

인체관절의 회전중심 추정을 위한 구적합법의 비교

김진욱¹

¹군산대학교 자연과학대학 체육학과

The Comparison of Sphere Fitting Methods for Estimating the Center of Rotation on a Human Joint

Jin-Uk Kim¹

¹ Department of Physical Education & Sports, College of Natural Science, Kunsan National University, Gunsan, Korea

Received 28 April 2012; Received in revised form 04 March 2013; Accepted 06 March 2013

ABSTRACT

The methods of fitting a circle to measured data, geometric fit and algebraic fit, have been studied profoundly in various areas of science. However, they have not been applied exactly to a biomechanics discipline for locating the center of rotation of a human joint. The purpose of this study was to generalize the methods to fitting spheres to the points in 3-dimension, and to estimate the center of rotation of a hip joint by three of geometric fit methods (Levenberg-Marquardt, Landau, and Späth) and four of algebraic fit methods (Delogne-Kása, Pratt, Taubin, and Hyper). 1000 times of simulation experiments for flexion/extension and ad/abduction at an artificial hip joint with four levels of range of motion (10, 15, 30, and 60°) and three levels of angular velocity (30, 60, and 90°/s) were executed to analyze the responses of the estimated center of rotation. The results showed that the Späth estimate was very sensitive to the marker near the center of rotation. The bias of Delogne-Kása estimate existed in an even larger range of motion. The Levenberg-Marquardt algorithm of geometric fit and the Pratt of algebraic fit showed the best results. The combination of two methods, using the Pratt's estimate as initial values of the Levenberg-Marquardt algorithm, could be a candidate of more valid estimator.

Keywords : Center of Rotation, Geometric Fit, Algebraic Fit

I. 서 론

실험에 의해서 측정된 자료에 원(circle)과 같은 기하도형을 적합(fitting)시키는 것은 패턴인식과 이미지처리(Ahn, Rauh & Warnecke, 2001; Chan & Thomas, 1995; Chernov & Lessort, 2005), 최적화이론(Chan, Lee & Thomas, 2005; Coope, 1993; Späth, 1998), 물리학(Moura & Kitney, 1991; Nievergelt, 1994) 그리고 마이크로웨이브 공학(Kása, 1976)과 같은 다양한 분야에서 사용된다. 이러한 적합법은 최소제곱(least squares) 또는 최적화(optimization)

에 의해서 원의 중심(center)과 반지름(radius)을 추정한다. 운동역학(biomechanics)에서는 주로 견관절과 고관절 같은 구관절(spherical joint)의 중심을 알아내기 위해서 구적합(sphere fit)이 많이 적용되어 왔으며(Chang & Pollard, 2007; Gamage & Lasenby, 2002; Halvorsen, Lesser & Lundberg, 1999; Piazza, Okita & Cavanagh, 2001) 2차원의 원에서 3차원의 구로 확장된 것이라 할 수 있다.

구관절중심인 회전중심(center of rotation)은 두 분절이 연결되어 서로 상대적인 운동이 '0'인 피벗지점으로 정의될 수 있으며 자유도 2 이상의 관절에 존재한다. 인체운동의 분석에서 회전중심의 필요성은 다음과 같다. 첫째, 근모멘트에 의해서 근력을 구하기 위해서는 모멘트암(moment arm)을 알아야하며 회전중심의 위치가 필요하다. 둘째, 인접분절의 반력(joint reaction force)의 작용점이 회전중심이다. 근력과 더불어 반력의 모멘트도 계산할 수 있

다. 셋째, 회전중심은 분절좌표계를 정의하는데(Wu et al., 2002; Wu et al., 2005) 필요하다. 고관절의 중심은 대퇴좌표계를 정의하는데 견관절중심은 상완좌표계를 정의하는데 사용된다. 마지막으로 임상학적으로 컴퓨터를 이용한 정형외과의 수술에 있어서 기본 정보가 된다(De Momi et al., 2009).

원을 자료에 적합시키는 여러 알고리즘(algorithm)은 위와 같은 다양한 분야에서 서로 독립적으로 개발되어 왔는데 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 기하적합(geometric fit)과 대수적합(algebraic fit)이다(Ahn et al., 2001; Al-Sharadqah & Chernov, 2009; Gander, Golub & Strebel, 1994). 기하적합이란 자료와 원의 기하적거리의 제곱을 최소가 되도록 하는 것이며, 이외의 방법을 대수적합이라 하는데 대개 파라미터(parameter)를 이용하여 표현한 대수식의 제곱을 최소가 되게 한다. Piazza et al.(2001)의 방법이 기하적합, Chang 과 Pollard(2007), Gamage 와 Lasenby(2002), 그리고 Halvorsen et al.(1999)의 방법이 대수적합에 속한다.

기하적합은 최대우도(maximum likelihood)와 동일한 방법으로 추정값이 편의(bias)되지 않으며 가장 정확한 방법(best fit)으로 일반적으로 여겨지고 있다. 그러나 반복적인 계산을 이용해야하는 비선형식이며 초기값의 선택에 따라 지역최소점(local minima)으로 수렴할 가능성, 그리고 노이즈(noise)가 클 경우 느리게 수렴하는 단점이 있다. 따라서 Delogne(1972)는 근사해(approximation)를 구하는 방법을 개발했는데 이 대수적합은 선형식으로 반복계산 없이 바로 해를 구할 수 있기(closed-form)때문에 아주 간단하다. 그러나 추정량의 편의가 심한 것으로 잘 알려져 있다(Ahn et al., 2001; Chan, Elhalwagy & Thomas, 2002; Chan et al., 2005; Chernov & Lesort, 2004; Coope, 1993; Gander et al. 1994).

기하적합은 반복적인 계산에 있어 빠르고 정확하게 추정값으로 수렴하는 것이 관건이며 여러 학자들에 의해서 다양한 수치적 방법이 제안되었으나(Chan et al., 2005; Coope, 1993; Gander et al., 1994; Li et al., 2011; Umbach & Jones, 2003) 우수한 결과를 보인 것은 Lavenberg-Marquardt의 알고리즘, Landau(1987), 그리고 Späth(1998)의 연구를 들 수 있다(Cheernov & Lesort, 2005; Zelniker & Clarkson, 2006). 대수적합은 간편한 계산의 장점을 살리고 편의를 줄이기 위해서 그래디언트 대수적합(gradient algebraic fit)의 방법을 Pratt(1987), Taubin(1991), 그리고 Al-Sharadqah 와 Chernov(2009)가 각각 제안하여 우수한 결과를 나타냈다. 이상은 Späth(1998)의 연구만이 3차원 구적합이며 나머지는 모두 2차원의 원적합에 적용시킨 연구들이다.

3차원 인체의 운동역학에 적용된 기하적합은(Camomilla, Cereatti, Vannozzi, & Cappozzo, 2006; Marin, Mannel, Claes, & Dürselen, 2003; Piazza et al., 2001; Siston &

Delp, 2006) 마커의 독립적인 움직임을 고려하지 않은 마커들의 평균값을 이용한 방법이다. Chang과 Pollard(2007)의 연구에서 사용된 기하적합의 해는 상용 프로그램 함수에 내장된 간단한 알고리즘을 사용하여 구했고, Ehrig, Taylor, Duda와 Heller(2006) 그리고 Lempereur et al.(2010)의 연구에서 사용된 기하적합의 알고리즘은 알 수 없다. 따라서 타당하고 신뢰로운 추정값을 보장할 수 없으며 올바르게 적용되었다고 말하기 어렵다. Lempereur et al.(2010)의 연구는 견관절 중심을 찾아내는 방법을 인체에 직접 적용시켜 비교하였는데 의의가 있으나 타당도에 있어서 기하적합을 gold standard로 놓고 비교하였는데 문제를 발견할 수 있다. 비록 기하적합은 다양한 방법에서 벤치마크로서 사용되어 왔으나(Ahn et al., 2001) 전술한바와 같이 기하적합이 모든 상황에서 맞지는 않기 때문이다. 대수적합은 Gamage와 Lasenby(2002)에 의해서 3차원의 인체분석에 소개되었으며 파라미터를 이용한 것이 아니라 벡터를 이용하여 직접 해를 구한 것으로서 추정방법은 Delogne(1972)의 방법과 완전 동일하다. 따라서 상황에 따라 편이가 발생할 가능성이 크다. 이에 Halvorsen(2003)은 편의를 보정하는 방법을 제안하였으며, Chang 과 Pollard(2007)는 진보된 대수적합인 Pratt(1987)의 방법을 여러 마커의 3차원의 구의 운동으로 적용시켜 분석한 바 있다. 그러나 Halvorsen(2003)의 방법은 반복적인 계산이 사용되고 있어 대수적합의 장점을 살리지 못한 방법이라 할 수 있다.

본 연구는 많은 선행연구가 이루어진 원 적합법의 확장으로 3차원 구 적합에 관한 것이며 인체의 고관절이나 견관절 같은 구관절 관절중심의 추정에 올바르게 적용하여 비교·분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 가상의 고관절에서 운동범위, 각속도를 달리한 회전운동을 생성하여 가장 타당한 기하적합과 대수적합은 어떤 것인지 알아보고 기하적합과 대수적합 중 어떠한 방법을 사용하는 것이 좋은가에 대해서도 논의해 보고자 한다.

II. 연구 방법

고관절 회전중심의 위치는 뼈의 랜드마크에 부착된 마커들의 분절 간 상대운동에 의해서 구한다. 이는 골반좌표계에서 관측된 대퇴 마커들의 운동에 해당된다. 골반좌표계의 원점은 LASIS(left anterior superior iliac spine)와 RASIS(right anterior superior iliac spine)의 중간지점이라 가정하였다. 마커들은 회전운동을 하며 각기 다른 구의 궤적을 이루고 궤적에 각각의 구를 적합시켜 구들의 공통중심과 각각의 반지름을 추정해 내는 것이다. 공통중심이 바로 본 연구의 관심 대상인 회전중심이다. 이를 위해 시뮬레이션 실험을 수행하였으며 생성된 자료는 골반좌표계에

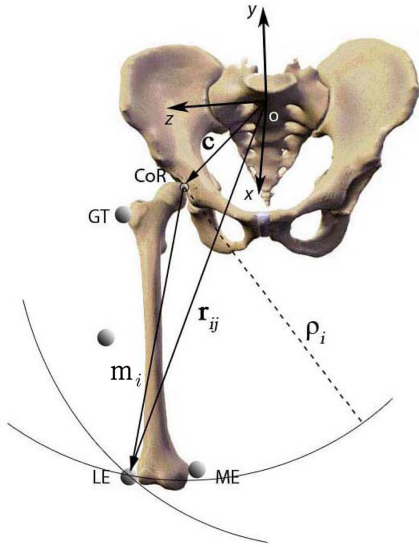


Figure 1. Center of rotation(CoR) at hip joint and four markers on thigh with respect to pelvic coordinate system

서 관측된 대퇴마커라 가정하였다. 사용된 좌표계는 직교 좌표계로 +x축은 전방, +y축은 상방, 그리고 +z축은 우측 방향이다(Figure 1).

1. 통계모형

관측된 $r_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})^T$ 를 대퇴에 부착된 번째 마커 ($i=1, \dots, m$)와 j 번째 프레임($j=1, \dots, n$)의 위치벡터, $c = (x, y, z)^T$ 는 회전중심벡터, 그리고 m_i 는 회전중심에서부터 i 번째 마커까지의 벡터라 할 때 다음과 같은 통계적 모형을 고려할 수 있다.

$$r_{ij} = c + R_1 R_2 R_3 m_i + \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

여기서 R_1, R_2, R_3 는 x (내/외전), y (내/외측회전), z (굴곡/신전)축에 해당되는 오일러각 변환행렬이다. 예를 들어 R_1 은

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_j & -\sin \phi_j \\ 0 & \sin \phi_j & \cos \phi_j \end{bmatrix} \tag{2}$$

이며 ϕ_j 는 설명변수(explanatory variable)로 θ_j, ψ_j 는 각각 R_2, R_3 에 해당된다. i 번째 마커 m_i 는 회전운동을 하여 구의 궤적을 이루며 $\rho_i = \|m_i\|$ 는 이 궤적에 적합되는 구의 반지름이다. ε_{ij} 는 오차(노이즈)로 $\varepsilon_{ij} \sim N(0, I\sigma^2)$ 이며(I 는 3×3 단위행렬), $Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ik}) = 0 (i \neq k)$ 이다. 이는 Chan(1965)의 2차원 원에 대한 통계적 모형을 3차원으로 확장한 것으로 구면좌표계의 회전자유도 2와는 달리 자유도 3에 해

당하는 회전운동을 모두 포함하고 있다.

2. 적합법

표본벡터 r_{ij} 가 주어졌을 때 추정하고자 하는 구의 중심과 반지름모수는 각각 c, ρ_i 이며 운동역학에서는 회전중심인 c 에 더 관심을 가진다(Figure 1).

1) 기하적합

식 (1)의 오차를 최소화 하는 식은 다음과 같이 표본벡터 r_{ij} 에서 회전중심 c 까지의 기하적 거리(geometric distance)에서 반지름을 뺀 값을 최소화 한다.

$$F_G(c, \rho_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\|r_{ij} - c\| - \rho_i)^2 \tag{3}$$

r_{ij} 에서 추정될 구까지는 수직(orthogonal)거리이자 최소거리이다. 비선형식이기 때문에 c 와 ρ_i 를 구하기 위해 반복적인 계산이 필요하다.

(1) LM(Levenberg-Marquardt)

식 (3)은 $d_{ij} = \|r_{ij} - c\| - \rho_i$ 라 할 때 1차 테일러급수(Taylor series)에 의해서 다음과 같이 h 의 선형함수로 근사시킬 수 있는데

$$\hat{F}_{LM}(c_0 + h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [d_{ij}(c_0) + J_{ijh} \cdot h]^2 \tag{4}$$

여기서 J_{ij} 는 회전중심 초기값 c_0 에 대한 $d_{ij}(c)$ 의 그래디언트(gradient) $\nabla d_{ij}(c_0)$ 로

$$J_{ij} = \nabla d_{ij}(c_0) = -(r_{ij} - c_0) / \|r_{ij} - c_0\| \tag{5}$$

이다. 식 (4) $\frac{\partial \hat{F}_{LM}}{\partial h} = 0$ 을 업데이트식을 추가하여 정리하면 다음과 같다(Gavin, 2011; Shakarji, 1998).

$$(J_0^T J_0 + \lambda D^T D)h = J_0^T d(c_0) \tag{6}$$

여기서 J_0 는 벡터 J_{ij} 를 행으로 하는 행렬, D 는 가중행렬(weight matrix)로 $D^T D = [I + \text{diag}(J_0^T J_0)]$ (I 는 3×3 단위행렬, diag 는 대각행렬), 그리고 $\lambda \geq 0$ 는 Levenberg-Marquardt 파라미터라 한다. 식 (6)에서 h 를 구하여 새로운 값 $c_{new} = c_0 + h$ 를 계산한 후 수렴하는지 살펴보아 ($F_G(c_{new}) < F_G(c_0)$) 충분히 수렴하면 계산을 멈춘다(는 아래의 식 (8) 사용). h 의 방향에 따라 파라미터의 선택이 이루어진다. 본 연구의 파라미터는 증가 10, 감소 .04를 이용하였다.

(2) Landau

이것은 Landau(1987)에 의해 개발된 것으로 스칼라 값인 반지름을 이용하지 않고 반지름에 벡터를 곱해 반지름벡터를 고려한 모형이라 할 수 있다.

$$F_L(c, \rho_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\|r_{ij} - c\| - u_{ij}\rho_i)^2 \quad (7)$$

여기서 u_{ij} 는 $r_{ij} - c$ 방향의 단위벡터이다($u_{ij} = (r_{ij} - c) / \|r_{ij} - c\|$). $\frac{\partial F_L}{\partial \rho_i} = 0$ 하여 정리하면,

$$\rho_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|r_{ij} - c\| \quad (8)$$

이며 이 반지름 추정량은 기하적합과 대수적합 모든 방법에 걸쳐 동일하다. 또한 $\frac{\partial F_L}{\partial c} = 0$ 하여 정리하면 의 추정량은 다음과 같다.

$$c = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} - \sum_{j=1}^n \rho_i u_{ij} \right) \quad (9)$$

초기값 c_0 를 선택하면 식 (8)에 의해서 반지름이 계산된다. 그리고 계산된 반지름과 초기값을 식 (9)에 대입하면 새로운 c_{new} 를 구할 수 있다. 만일 $\|c_0 - c_{new}\|$ 이 충분히 수렴하고 조건을 만족시키면 계산을 멈춘다. 이 방법은 역행렬을 구하지 않기 때문에 singularity에 대한 걱정이 없다.

(3) Späth

식 (3)의 구를 파라미터를 이용하여 표현한 것으로 다음과 같다(Späth, 1998).

$$\begin{aligned} F_S(x, y, z, \rho_i, \theta_{ij}, \phi_{ij}) \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij} - x - \rho_i \sin \theta_{ij} \sin \phi_{ij})^2 \\ + (y_{ij} - y - \rho_i \cos \theta_{ij})^2 \\ + (z_{ij} - z - \rho_i \sin \theta_{ij} \cos \phi_{ij})^2] \end{aligned} \quad (10)$$

이는 x, y, z, ρ 에 대해 선형식이므로 $\frac{\partial F_S}{\partial x} = \frac{\partial F_S}{\partial y} = \frac{\partial F_S}{\partial z} = \frac{\partial F_S}{\partial \rho_i} = 0$ 하여 정리하면 x, y, z, ρ_i 추정량을 쉽게 구할 수 있지만 θ, ϕ 를 알아야만 한다. 추가적으로 $\frac{\partial F_S}{\partial \theta} = \frac{\partial F_S}{\partial \phi} = 0$

하면 θ, ϕ 추정량을 구할 수 있다. 두 식에 서로의 미지수가 포함되어 있으므로 반복적인 계산에 의해서 해를 구해야 한다. 초기값 c_0 로 초기각도 θ_0, ϕ_0 를 계산한 다음 새

로운 c_{new} 를 구할 수 있으며 만일 $F_S(c_{new}) < F_S(c_0)$ 로 충분히 수렴하면 계산을 멈춘다.

2) 대수적합

(1) DK(Delogne-Kåsa)

식 (3)은 계산이 어렵기 때문에 Delogne(1972)가 수정된 최소제곱 방법을 제안하였으며 Kåsa(1976)가 이를 채택하여 추가적으로 오차분석을 수행한 것으로 Delogne-Kåsa라 불린다. 이 방법은 기하적 거리에 제곱을 취하여 파라미터를 이용해 선형식으로 변환한 것으로 반복계산 없이 바로 해를 구할 수 있다.

$$F_A(c, \rho_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\|r_{ij} - c\|^2 - \rho_i^2)^2 \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ((x_{ij} - x)^2 + (y_{ij} - y)^2 + (z_{ij} - z)^2 - \rho_i^2)^2$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2 - 2xx_{ij} - 2yy_{ij} - 2zz_{ij} + x^2 + y^2 + z^2 - \rho_i^2)^2$$

$$g_i = \rho_i^2 - x^2 - y^2 - z^2 \text{라 놓으면}$$

$$F_{DK}(c, g_i)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ((x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2 - 2xx_{ij} - 2yy_{ij} - 2zz_{ij} - g_i)^2) \quad (12)$$

x, y, z 에 대해 선형식이므로 $\frac{\partial F_{DK}}{\partial x} = \frac{\partial F_{DK}}{\partial y} = \frac{\partial F_{DK}}{\partial z} = \frac{\partial F_{DK}}{\partial g_i} = 0$

을 정리하여 풀면 된다. 이 추정값은 Gamage와 Lasenby(2002)와 완전 동일하다. 그러나 이들은 파라미터를 이용한 스칼라식을 이용하지 않고 벡터를 이용해 바로 해를 구했으며 계산이 약간 더 복잡하다.

(2) Pratt

위의 식 (11)은 더 많은 파라미터를 이용하여 $a_{ij} = x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2, D = -2x, E = -2y, F = -2z, G_i = x^2 + y^2 + z^2 - \rho_i$ 이라 할 때 다음과 같이 표현이 가능하다(Gander et al., 1994; Pratt, 1987).

$$F_A(A, D, E, F, G_i)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Aa_{ij} + Dx + Ey + Fz + G_i)^2 \quad (13)$$

$A=1$ 일때 D, E, F, G_i 로 미분하여 D, E, F, G 의 선형방정식을 풀면 x, y, z, ρ 를 간단하게 계산할 수 있으며 앞의 DK 추정값과 동일하다. Pratt(1987)은 이 결과를 기

하적합과의 비교를 통해 기하적합의 곡률(curvature)이 작아질 때 편이가 심하게 나타나는 것을 관찰하여 이를 보정해주고자 하였다. 이는 식 (13)에 구속조건(constraint)을 주는 것으로 m 개의 마커를 고려한 구속조건은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^n (D^2 + E^2 + F^2 - 4AG_j) = 1 \quad (14)$$

파라미터벡터를 $u = (A \ D \ E \ F \ G_1 \dots G_m)$, i 번째 마커의 모든 n 프레임의 위치를 행렬을 $S_i(n \times 4)$

$$S_i = \begin{bmatrix} a_{ij} & x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{in} & x_{in} & y_{in} & z_{in} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서 $a_{ij} = x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2$, 모든 m 개의 마커에 대한 행렬을 $S(mn \times (4+m))$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서 1은 n 개의 모든 성분이 1인 열벡터, 0은 n 개의 모든 성분이 0인 열벡터이다. 그러면 식 (13)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_A = (Su)^T(Su) = u^T S^T S u = u^T M u \quad (17)$$

여기서 $M = S^T S$ 이다. 또한 식 (14)의 구속조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u^T C_P u = 1 \quad (18)$$

여기서 행렬 $CP((m+4) \times (m+4))$ 는

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2_1 & \dots & -2_m \\ 0 & m & & & & & \\ 0 & m & & 0 & & & \\ 0 & & m & & & & \vdots \\ -2_1 & & & 0 & & & \\ \vdots & 0 & & & \ddots & & \\ -2_m & \dots & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

이때 구속조건을 가지는 최소화문제는 다음과 같다(Chang & Pollard, 2007; Chernov & Lesort, 2005).

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && u^T M u && (20) \\ & \text{subject to} && u^T C_P u = 1 \end{aligned}$$

이 식은 일반화 고유값(generalized eigenvalue)에 해당되는 문제로서

$$M u = \lambda C_P u \quad (21)$$

이며 u 의 최적의 해는 가장 작은 양(positive)의 고유값에 해당되는 고유벡터(Chernov & Lesort, 2005)이지만 노이즈가 포함된 경우 행렬 M 은 positive definite이므로 절대 값이 가장 작은 고유값에 해당되는 고유벡터(Rangarajan & Kanatani, 2009)만으로 충분한 해를 구할 수 있다.

(3) Taubin

이 방법은 Taubin(1991)에 의해서 제안된 것으로 Pratt의 최적화문제와 거의 동일하다. m 개의 마커를 고려한 구속조건은

$$4A^2 I_a + 4A D I_x + 4A E I_y + 4A F I_z + m n D^2 + m n E^2 + m n F^2 \quad (22)$$

이며 여기서 $I_a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $I_x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$, $I_y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}$, $I_z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij}$ 이다. 위의 식 (22)에 해당되는 Taubin의 구속조건 행렬 C_T 는

$$C_T = \begin{bmatrix} 4I_a & 2I_x & 2I_y & 2I_z & 0_1 & \dots & 0_m \\ 2I_x & m n & & & & & \\ 2I_y & & m n & & & & 0 \\ 2I_z & & & m n & & & \vdots \\ 0_1 & & & & 0 & & \\ \vdots & 0 & & & & \ddots & \\ 0_m & \dots & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

이며 이후의 과정은 Pratt과 동일하다.

(4) Hyper

이 방법은 Al-Sharadqah와 Chernov(2009)가 제안한 것으로 Hyper는 더 좋은 적합결과를 얻고자 하는 hyperaccurate의 줄임말이다. 구속조건을 제외한 모든 방법 역시 Pratt의 최적화문제와 동일하다. 구속조건은 행렬은 Pratt과 Taubin의 절충형으로

$$C_H = 2C_T - C_P \quad (24)$$

이다. Pratt, Taubin, Hyper의 방법으로 벡터 c 가 추정되면 회전중심은 다음과 같이 구할 수 있다(Chernov & Lesort, 2005; Gander et al., 1994).

$$c = -\frac{1}{2A}(D E F)^T \tag{25}$$

3. 실험절차

고관절 회전중심을 추정하는 시뮬레이션 실험절차는 다음과 같다. <Figure 1>과 같이 골반좌표계에서의 고관절 회전중심의 위치는 o 로 설정하였다. 회전중심으로부터 오른쪽 대퇴에 부착된 4개 마커의 초기위치는(좌표계 회전이 없는 해부학적 자세) $m_1=(0, 0, 20)^T$, $m_2=(0, -20, 20)^T$, $m_3=(0, -40, 25)^T$ 로 하였으며 각각 대전자(greater trochanter, GT), 외측중간부분, 외측과(lateral epicondyle, LE), 내측과(medial epicondyle, ME)에 해당 된다(단위 : cm). 수행운동은 초기 굴곡상태에서 신전 그리고 내전 상태에서 외전으로 각각 교차된 운동으로 분석범위는 하나의 운동범위(amplitude) 자료만 선택하였다. 운동범위(range of motion, ROM)는 굴곡/신전(ψ), 내/외전(ϕ) 모두 10, 15, 30, 60°로 네 개의 수준을 설정하였다. 표본수에 해당되는 각속도는 세 개의 수준이며 표본화주파수(sampling frequency) 60 Hz에 해당되는 각속도는 각각 30, 60, 90°/s로 이는 각각 프레임 간 .5, 1, 1.5°의 각변위에 해당된다. 운동범위와 각속도 두 요인의 교차설계에 의한 12개의 처리에 각각 번의 자료를 생성하였다. 자료의 생성은 식 (1)의 모형에 근거하여 오차를 추가하였으며 마커의 측정오차와 피부운동오차를 고려한 표준정규분포 표준편차는 각각 .1, .1(Ehrig et al., 2007; Gamage & Lasenby, 2002)로 하

였다(식 1의 ϵ_{ij}). 기하적합의 알고리즘은 $\epsilon=10^{-8}$ 일 때까지 반복계산을 수행하도록 하였으며 초기값은 DK의 추정값을 이용하였다. 그리고 본 연구에서는 운동역학에서 사용되는 또 다른 회전중심 추정방법인 변환법(transformation approach)과의 비교도 수행하였다. 이는 Woltring(1990)의 순간회전축들의 가장 가까운 피벗지점을 찾는 것으로 여기에서 사용되는 회전행렬과 순간회전축 추정은 Kim(2011)에서 사용된 방법을 이용하였으며 이를 pivot이라 하였다. 추정된 회전중심벡터 \hat{c}_k 의 평가는 RMSE(root mean square error)를 이용하였다.

$$\sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \|\hat{c}_k - c\|^2}$$

모든 자료의 처리는 MATLAB ver 7.3(The MathWorks)을 이용하였다.

III. 결 과

운동범위와 각속도의 크기에 따른 각각 1000번의 시뮬레이션 실험에 의한 RMSE는 <Table 1, Figure 2>와 같다. 실험결과 범위는 .08773-19.6746 로 나타났다. Späth의 추정값은 결과가 가장 안 좋은데(범위 : 14.0530-19.6746) 이는 회전운동시 회전축 근처에 위치하고 있는 마커 m_1 때문이다. 이 마커에 민감한 반응을 하여 엉뚱한 추정결과가 나타난 것이며, 결과에는 나타나있지 않지만 마커 m_1 을 제외한 나머지 마커로 추가적으로 실험한 결과 다른 추정값과 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서

Späth는 이상값(outlier)에 아주 민감한 추정방법이라 할 수 있다. 회전중심에 대한 모든 추정벡터 RMSE는 운동범위가 커짐에 따라 줄어들었다. 그러나 Pivot은 다른 방법

Table 1. RMSE of the estimated center of rotation by fitting methods over 1000 sample (unit : cm)

ROM	LM	Landau	Späth	DK	Pratt	Taubin	Hyper	Pivot
10	30	1.1735	1.1667	18.6314	2.6638	1.1666	1.1666	10.3561
	60	1.5655	1.5617	17.4796	2.5549	1.5617	1.5617	5.1136
	90	2.0063	1.9956	14.0530	2.8679	1.9956	1.9956	3.5056
15	30	.6403	.6394	19.6746	1.3348	.6394	.6394	10.4005
	60	.8911	.8874	19.6555	1.3539	.8874	.8874	4.9602
	90	1.0281	1.0242	19.6441	1.3848	1.0243	1.0243	2.8552
30	30	.2392	.2389	18.8352	.3895	.2389	.2389	10.0896
	60	.3230	.3221	18.8167	.4392	.3221	.3221	4.7403
	90	.3897	.3885	18.7992	.4766	.3887	.3887	2.6200
60	30	.08812	.08773	16.3460	.1151	.08798	.08798	9.9962
	60	.1244	.1234	16.2813	.1422	.1245	.1245	4.5791
	90	.1516	.1499	16.2105	.1670	.1520	.1520	2.4344

Note. ROM = range of motion(°); = angular velocity(°/s)

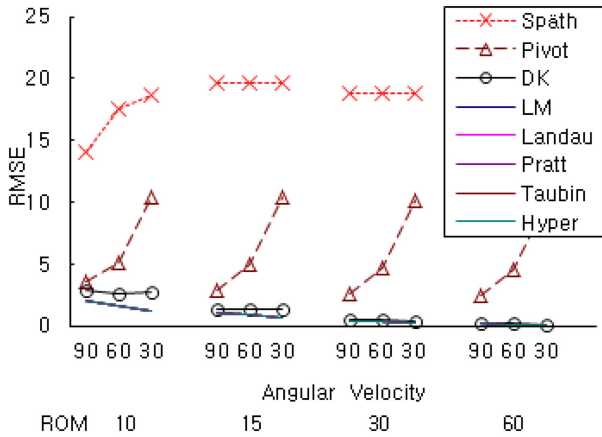


Figure 2. Profile plots of RMSE of the estimated center of rotation

과 비교해 보았을 때 RMSE의 감소율이 아주 작게 나타났다. 또한 Pivot을 제외한 모든 방법의 RMSE가 각속도가 작을수록 줄어들었다. Pivot에 의한 방법은 반대로 각속도가 작아짐에 따라 RMSE가 커지며 각속도뿐만 아니라 모든 운동범위에서 다른 방법과 비교해 보았을 때 값이 크다(범위 : 2.4344-10.3561 cm). 기하적합의 경우 LM과 Landau는 거의 비슷한 결과를 얻었고 대수적합의 경우 Pratt, Taubin, Hyper는 거의 동일한 결과를(소수 넷째자리의 유효숫자) 나타냈다(Table 1).

DK는 예상한대로 운동범위가 작을 경우 RMSE가 크게 나타나 편의추정량임을 알 수 있으며 운동범위가 커질수록 RMSE가 작아져 편의가 줄어들지만 LM, Pratt, Taubin, Hyper와 비교해 보았을 때 유사해지거나 더 작아지는 않았다. 가장 좋은 결과를 보인 것은 운동범위가 60°이고 각속도가 30%일 때 기하적합은 LM과 Landau, 대수적합은 Pratt, Taubin, 그리고 Hyper이며 오차는 약 .09 cm이다.

IV. 논 의

본 연구는 다양한 분야에서 비교적 심도 있는 연구가 이루어지고 있는 원의 적합법을 확장하여 3차원 구에 적합시키는 것으로 인체 관절중심을 추정하는데 올바르게 적용하여 서로 비교하는데 있다.

적합법 대부분의 추정값은 운동범위가 커질수록 더욱 타당한 결과를 나타냈다. 큰 운동범위의 회전운동은 적합하기에 좋은 더 확실한 구를 형성하기 때문이다. Späth의 RMSE는 아주 큰데 그 이유는 마커 때문이다. 여기에 해당되는 GT는 굴곡/신전시에 움직임이 작게 나타나고 Späth의 추정해야할 모수중의 하나인 각도의 계산에 아주 민감하게 영향을 미친 것으로 생각된다. 또한 대부분 각속도가

작을수록 우수한 결과를 보였는데 이는 각속도가 작아지면 프레임 수가 증가하여 표본수가 많아지고 이에 따라 오차가 줄어들어 추정값의 일치성(consistency)을 나타낸 결과라 할 수 있다. 그러나 반대로 Pivot은 각속도가 작을수록 안 좋은 결과를 나타냈다. Pivot의 경우는 운동이전과 이후의 회전변위가 작을 경우 회전행렬이 singularity에 가깝기 때문이다. 따라서 운동범위가 커져도 오차가 크게 작아지지 않았다. Kim(2011)의 연구에 의하면 타당한 회전축이 추정되려면 각변위가 .025 rad(= 1.4324°) 이상이어야 한다고 하였으나 본 연구에서 설정한 각변위는 대부분 이보다 더 작기 때문에 결과가 안 좋다. 본 연구에서는 또 다른 변환법인 Ehrig et al.(2006), Piazza, Erdemir, Okita와 Cavanagh(2004), 그리고 Siston과 Delp(2006)의 방법들은 고려하지 않았다. 이 변환법을 적용시키려면 양쪽 분절의 좌표계가 필요하기 때문이다. 물론 대퇴에 네 개의 마커가 부착되어 있기 때문에 세 개의 마커로 임시 좌표계를 정의할 수 있지만(Piazza et al., 2004) 마커에 의해서 좌표계를 정의하면 오차가 개입되고(Kim, 2011), 또는 강체 마커 클러스터(Cappozzo, Catani, Croce & Leardini, 1995)를 부착하려면 추가적인 장치가 필요하기 때문이다. Cereatti, Donati, Camomilla, Margheritini와 Cappozzo(2009)의 연구에 의하면 사체를 가지고 Ehrig et al.(2006)의 변환법과 Halvorsen(2003)의 편의를 보정한 대수적합을 적용하여 비교하였는데 변환법이 안 좋게 나왔으며 심지어 추정의 오차가 대수적합에 비해 두 배나 큰 결과를 보였다. MacWilliams(2008)의 연구도 모형로봇으로 실험한 결과 DK가 Siston과 Delp의 변환법에 비해 우수한 결과를 보여 이를 방증한다. 본 연구는 또한 회전(circumduction)은 고려하지 않았다. 식 (1)의 모형에 의해서 자료를 생성하기 어렵기 때문이다. Camomilla et al.(2006)은 복합적인 다양한 운동으로 여러 추정방법을 비교한 바 있으나 본 연구와 같이 두 가지 운동만으로도 각 방법의 장단점을 찾아내기는 충분하였다. 그러나 Begon, Monnet, 과 Lacouture(2007)의 연구에 의하면 굴곡/신전, 내/외전과 함께 회전운동을 추가하여 추정하면 더 좋은 결과가 나타났기 때문에 실제로 인체에 적용시킬 경우에는 세 가지 운동을 모두 사용하는 것이 좋을 것이다. 회전중심을 추정하기 위한 운동은 급작스러운 최대운동범위를 수행하는 것은 좋지 않다. Begon et al.(2007)은 완전한 운동범위 보다는 약간 제한된 운동(정도의 굴곡/신전, 정도의 내/외전)이 더 타당하다고 하였다. 굴곡/신전, 내/외전은 전후좌우로 넓은 분포를 가지기 때문에 상하의 값 오차가 크다는 것도 유의해야할 것이다.

이론적으로 보면 기하적거리를 최소화하는 것은 최대우도와 동일하기(equivalent) 때문에(Chan, 1965; Chan et al., 2005) 추정량의 통계적 특성을 만족시키는 기하적합이 절

대적으로 우수한 방법인 듯 하다. 그러나 Moura 와 Kitney(1991)가 제안한 대수적합도 기하적, 통계적, 수치적으로 타당하다는 것을 Nievergelt(1994)가 증명하였으며, Chernov와 Lesort(2004), 그리고 Zelniker와 Clarkson(2005)의 대수적합 추정량의 이론적 특성을 연구한 논문을 보면 접근적 특성보다는 분산이 0에 접근함에 따라 Pratt과 Taubin의 방법이 기하적합과 유사하게 나왔으며 통계적으로 최적화되었음을 보였다. 이는 모수추정값의 공분산행렬이 크라마-라오하한(Cramér-Rao lower bound)을 만족하기 때문이다(Chernov & Lesort, 2005; Kanatani, 1998). 여러 개의 마커로 3차원 구적합을 한 본 연구의 결과도 크라마-라오하한을 기준으로 하지 않았지만 이를 뒷받침한다고 할 수 있다. 기하적합은 노이즈가 크고 표본수가 적으면 대수적합보다 좋지 않고(Al-Sharadqah & Chernov, 2009; Rangarajan & Kanatani, 2009), Li et al.(2011)의 노이즈가 큰 경우 DK의 방법이 더 좋게 나온 경우도 있고, Coope(1993)의 연구에 의하면 기하적합은 이상치에 민감하며 특히 회전중심 근처에 자료가 위치할 경우에 더욱 그러하다. 본 연구에서는 Späth가 이에 해당된다.

기하적합의 알고리즘 중 LM과 Landau의 실험결과는 비슷하게 나타났으며 결과에 나타나 있지는 않지만 Landau가 더 많은 반복계산을 하였다. LM은 비선형 최소제곱의 해를 구하기 위한 표준으로 사용되며(Gavin, 2011), gradient descent와 Gauss-Newton의 방법이 결합되어 해의 방향과 크기가 동시에 조절되어 비록 넓은 범위의 초기값을 선택하더라도 빠르고 정확하게 수렴한다는 장점이 있다(Shakarji, 1998). 또한 Chernov & Lesort(2005)의 연구에서 보면 호(arc)를 달리하여 생성한 원자료에서 호 전체에 걸쳐 100% 확률의 수렴결과를 보여 효율적인 계산 방법임을 알 수 있다. 따라서 LM을 선택하는 것이 좋다.

대수적합 중 DK의 방법은 근사해이므로 손실이 있다. 기하거리를 제공하였으므로 기하적 의미에서 무엇을 최소화하는지 알 수 없으며(Gander et al., 1994), 이는 관측값에서 원까지 가장 가까운 거리와 가장 먼 거리의 두 거리를 최소화하기 때문이다(Coope, 1993). 그리고 거리의 제곱을 최소화하기 보다는 반지름제곱을 최소화하여 작은 원이 추정되는 경우가 자주 있다(Al-Sharadqah & Chernov, 2009). 또한 Zelniker와 Clarkson(2006), Moura와 Kitney(1991)의 연구에 의하면 DK는 좋은 추정량이 가져야할 접근적 수렴의 특성을 가지지 않기 때문에 일치성이 떨어지는 추정량이라 하였다. 비록 본 연구에서는 각속도의 수준의 한계로 인해서 이러한 반응을 보지는 못했지만 DK는 사용하지 않는 것이 좋을 것이다. Pratt은 기하적합보다 작은 원이 추정되는 DK 방법에 구속조건을 주었다. 기하적합의 곡률이 작아지게 되면 식 (13)에서 A는 0에 가까워지면 평면의 방정식이 되므로 식 (14)의 구속조건을 주어 구의

방정식이 되도록 한 것이다. Pratt, Taubin, Hyper의 방법은 본 연구에 의해서 차이가 없는 것으로 나타났으며, Hyper에 대한 Rangarajan과 Kanatani(2009)의 후속연구에서도 Hyper와 Taubin의 결과가 거의 동일하게 나타나 Hyper와 Taubin의 장점은 없는 것으로 생각된다. 구속조건이 간단한 Pratt을 사용하는 것이 좋다.

이상을 종합해 볼 때 절대적인 우위에 있는 방법은 없는 듯 하며 기하적합과 대수적합의 비교는 무의미하다고 생각된다. 기하적합의 멈춤조건을 더 작게 설정하면 결과가 더 좋게 나타날 수도 있기 때문이다. 만일 3차원 회전중심 추정에서 기하적합을 이용할 경우 LM 알고리즘을, 대수적합을 이용할 경우 Pratt을 이용하는 것이 좋다. 좋은 방법은 서로의 장점을 보완 적용하여 사용하는 것인데 본 연구와 같이 대수적합의 추정값을 기하적합의 초기값으로 사용하는 것이다. 실제로 많은 연구에서 대수적합의 추정값(DK)을 기하적합의 초기값으로 사용하며(Ahn et al., 2001; Chernov & Lesort, 2005; Gander et al., 1994; Späth, 1998; Zelniker & Clarkson, 2006), 또한 이를 권장한다(Coope, 1993). 제안하자면 대수적합에서 우수한 결과를 나타낸 Pratt의 추정값을 사용하거나 또는 이를 기하적합의 초기값으로 이용한 추정값을 사용하는 것이다.

V. 결 론

본 연구는 여러 가지 3차원 구적합법을 고관절 회전중심의 추정에 올바르게 적용하여 비교·분석한 것으로 다음과 같은 결론을 얻었다. 관절의 운동범위가 커짐에 따라 그리고 각속도가 작아짐에 따라 타당한 회전중심이 추정된다. Späth의 방법은 이상값에 민감하며 Delogne-Kâsa(DK)의 방법은 운동범위가 커지고 각속도가 줄어들어도 편익이 완전히 줄어들지 않았다. 기하적합은 Levenberg-Marquardt(LM)의 방법이, 대수적합은 Pratt의 방법이 가장 타당한 결과를 나타냈다.

참고문헌

- Ahn, S. J., Rauh, W., & Warnecke, H. J. (2001). Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola. *Pattern Recognition*, 34, 2283-2303.
- Al-Sharadqah, A., & Chernov, N. (2009). Error analysis for circle fitting algorithms. *Electronic Journal of Statistics*, 3, 886-911.
- Begon, M., Monnet, T., & Lacouture, P. (2007). Effects of movement for estimating the hip joint centre. *Gait & Posture*, 25, 353-359.
- Camomilla, V., Cereatti, A., Vannozzi, G., & Cappozzo, A. (2006). An optimized protocol for hip joint centre determination using the functional method. *Journal of Biomechanics*, 39, 1096-1106.

- Cappozzo, A., Catani, F., Croce, U. D., & Leardini, A. (1995). Position and orientation in space of bones during movement : Anatomical frame definition and determination. *Clinical Biomechanics*, 10, 171-178.
- Cereatti, A., Donati, M., Camomilla, V., Margheritini, F., & Cappozzo, A. (2009). Hip joint centre location : An ex vivo study. *Journal of Biomechanics*, 42, 818-823.
- Chan, N. N. (1965). On circular functional relationships. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 27, 45-56.
- Chan, Y. T., & Thomas, S. M. (1995). Cramer-Rao lower bounds for estimation of a circle arc center and its radius. *Graphical Models and Image Processing*, 57, 527-532.
- Chan, Y. T., Elhalwagy, Y. Z., & Thomas, S. M. (2002). Estimation of circle parameter by centroiding. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 114, 363-371.
- Chan, Y. T., Lee, B. H., & Thomas, S. M. (2005). Approximate maximum likelihood estimation of circle parameters. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 125, 723-734.
- Chang, L. Y., & Pollard, N. S. (2007). Constrained least-squares optimization for robust estimation of center of rotation. *Journal of Biomechanics*, 40, 1392-1400.
- Chernov, N., & Lesort, C. (2004). Statistical efficiency of curve fitting algorithms. *Computational Statistics & Data Analysis*, 47, 713-728.
- Chernov, N., & Lesort, C. (2005). Least squares fitting of circles. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23, 239-252.
- Coope, I. D. (1993). Circle fitting by linear and nonlinear least squares. *Journal of Optimization theory and applications*, 76, 381-388.
- Delogne, P. (1972). Computer optimization of Deschamp' method and error cancellation reflectometry. *Proceedings of the IMEKO-Symposium on Microwave Measurement, Bupapest*, 117-129.
- De Momi, E., Lopomo, N., Cerveri, P., Zaffagnini, S., Safaran, M. R., & Ferrigno, G. (2009). In-vitro experimental assessment of a new robust algorithm for hip joint centre estimation. *Journal of Biomechanics*, 42, 989-995.
- Ehrig, R. M., Taylor, W. R., Duda, G. N., & Heller, M. O. (2006). A survey of formal methods for determining the center of rotation of ball joints. *Journal of Biomechanics*, 39, 2798-2809.
- Gamage, S. S. H. U., & Lasenby, J. (2002). New least squares solutions for estimating the average center of rotation and the axis of rotation. *Journal of Biomechanics*, 35, 87-93.
- Gander, W., Golub, G. H., & Strebel, R. (1994). Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT*, 34, 558-578.
- Gavin, H. (2011). *The Levenberg-Marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems*. Retrieved from <http://www.duke.edu/~hpgavin/ce281/lm.pdf>
- Halvorsen, K. (2003). Bias compensated least squares estimate of the center of rotation. *Journal of Biomechanics*, 36, 999-1008.
- Halvorsen, K., Lesser, M., & Lundberg, A. (1999). A new method for estimating the axis of rotation and the center of rotation. *Journal of Biomechanics*, 32, 1221-1227.
- Kanatani, K. (1998). Cramer-Rao lower bounds for curve fitting. *Graphical Models and Image Processing*, 60, 93-99.
- Kim, J. U. (2011). Comparisons among functional methods of axis of rotation suitable for describing human joint motion. *Korean Journal of Sport Biomechanics*, 21(4), 449-458.
- Kása, I. (1976). A circle fitting procedure and its error analysis. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 25, 8-14.
- Landau, U. M. (1987). Estimation of a circular arc center and its radius. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 38, 317-326.
- Lempereur, M., Laboef, F., Brochard, S., Rousset, J., Burdin, V., & Rémy-Néris, O. (2010). In vivo estimation of the glenohumeral joint centre by functional methods: Accuracy and repeatability assessment. *Journal of Biomechanics*, 43, 370-374.
- Li, W., Zhong, J., Gulliver, T. A., Rong, B., Hu, R. Q., & Qian, Y. (2011). Fitting noisy data to a circle : A simple iterative maximum likelihood approach. *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 1-5.
- MacWilliams, B. A. (2008). A comparison of four functional methods to determine centers and axes of rotations. *Gait & Posture*, 28, 673-679.
- Marin, F., Mannel, H., Claes, L., & Dürselen, L. (2003). Accurate determination of a joint rotation center based on the minimal amplitude point method. *Computer Aided Surgery*, 8, 30-34.
- Moura, I. & Kitney, R. (1991). A direct method for least-squares circle fitting. *Computer Physics Communications*, 64, 57-63.
- Nievergelt, Y. (1994). Computing circles and spheres of arithmetic least squares. *Computer Physics Communications*, 81, 343-350.
- Piazza, S. J., Erdemir, A., Okita, N., & Cavanagh, P. R. (2004). Assessment of the functional method of hip joint center location subject to reduced range of hip motion. *Journal of Biomechanics*, 37, 349-356.
- Piazza, S. J., Okita, N., & Cavanagh, P. R. (2001). Accuracy of the functional method of hip joint center location : Effects of limited motion and varied implementation. *Journal of Biomechanics*, 34, 967-973.
- Pratt (1987). Direct least-squares fitting of algebraic surfaces. *Computer Graphics*, 21, 145-152.
- Rangarajan, P., & Kanatani, K. (2009). Improved algebraic methods for circle fitting. *Electronic Journal of Statistics*, 3, 1075-1082.
- Shakarji, C. M. (1998). Least-squares fitting algorithms of the NIST algorithm testing system. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 103, 633-641.
- Siston, R. A., & Delp, S. L. (2006). Evaluation of a new algorithm to determine the hip joint center. *Journal of Biomechanics*, 39, 125-130.
- Späth, H. (1998). Least-square fitting spheres. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 96, 191-199.
- Taubin, G. (1991). Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13, 1115-1138.
- Umbach, D., & Jones, K. N. (2003). A few methods for fitting circles to data. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 52, 1881-1885.
- Woltring, H. J. (1990). Data processing and error analysis. In N.

- Berne, & A. Cappozzo (Eds.), *Biomechanics of human movement : Applications in rehabilitation, Sport and Ergonomics* (pp. 203-237). Washington, OH : Bertec Corporation.
- Wu, G., Siegler, S., Allard, P., Kirtley, C., Leardini, A., Rosenbaum, D., Whittle, M., D'Lima, D., Cristofolini, L., Witte, H., Schmid, O., & Stokes, I. (2002). ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion-part : ankle, hip, and spine. *Journal of Biomechanics*, 35, 543-548.
- Wu, G., van der Helm, F. C. T., Veeger, H. E. J., Makhsous, M., Roy, P. V., Anglin, C., Nagels, J., Karduna, A. R., McQuade, K., Wang, X., Werner, F. W., & Buchholz, B. (2005). ISB recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion - part : shoulder, elbow, wrist and hand. *Journal of Biomechanics*, 38, 981-992.
- Zelniker, E. E., & Clarkson, I. V. L. (2006). A statistical analysis of the Delogne-Kâsa method for fitting circles. *Digital Signal Processing*, 16, 498-522.