c 와 임의의 벡터 $\hat{\mathbf{c}}$ 과의 곱을 계산하는 절차를 요약하였다.

Table 1 Algorithm 1 - procedure to calculate $W_c\hat{\mathbf{c}}$

1.	Calculate nodal values of $\hat{\mathbf{u}} = -A^{-1}D(\mathbf{u})\hat{c}$ by solving the incremental state problem (34)~(35).
2.	Calculate nodal values of $\hat{\lambda} = (A^*)^{-1}B\hat{\mathbf{u}}$ by solving the incremental adjoint problem (36)~(37).
3.	Calculate nodal values of $D^*(\mathbf{u})\hat{\lambda}$ (Eq. (31)).
4.	Calculate nodal values of $F(c)\hat{c}$ (Eq. (32)).
5.	Determine the vector consisting of nodal values of $F(c)\hat{c} + D^*(\mathbf{u})\hat{\lambda} = [F + D^*(A^*)^{-1}BA^{-1}D]\hat{\mathbf{c}}$. This vector is $W_c\hat{\mathbf{c}}$.

알고리즘 1을 이용하여 식 (44)로부터 탄성파속도의 업데이트 \bar{c} 를 계산하는 Conjugate Gradient법을 Table 2에 정리하였다. Table 2의 6단계에서 η 는 다음과 같이 계산된다(Akcelik, 2002).

Table 2 Algorithm 2 - Conjugate Gradient method

1.	Assume the wave velocity update \bar{c} .
2.	Set the residual $\mathbf{r} = -W_c\bar{c} - \mathbf{g}_c$.
3.	$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r}$
4.	$j = 0$
5.	$\delta_0 = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$
6.	while ($\ \mathbf{r}\ \geq \eta\ \mathbf{g}_c\ $) do
7.	$\mathbf{d} = W_c\hat{\mathbf{c}}$ (Use Algorithm 1)
8.	$\alpha_j = \frac{\delta_j}{\hat{\mathbf{c}}^T\mathbf{d}}$
9.	$\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}} + \alpha_j\hat{\mathbf{c}}$
10.	$\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha_j\mathbf{d}$
11.	$\delta_{j+1} = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$
12.	$\beta_j = \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}$
13.	$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \beta_j\hat{\mathbf{c}}$
14.	$j = j + 1$
15.	end while

Table 3 Algorithm 3 - Gauss-Newton inversion procedure

1.	Choose $\bar{\alpha}, \bar{\rho}, \bar{\mu}$, and R_c ; Set $\alpha = \bar{\alpha}$.
2.	Set $k=0$ and convergence tolerance tol .
3.	Set the initial guess of the wave velocity vector \mathbf{c}_k .
4.	$J = tol + 1$
5.	while ($J > tol$) do
6.	Solve the state problem (10)~(11) and obtain state variables $\mathbf{u} = [v \ \sigma]^T$.
7.	Solve the adjoint problem (15)~(16) and obtain adjoint variables $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_v \ \lambda_\sigma]^T$.
8.	Compute the discrete form of the reduced gradient $(\mathbf{g}_c)_k$.
9.	Compute vector $\bar{\mathbf{c}}_k$ using Algorithm 2
10.	while [$J(\mathbf{c}_k + \alpha \bar{\mathbf{c}}_k) > J(\mathbf{c}_k) + \bar{\mu} \alpha (\mathbf{g}_c)_k \cdot \bar{\mathbf{c}}_k$] do
11.	$\alpha \leftarrow \bar{\rho} \alpha$
12.	end while
13.	$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \alpha \bar{\mathbf{c}}_k$
14.	$k = k + 1$
15.	end while

$$\eta_k = \frac{\|(\mathbf{g}_c)_k - (\mathbf{g}_c)_{k-1} - (\mathbf{W}_c)_{k-1} \bar{\mathbf{c}}_{k-1}\|}{\|(\mathbf{g}_c)_{k-1}\|} \quad (45)$$

여기서, k 는 역해석의 k 번째 반복계산 단계를 의미한다. 알고리즘 2를 통해 각 반복계산마다 $\bar{\mathbf{c}}_k$ 를 계산하면 다음과 같이 탄성파속도를 업데이트할 수 있다.

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \alpha \bar{\mathbf{c}}_k \quad (46)$$

여기서, α 는 $\bar{\mathbf{c}}_k$ 방향으로의 스텝길이이다. 이상과 같이 탄성파속도 $c(x)$ 의 최적 분포를 결정하는 Gauss-Newton 역해석의 전체 프로세스를 Table 3과 같이 요약하였다.

4. 수치예제

이 논문에서 제시한 Gauss-Newton-Krylov 최적화 기법에 의한 탄성파 역해석의 성능을 검증하기 위하여 Fig. 2(a)

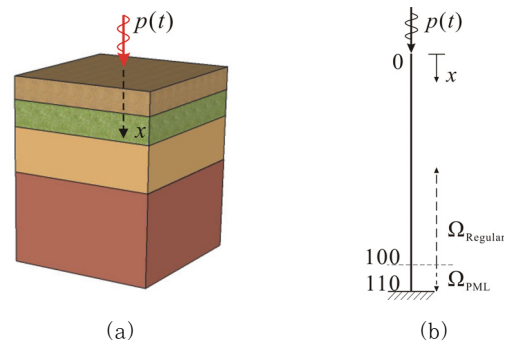


Fig. 2 (a) Horizontally layered semi-infinite elastic media; (b) One-dimensional schematic of the PML-truncated domain(PML location: $100 \leq x \leq 110$)

와 같이 임의의 물성 분포를 갖는 반무한 탄성영역을 대상으로 동적 하중에 대한 표면응답을 이용해 1차원 탄성파속도 분포를 재구성하였다. 이 탄성영역의 $100\text{m} \leq x \leq 110\text{m}$ 구간에 PML을 두어 표면으로부터 전파하는 파동을 흡수해 반사파가 발생하지 않도록 하였고, 이 영역을 Fig. 2(b)와 같이 PML을 경계로 하는 1차원 유한영역으로 모델링하였다. 이 영역의 물성 분포로서 Fig. 3와 같이 세 개의 탄성파속도 분포를 고려하였다. Fig. 3(a)는 $200\text{m/s} \leq c(x) \leq 400\text{m/s}$ 의 범위에서 연속적으로 변하는 탄성파속도의 분포(Curved Profile; CP)로서 다음 식에 의해 표현된다.

$$c(x) = 200 + 200 \exp\left[\frac{-(x-50)^2}{200}\right] \text{ (m/s)} \quad (47)$$

Fig. 3(b)와 3(c)는 각각 3개(3-Layer Profile; LP3)와 5개(5-Layer Profile; LP5)의 층을 갖는 탄성파속도 분포이다. Fig. 3(b)의 층별 탄성파속도는 표면에서 아래 방향으로 각각 200m/s, 300m/s, 400m/s이고, Fig. 3(c)는 각각 230m/s, 200m/s, 270m/s, 350m/s, 430m/s이다. 이러한 세 영역에서 탄성파의 정해석과 역해석을 실시하기 위하여 2차의 형상함수를 갖는 길이 0.5m의 유한요소로 영역을 분할하였다.

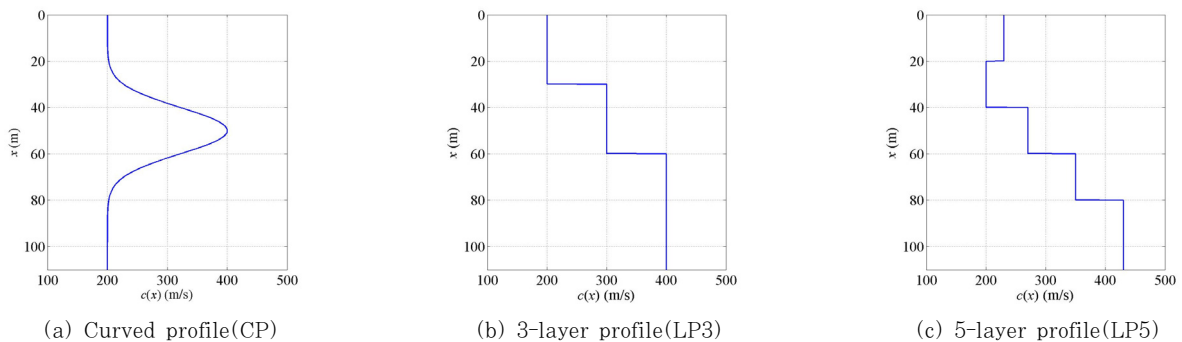


Fig. 3 Target elastic wave velocity profiles(CP, LP3, LP5)

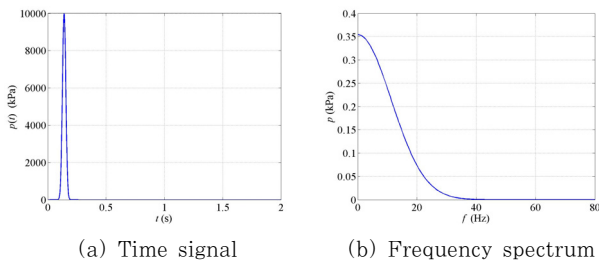


Fig. 4 Time signal and frequency spectrum of surface stress load $p(t)$

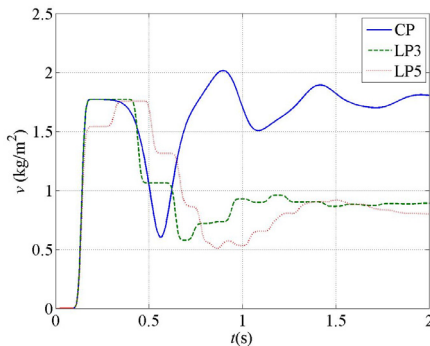


Fig. 5 Displacement time histories measured on the surface of the domains with three wave velocity profiles (CP, LP3, LP5)

Fig. 4는 표면에 작용하는 응력하중의 시간이력과 주파수 스펙트럼을 나타낸다. 이 하중은 시간에 대해 Gaussian 분포를 가지며 최대 주파수 성분은 약 40Hz이다. 하중 $p(t)$ 는 시간에 대해 다음과 같은 함수로 표현된다.

$$p(t) = 10000 \exp\left[-\frac{(t-0.14)^2}{0.0004}\right] \text{ (Pa)} \quad (48)$$

이러한 하중이 작용할 때 위의 세 가지 탄성파속도 분포를 갖는 영역의 표면($x=0$)에서 측정된 변위응답의 시간이력을 Fig. 5에 나타내었다.

위 변위응답의 전체파형을 Gauss-Newton-Krylov 최적화 기법에 의해 역해석하였다. Fig. 6는 앞서 정의된 세 가지 탄성파속도 분포 중 연속적으로 변하는 분포(CP)를 재구성한 결과를 나타낸다. 역해석의 시작시 탄성파속도의 분포를 $c=250\text{m/s}$ 로 가정하였으며, Total Variation 정규화 기법에서의 정규화계수는 $R_c=10^{-7}$ 으로서 일정한 값을 사용하였다. Gauss-Newton(GN) 역해석 결과, 연속적으로 변하는 목표 탄성파속도 분포를 높은 정확도로 재구성할 수 있었다. 이 결과를 Kang 등(2011)이 사용한 Fletcher Reeves (FR) 최적화 기법을 이용하여 재구성한 결과와 비교하였으며, 재구성된 분포도에는 큰 차이가 없었다. 그러나 GN 역해석에는 35번의 반복계산이 소요된 반면, FR 역해석에는

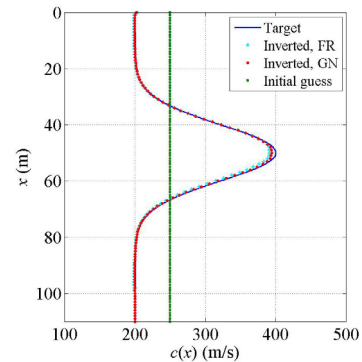


Fig. 6 Curved profiles(CP) inverted by Gauss-Newton (GN) and Fletcher Reeves (FR) optimization methods (GN: 35 iterations; FR: 1290 iterations)

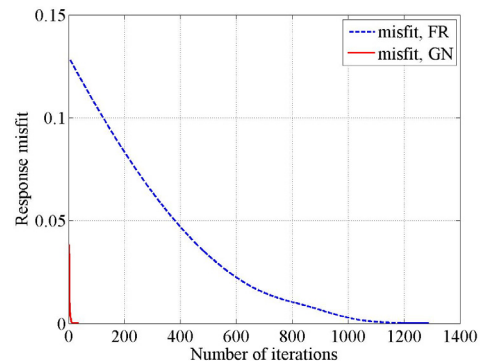


Fig. 7 Misfit variations in the inversion process for reconstructing the curved profile

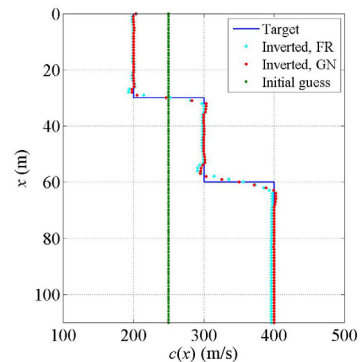


Fig. 8 Inverted 3-layer profiles obtained by Gauss-Newton(GN) and Fletcher Reeves (FR) optimization methods (GN: 175 iterations; FR: 1943 iterations)

1290번의 반복계산이 소요되어 GN 역해석의 수렴율이 현저히 높음을 알 수 있었다. Fig. 7은 역해석의 반복계산 횟수에 대한 목적함수(식 (1))의 변화를 나타낸 그래프로서, GN 역해석이 FR 역해석보다 빠르게 수렴함을 보여준다.

Fig. 5의 LP3, LP5 변위응답에 대해서도 Gauss-Newton 역해석을 실시하였다. Fig. 8과 9는 3층 탄성파속도 분포(LP3)를 재구성한 결과와 반복계산 횟수에 대한 목적함수의

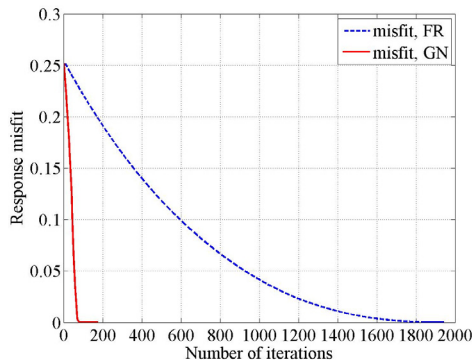


Fig. 9 Misfit variations in the inversion process for reconstructing the 3-layer profile

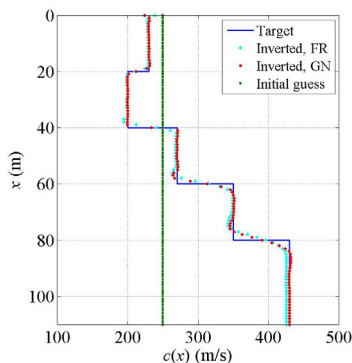


Fig. 10 Inverted 5-layer profiles obtained by Gauss-Newton(GN) and Fletcher Reeves(FR) optimization methods (GN: 74 iterations; FR: 1950 iterations)

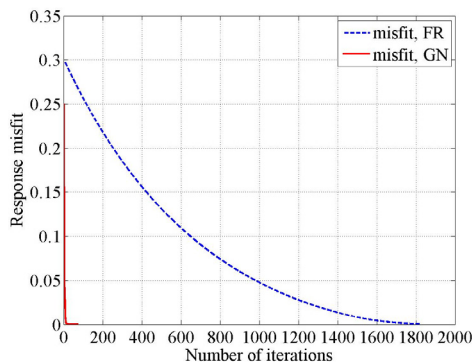


Fig. 11 Misfit variations in the inversion process for reconstructing the 5-layer profile

변화를 나타내고, Fig. 10과 11은 5층 분포(LP5)를 재구성한 결과와 그 때의 목적함수 변화를 나타낸다. 탄성파속도의 초기 가정값과 정규화계수는 각각 $c=250\text{m/s}$, $R_c=10^{-7}$ 으로서 이전과 동일하다. 두 분포도 모두 GN 역해석과 FR 역해석의 결과에 별 차이가 없었지만 수렴율에는 큰 차이를 보였다.

위의 세 가지 탄성파속도 분포도(CP, LP3, LP5)에 대한

Table 4 Objective functional and computational cost in the GN inversion

Profiles	Initial value of J	Final value of J	Reduction rate of J (%)	Total iteration numbers	Computing time (sec)
CP	0.0384	7.75e-6	0.0201	35	83
LP3	0.2519	2.81e-6	0.0011	175	311
CP5	0.2504	3.77e-6	0.0015	74	175

Table 5 Objective functional and computational cost in the FR inversion

Profiles	Initial value of J	Final value of J	Reduction rate of J (%)	Total iteration numbers	Computing time (sec)
CP	0.1292	2.83e-5	0.0219	1290	984
LP3	0.2537	6.33e-5	0.0249	1943	1829
CP5	0.3006	7.70e-5	0.0256	1950	1624

역해석 결과 GN 역해석의 수렴율이 FR 역해석에 비해 상당히 높다는 것을 알 수 있다. 그러나 GN 역해석은 높은 수렴율에 대한 반대급부로서 각 반복계산마다 탄성파속도 업데이트 \bar{c} 의 계산을 위해 Table 2의 알고리즘 2를 이용한 추가의 반복계산을 필요로 한다. 따라서 수렴율은 낮지만 그러한 과정이 필요없는 FR 역해석과 비교할 때 실제로 계산 소요시간(wall-clock time)이 단축될 지 확실하지 않다. 이를 검증하기 위하여 GN과 FR 역해석의 전체 소요시간을 측정해 비교해 보았다. Table 4와 5는 각 탄성파속도 분포를 재구성함에 있어 GN 역해석과 FR 역해석을 사용하였을 때 목적함수의 초기값과 최종값, 목적함수 최종값과 초기값의 비, 반복계산 수, 총 계산 소요시간을 나타낸다. 계산은 Intel Xeon 3.06GHz 프로세서의 워크스테이션 컴퓨터에서 실시하였다.

분석 결과, 각 탄성파속도 분포도를 재구성하는데 있어 GN 역해석의 소요시간이 FR 역해석 시간의 약 8.4%, 17.0%, 10.8%임을 알 수 있다. 또한 GN 역해석의 경우가 FR 역해석의 경우보다 목적함수가 더 많이 감소하여, 계산시간의 단축과 더불어 해의 정확도가 향상되었음을 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 반무한 고체영역의 표면에서 측정된 변위 응답의 시간영역 전체파형을 이용하여 내부의 탄성파속도 분포를 추정하는 1차원 Gauss-Newton 역해석 기법을 개발하고 그 성능을 평가하였다. 이러한 반무한 영역에서의 파동전파를 모델링하고 역해석을 수행하기 위하여 수치적 파동흡수 경계 조건인 PML을 도입하였다. Gauss-Newton 역해석 기법은 라그랑지안의 KKT 시스템을 Krylov subspace method를

이용해 풀어 탄성파속도의 업데이트를 구하며, 이 과정을 반복하여 탄성파속도의 최적 분포를 결정한다.

Gauss-Newton 전체파형 역해석 기법을 1차원 반무한 영역의 탄성파속도 분포 도출 문제에 적용해본 결과, 일반적인 Fletcher Reeves 최적화 기법을 사용한 경우에 비해 해의 정확도가 향상된 반면, 계산 소요시간은 80% 이상 감소하였다. 이러한 소요시간의 감소는 1차원 역해석보다는 고차원의 역해석 문제에서 더욱 큰 의미를 갖는다. 이러한 결과를 종합해 볼 때, PML을 경계로 하는 고차원 역해석 문제에 Gauss-Newton 기법을 적용하면 일반적인 Fletcher Reeves 최적화 기법을 사용하는 경우에 비해 역해석 결과가 개선되고 계산시간이 현저히 단축될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2013학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었습니다.

참 고 문 헌

Akcelik, V. (2002) Multiscale Newton-Krylov Methods for Inverse Acoustic Wave Propagation. PhD Dissertation, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA.

Akcelik, V., Biros, G., Ghattas, O. (2008) Parallel Multiscale Gauss-Newton-Krylov Methods for Inverse Wave Propagation, In *proceedings of the 2002 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, pp.1~15.

Epanomeritakis, I., Akcelik, V., Ghattas, O., Bielak, J. (2008) A Newton-CG Method for Large-scale Three-dimensional Elastic Full-waveform Seismic Inversion, *Inverse Problems*, 24(034015).

Kang, J.W., Kallivokas, L.F. (2010) The Inverse Medium Problem in 1D PML-truncated Heterogeneous Semi-infinite Domains, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 18(6), pp.759~786.

Kang, J.W., Kallivokas, L.F. (2011) The Inverse Medium Problem in Heterogeneous PML-truncated Domains Using Scalar Probing Waves, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1-4), pp.265~283.

Kang, J.W., Kallivokas, L.F. (2010) Mixed Unsplit-field Perfectly-matched-layers for Transient Simulations of Scalar Waves in Heterogeneous Domains, *Computational Geosciences*, 14(4), pp.623~648.

Saad, Y. (2000) Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd Edition, SIAM.

Vogel, C. (2002) Computational Methods for Inverse Problems, SIAM, Frontiers in Applied Mathematics.

요 지

본 논문에서는 물성이 균일하지 않은 반무한 고체영역의 탄성파속도 분포를 재구성하기 위한 시간영역 Gauss-Newton 전체파형 역해석 기법을 소개한다. 반무한 영역을 유한 계산영역으로 치환하기 위하여 유한영역의 경계에 수치적 파동흡수 경계조건인 perfectly-matched-layers(PMLs)를 도입하였다. 이 역해석 문제는 PML을 경계로 하는 영역에서의 탄성파동방정식을 구속조건으로 하는 최적화 문제로 성립되며, 표면에서 측정된 변위응답과 혼합유한요소법에 의해 계산된 응답간의 차이를 최소화함으로써 미지의 탄성파속도 분포를 결정한다. 이 과정에서 Gauss-Newton-Krylov 최적화 알고리즘과 정규화기법을 사용하여 탄성파속도의 분포를 반복적으로 업데이트하였다. 1차원 수치예제들을 통해 Gauss-Newton 역해석으로부터 재구성된 탄성파속도의 분포가 목표값에 충분히 근사함을 보였으며, Fletcher Reeves 최적화 알고리즘을 사용한 기존의 역해석 결과에 비해 수렴율이 현저히 개선되고 계산 소요시간이 단축됨을 확인할 수 있었다.

핵심용어 : Gauss-Newton 전체파형 역해석, perfectly-matched-layers, 탄성파동방정식을 구속조건으로 하는 최적화 문제, 계산 소요시간