

## 곡관에서의 층류 유동 및 열전달에 관한 수치해석 연구

강창우\* · 양경수\*\*

\* 인하대학교 기계공학과

### Numerical Study of Laminar Flow and Heat Transfer in Curved Pipe Flow

Changwoo Kang\* and Kyung-Soo Yang\*\*

\* Dept. of Mechanical Engineering, Inha Univ.

(Received June 17, 2013 ; Revised July 31, 2013 ; Accepted August 1, 2013)

**Key Words:** Curved Pipe Flow(곡관 유동), Heat Transfer(열전달), Curvature(곡률)

**초록:** 축방향으로 벽면에서 일정한 열 유속의 경계조건을 갖는 곡관 유동에서 유동장 및 온도장에서의 Dean 수와 곡률의 영향을 알아보기 위한 층류 유동 및 열전달에 관한 3차원 수치모사를 수행하였다. 연구에서 수행된 레이놀즈 수의 범위는 100~4000이며 Prandtl 수는 0.71이다. 곡률 비는 0.01, 0.025, 0.05 그리고 0.1이다. 본 연구에서 계산된 축방향 속도 및 온도 분포, 국소 Nusselt 수는 기존의 수치 및 실험 결과들과 잘 일치하였다. 유동 및 열전달에 대한 곡률의 영향을 알아보기 위하여 저항계수 및 열전달 계수가 계산되었고 기존의 이론 및 실험 연구의 결과들과 비교하였다. Dean 수와 Prandtl 수에 의한 평균 Nusselt 수의 관계식을 유도하였다. 또한 곡률의 변화에 따른 난류 유동으로 천이하는 임계 레이놀즈 수의 변화를 알아보았다.

**Abstract:** A three dimensional numerical simulation of laminar flow and heat transfer in fully developed curved pipe flow has been performed to study the effects of Dean number and pipe curvature on the flow and temperature fields under the thermal boundary condition of axially uniform wall heat flux. The Reynolds number under consideration ranges from 100 to 4000, and the Prandtl number is 0.71. The curvature ratios are 0.01, 0.025, 0.05 and 0.1. The axial velocity and temperature profiles and the local Nusselt number obtained from the present study are in good agreement with the previous numerical and experimental results currently available. To show the effects of pipe curvature on the flow and heat transfer, the resistance coefficients and heat transfer coefficients are computed and compared with the results of the previous theoretical and experimental studies. The averaged Nusselt number is correlated with Dean and Prandtl numbers. Furthermore, the critical Reynolds number for transition to turbulent flow is observed to depend upon the curvature ratio.

### 1. 서론

곡관(curved pipe)의 곡률(curvature)에 의하여 형성되는 이차 유동(secondary flow)은 열 및 물질전달을 촉진시키며, 이러한 현상은 heating 또는 cooling 코일을 포함하는 다양한 열교환기 및 산업 설비 등에서 광범위하게 응용되고 있다.

과거 곡관 유동에 대한 연구는 실험<sup>(1~5)</sup> 및 이론적인 해석(theoretical analysis) 방법<sup>(6~10)</sup>에 의한 연구가 주로 수행되었으며, Berger 등<sup>(11)</sup>와 Ito<sup>(12)</sup>에

의하여 곡관 유동에 대한 광범위한 연구결과들이 정리되었다. 하지만 이러한 과거의 연구들은 단순히 압력손실 계수의 이론적인 계산 결과와 실험 결과를 비교하는 연구에 국한되었다.

곡관에서의 이차 유동에 의한 열 및 물질 전달에 관한 연구도 과거부터 많은 관심을 받아왔으며 많은 연구자들에 의하여 실험 및 이론적인 해석 방법을 이용한 연구가 폭넓게 수행되었다. Mori and Nakayama<sup>(3~5)</sup>는 층류 및 난류 유동에서의 이론적인 저항 계수(resistance coefficient)와 열전달 계수(heat transfer coefficient)를 계산하였으며, 실험을 통하여 얻어진 열전달 계수는 이론적

† Corresponding Author, [ksyang@inha.ac.kr](mailto:ksyang@inha.ac.kr)

인 계산 결과들과 잘 일치함을 보였다. 이후 수행된 많은 analytic 연구들도 주로 Dean 수 및 Prandtl 수의 변화에 따른 열전달 계수를 계산하고 실험 결과들과 비교하고 곡관에서의 곡률과 열전달 계수의 관계식을 유도하는 연구에 국한되었다.<sup>(13-19)</sup>

최근에는 유동장에 대한 보다 자세한 연구를 위한 3차원 simulation을 이용한 연구들이 수행되고 있다.<sup>(20-24)</sup> 층류 유동에 관한 연구는 Hüttl 등<sup>(22)</sup>에 의하여 수행되었다. 그들은 3차원 수치해석을 수행하여 곡관 층류 유동에서의 곡률의 변화가 유동장에 미치는 영향에 대한 연구를 수행하였다. 하지만 그들의 연구는 관내 유동의 중요한 인자인 압력손실과 관련된 저항 계수에 대한 연구는 수행하지 않았다. 또한 아직까지 3차원 simulation 해석을 이용한 열 및 물질전달에 관한 연구는 수행되어지지 않았다.

따라서 본 연구에서는 fully developed 곡관 층류 유동에서의 3차원 simulation을 수행하여 곡관에서의 곡률이 관내 유동장 및 온도장에 미치는 영향을 알아보고, Dean 수와 곡률의 변화에 따른 관내 저항 계수 및 열전달 계수를 기존의 실험 및 이론적인 계산 결과들과 비교할 것이다.

### 2. 지배방정식

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 좌표계를 보여준다. Wang<sup>(7)</sup>과 Germano<sup>(9,10)</sup>에 의하여 제안된 orthogonal curvilinear 좌표계는 Cartesian 좌표계로부터 유도되었다. Cartesian 위치 벡터  $\mathbf{X}$ 는 curvilinear 좌표계( $r, \theta, s$ )를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

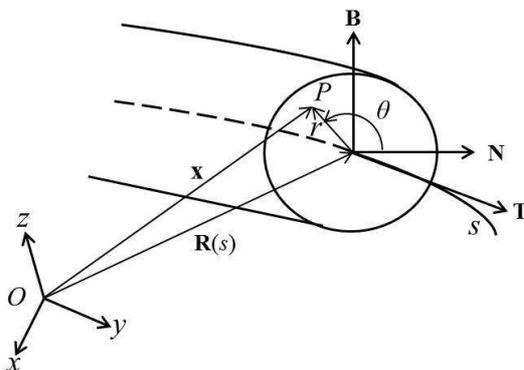


Fig. 1 Coordinate system

$$\mathbf{X} = P - O = \mathbf{R}(s) + r \cos \theta \mathbf{N}(s) + r \sin \theta \mathbf{B}(s) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{R}$ 은 중앙 곡선 위에서의 위치를 나타낸다.  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$ 는 각각 tangential, normal, binormal unit vector를 나타내며 다음과 같은 관계를 이용하면

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T} \quad (2)$$

curvilinear 좌표계의 orthogonal metric은 다음과 같다.<sup>(7)</sup>

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dr^2 + (r d\theta)^2 + (1 + \kappa r \cos \theta)^2 ds^2 \quad (3)$$

여기서  $\kappa$ 는 파이프의 반경( $a$ )과 곡률반경( $R$ )의 곡률비( $=a/R$ )이며  $dr$ ,  $d\theta$ ,  $ds$ 는 각각 반경방향, 회전방향, 축방향으로의 증분을 나타낸다. 위의 metric으로부터 scale factors  $h_r$ ,  $h_\theta$ ,  $h_s$ 는 다음과 같다.<sup>(25)</sup>

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_s = 1 + \kappa r \cos \theta \quad (4)$$

위의 scale factors를 이용하여 유도된 비압축성 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식은 다음과 같다.<sup>(14,20,21)</sup>

Continuity equation :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r h_s u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(h_s u_\theta) + \frac{\partial}{\partial s}(r u_s) = 0 \quad (5)$$

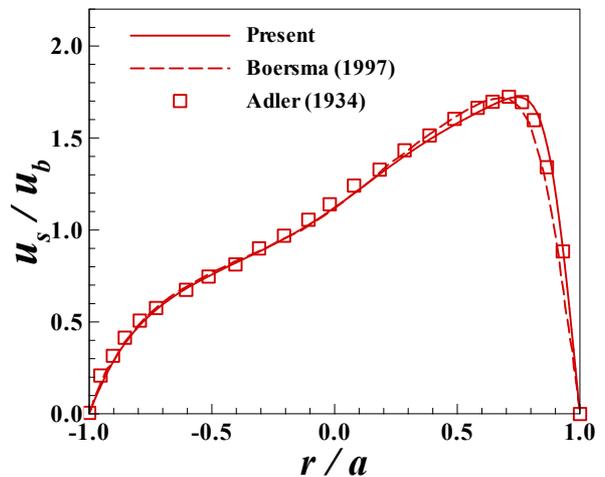


Fig. 2 Axial velocity profiles along a wall-normal radial line on the symmetric plane for  $K=273$ ,  $\kappa=0.02$

$r$ -momentum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s u_r u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s u_\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial s} (r u_s u_r) \right) - \frac{u_\theta u_\theta}{r} - \frac{u_s^2 \kappa \cos \theta}{h_s} \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial s} (r \tau_{rs}) \right) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\tau_{ss} \kappa \cos \theta}{h_s} \end{aligned} \quad (6)$$

$\theta$ -momentum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s u_r u_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s u_\theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial s} (r u_s u_\theta) \right) + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_s^2 \kappa \sin \theta}{h_s} \\ = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s \tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial s} (r \tau_{\theta s}) \right) + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\tau_{ss} \kappa \sin \theta}{h_s} \end{aligned} \quad (7)$$

$s$ -momentum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s u_r u_s) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s u_\theta u_s) + \frac{\partial}{\partial s} (r u_s u_s) \right) + \frac{u_s \kappa}{h_s} (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \\ = - \frac{1}{\rho h_s} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s \tau_{rs}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s \tau_{\theta s}) + \frac{\partial}{\partial s} (r \tau_{ss}) \right) + \frac{\tau_{rs} \kappa \cos \theta}{h_s} - \frac{\tau_{\theta s} \kappa \sin \theta}{h_s} \end{aligned} \quad (8)$$

Energy equation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rh_s u_r T) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s u_\theta T) + \frac{\partial}{\partial s} (r u_s T) \right) \\ = \frac{\alpha}{rh_s} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( rh_s \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_s}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{r}{h_s} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\rho$ ,  $p$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ 는 각각 유체의 밀도, 압력, 동점성계수, 열확산계수를 나타낸다.  $\tau_{ij}$ 는 symmetric viscous stress tensor이며 다음과 같다.<sup>(21)</sup>

$$\begin{aligned} \tau_{rr} = \nu \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad \tau_{r\theta} = \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right), \quad \tau_{rs} = \nu \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial u_r}{\partial s} + h_s \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_s}{h_s} \right) \right), \quad \tau_{\theta\theta} = \nu \left( 2 \left( \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right), \\ \tau_{\theta s} = \nu \left( \frac{r}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{h_s}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_s}{h_s} \right) \right), \quad \tau_{ss} = \nu \left( 2 \left( \frac{u_r \kappa \cos \theta}{h_s} - \frac{u_\theta \kappa \sin \theta}{h_s} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial u_s}{\partial s} \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

term

### 3. 수치해석방법

#### 3.1 수치해석 기법 및 경계조건

본 연구의 지배방정식(식 (5)-(9))은 유한체적법(Finite Volume Method)을 사용하여 차분되었다. 공간에서의 적분은 2차 정확도를 갖는 중앙차분법(Central Difference Scheme)이 사용되었다. 시간에서의 적분은 계산 효율을 높이기 위하여 Akselvoll and Moin[26]이 제시한 이차정확도의 시

간 전진 기법을 사용하였다.  $r-\theta$  평면에서의 계산영역은 내부영역( $0 \leq r \leq r_c$ )과 바깥영역( $r \geq r_c$ )으로 분리된다. 내부영역(core region)에서는 회전방향의 대류항과 점성항은 묵시적(implicit)으로 적분되고, 나머지 항들은 명시적(explicit)으로 적분된다. 바깥영역(outer region)에서는 반경방향의 대류항과 점성항은 묵시적으로 적분되고, 나머지 항들은 명시적으로 적분된다. 두 영역에서 명시적으로 적분되는 항들은 3차 정확

도의 Runge-Kutta 방법이 사용되었고, 목시적으로 적분되는 항들은 2차 정확도의 Crank-Nicolson 방법이 사용되었다. 여기서  $r_c$ 는 내부영역과 바깥영역의 경계이며, 본 연구에서는  $r_c \approx 0.5a$ 에 위치한다. 연속방정식과 운동량 방정식을 분리하기 위하여 Fractional Step 기법<sup>(27)</sup>이 사용되었다.

유동장에 대한 경계조건으로는 벽면에서는 no-slip 조건이 적용되었으며, 주유동방향( $s$ )으로는 주기조건이 적용되었다. 온도장에 대한 경계조건으로는 벽면에서의 heat flux( $q_w$ )는 일정하며, 주유동방향으로는 주기조건이 적용되었다.<sup>(14,28)</sup>

$s$  축으로의 계산영역의 길이( $\Delta s$ )는  $0.5a$ 이며, 계산에 사용된 격자수는  $64(r) \times 64(\theta) \times 16(s)$ 이다.<sup>(22)</sup> Reynolds 수( $Re_b$ )는 파이프의 직경( $D$ )과 축방향 평균 bulk 속도( $u_b$ )로 정의되며 계산이 수행된  $Re_b$ 의 범위는 100~4,000 이다. Prandtl 수( $Pr$ )는 0.71로 고정하였다. 곡률비( $\kappa$ )는 0.01, 0.025, 0.05, 0.1 로 변화시켰다.

3.2 코드의 검증

본 연구에서 사용된 코드의 검증을 위하여 기존 연구결과들과 본 연구의 코드를 이용하여 계산된 결과들을 비교하였다. Fig. 2는 Dean 수 ( $K = Re_b \sqrt{\kappa}$ )가 273인 경우에 대하여 대칭면에서 반경방향 선상에서의 축방향 속도분포를 Adler<sup>(1)</sup>의 실험결과와 Boersma<sup>(21)</sup>의 수치해석 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 본 연구의 코드를 이용하여 계산된 축방향 속도분포가 기존 연구결과들과 잘 일치하고 있다. Fig. 3은  $K=512$ 인 경우의

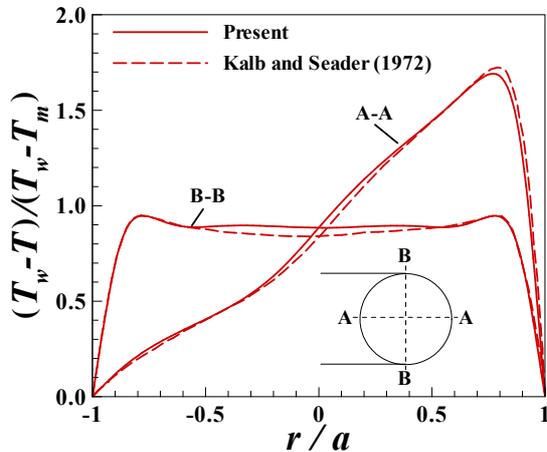


Fig. 3 Temperature profiles for  $K=512$ ,  $\kappa=1/15.2$ ,  $Pr=0.7$

무차원된 온도 분포를 Kalb and Seader<sup>(14,15)</sup>의 numerical solution과 비교하여 나타낸 것이다. 여기서  $T_m$ 은 평균 온도이며  $T_w$ 는 벽면에서의 온도이다. 본 연구의 코드를 이용하여 계산된 무차원 온도 분포는 Kalb and Seader<sup>(14,15)</sup>의 연구결과와 잘 일치하고 있다.

4. 결과

4.1 Flow fields

직관에서의 fully developed 유동의 경우 축방향 속도는 파이프의 중심에서 최대인 포물선 형태를 보이며, 반경방향 및 회전방향 속도성분( $u_r, u_\theta$ )은 0 이다. 하지만 곡판에서의 fully developed 유동은 곡률(curvature)으로 인한 원심력(centrifugal force)의 영향을 받는다. Fig. 4는  $K \approx 632.46$ 인 경우의  $r-\theta$  평면에서의 속도 및 압력분포를 나타낸 것이다. Fig. 4(a)는 축방향 속도 성분( $u_s$ )의 등고선을 나타낸 것이다. 곡률의 영향으로 인하여 축방향 속도가 최대가 되는 위치는 바깥쪽 벽면 방향으로 이동하며, 파이프의 수평축(horizontal axis)에 대하여 대칭의 형태를 보인다. 또한 파이프의 중심부에서의 축방향 속도 분포는 수평축과 수직인 형태를 보인다. Fig. 4(b)는 압력 등고선을 나타낸 것이다. 여기서 압력은  $r-\theta$  평면에서의 평균 압력( $p_m$ )에 대한 편차를 의미하며 동압으로 무차원화( $P = (p - p_m)/0.5\rho u_b$ ) 되었으며, 실선은 양의 값을 나타내며 점선은 음의 값을 나타낸다.

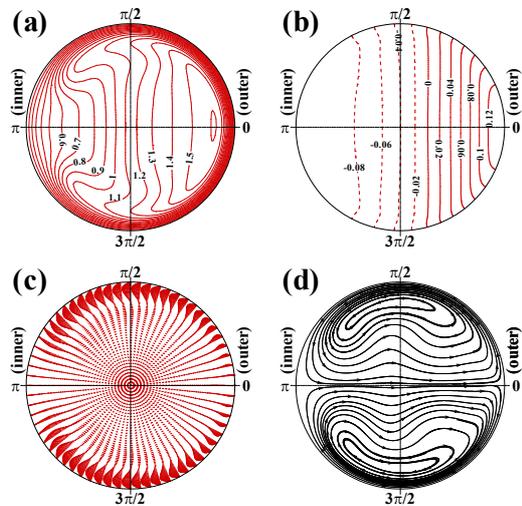


Fig. 4 Secondary flow in an  $r-\theta$  plane for  $Re_b=2000$ ,  $\kappa=0.1$  ( $K \approx 632.46$ ); (a) axial velocity contours, (b) pressure contour, (c) velocity vector plot, (d) streamlines

파이프의 중심부에서의 압력 분포는 수평축 (horizontal axis)에 수직인 직선의 형태를 보이며, 바깥쪽 벽면 영역에서의 압력이 안쪽 영역보다 높은 것을 알 수 있다. Fig. 4(c)의 속도벡터와 이를 이용하여 그린 Fig. 4(d)의 유선(streamlines)은 파이프 내에 형성된 이차유동(secondary flow)을 잘 보여준다. 축방향 속도의 크기가 작은 벽면 근처에서는 압력구배에 의하여 파이프의 바깥쪽 영역에서 안쪽 영역으로 향하는 유동이 형성되며, 축방향 속도의 크기가 큰 중심부에서는 파이프의 안쪽 영역에서 바깥쪽 영역으로 향하는 유동이 형성되어 서로 반대방향으로 회전하는 두 개의 재순환 cell이 수평축에 대하여 대칭의 형태로 형성된다. 이때 수평축의 양 끝에서는 stagnation point가 형성된다.

Fig. 5는  $Re_b=2000$ 인 경우 곡률비( $\kappa$ )의 변화에 따른 수평축(A-A)과 수직축(B-B)에서의 축방향 속도( $u_s$ ) 분포를 나타낸 것이다. 곡률비( $\kappa$ )의 크기

가 증가함에 따라 수평축(A-A)에서의 축방향 속도가 최대가 되는 위치는 점차 바깥쪽 영역으로 이동하며, 그 크기는 점차 감소한다.(Fig. 5(a)) 또한 곡률비( $\kappa$ )의 크기가 증가함에 따라 벽면 근처에서의 축방향 속도의 크기는 증가하며 반경방향( $r$ )으로의 기울기도 증가한다.(Fig. 5(a),(b)) Fig. 6은  $\kappa=0.01$ 인 경우  $Re_b$ 의 변화에 따른 수평축(A-A)과 수직축(B-B)에서의 축방향 속도( $u_s$ ) 분포를 나타낸 것이다.  $Re_b$ 가 증가함에 따라 수평축(A-A)에서의 축방향 속도가 최대가 되는 위치는 점차 바깥쪽 영역으로 이동하며, 벽면 근처에서 축방향 속도의 반경방향( $r$ )으로의 기울기는 증가한다. 이는 Fig. 5에서 곡률비( $\kappa$ )의 증가에 따른 결과와 같은 경향이다. 따라서 Fig. 5와 Fig. 6으로부터 Dean 수( $K = Re_b \sqrt{\kappa}$ )가 증가함에 따라 축방향 속도가 최대가 되는 위치는 바깥쪽 영역으로 이동하며, 벽면 근처에서 축방향 속도의 반경방향( $r$ )으로의 기울기는 증가하는 것을 알 수 있다.

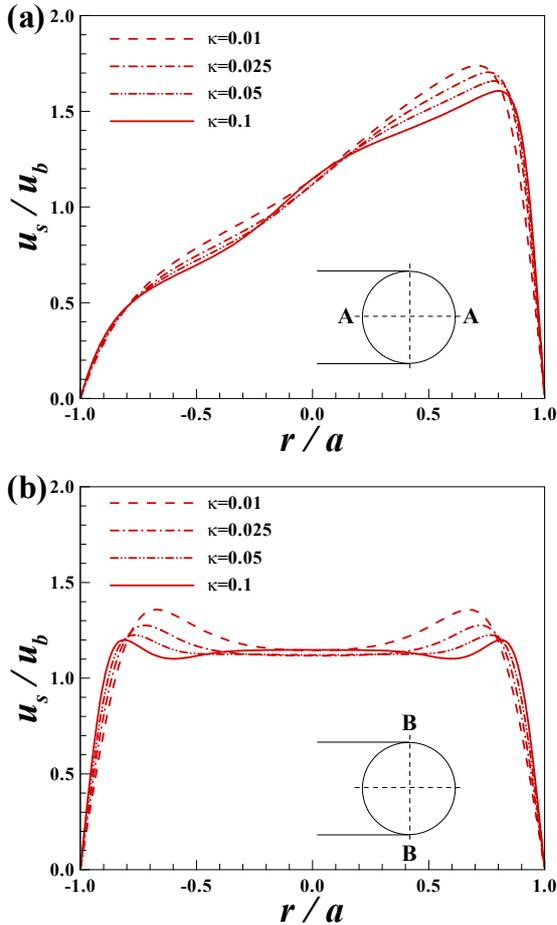


Fig. 5 Axial velocity profiles for  $Re_b=2000$ ; (a) horizontal axis (A-A), (b) vertical axis (B-B)

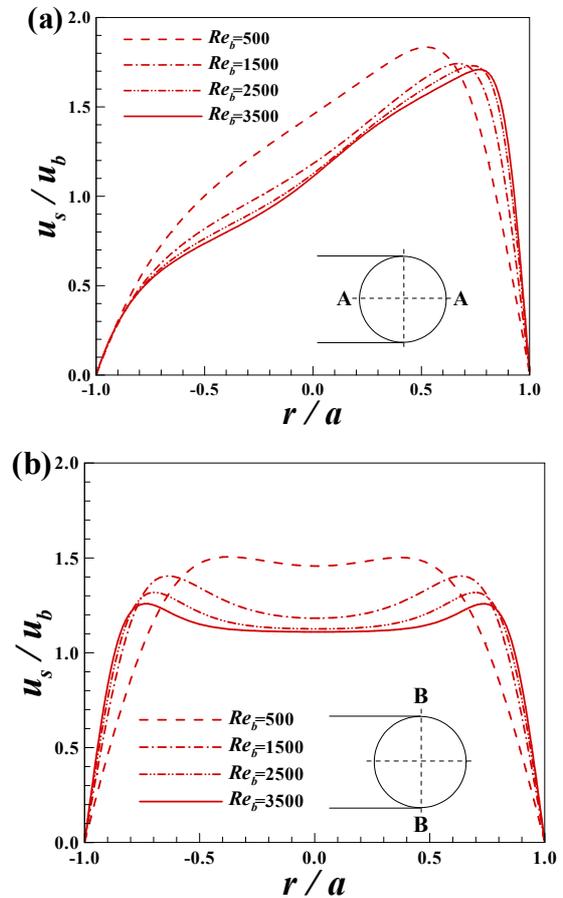


Fig. 6 Axial velocity profiles for  $\kappa=0.01$ ; (a) horizontal axis (A-A), (b) vertical axis (B-B)

Fig. 7은  $Re_b=1000$ 인 경우 곡률비( $\kappa$ )의 변화에 따른 벽면에서의 local friction coefficient ( $C_f = \tau_w/0.5\rho u_b^2$ )를 나타낸 것이다. Fig. 5(a)와 Fig. 6(a)에서와 같이 축방향 속도( $u_s$ )가 빠르고 기울기가 큰 바깥쪽 벽면( $\theta = 0$ )에서의  $C_f$ 가 안쪽 벽면( $\theta = \pi$ )에서 보다 큰 것을 알 수 있다. 곡률비( $\kappa$ )의 크기가 증가함에 따라  $C_f$ 가 증가하며, 이는 Dean 수( $K$ )가 증가함에 따라  $C_f$ 가 증가한다고 할 수 있다. 곡률의 영향으로 인해 안쪽 벽면( $\theta = \pi$ ) 근처에서의  $C_f$ 는 직관( $\kappa = 0$ ) 유동에서의  $C_f(=16/Re_b)$ 보다 작은 것이 관찰된다.

Fig. 8은 본 연구에서 계산된 곡관에서의 각 Dean 수( $K$ )에 따른 friction factor( $f_c$ )를 기존 연구 결과들과 비교하여 나타낸 것이다. 여기서 곡관에서의 friction factor( $f_c$ )는 다음과 같이 정의되며

$$f_c = \frac{-(dp/h_s ds)D}{\rho u_b^2/2} \quad (11)$$

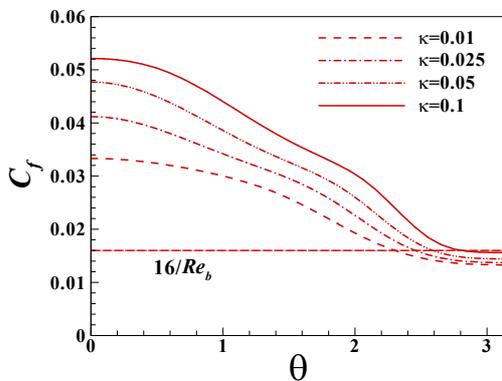


Fig. 7 The wall local friction coefficient vs. circumferential angle for  $Re_b=1000$

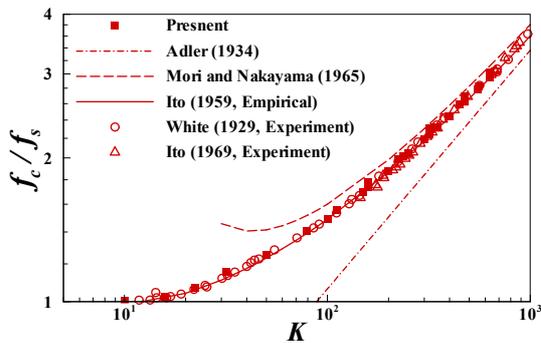


Fig. 8 Comparison of friction factor with the theoretical and experimental results available in the literature

$f_s$ 는 직관 층류 유동에서의 friction factor ( $f_s = 64/Re_b$ )이다. 본 연구에서 계산된  $f_c$ 는 boundary layer approximation 으로부터 유도된 Adler<sup>(1)</sup>의 이론식

$$f_c/f_s = 0.1064 K^{1/2} \quad (12)$$

와 Mori and Nakayama<sup>(3)</sup>의 이론식

$$f_c/f_s = \frac{0.108 K^{1/2}}{1 - 3.253 K^{-1/2}} \quad (13)$$

와는 낮은  $K$  범위에서 다소 차이를 보이지만, White<sup>(29)</sup>와 Ito<sup>(30)</sup>의 실험 결과 및 Ito<sup>(2)</sup>의 실험식

$$f_c/f_s = \frac{21.5 K}{(1.56 + \log K)^{5.73}} \quad \text{for } 13.5 < K < 2000 \quad (14)$$

와 매우 잘 일치하고 있다.

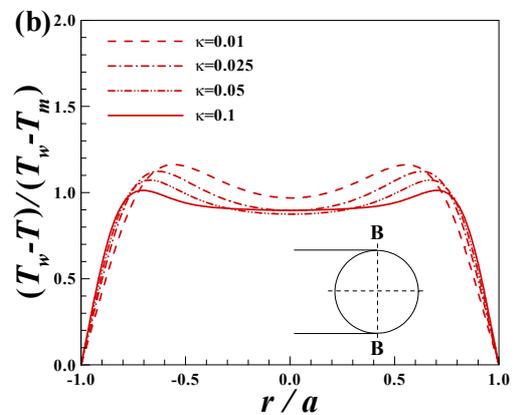
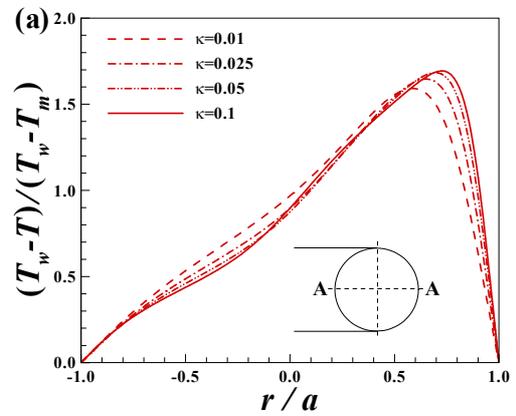


Fig. 9 Temperature profiles for  $Re_b=1000$ ; (a) horizontal axis (A-A), (b) vertical axis (B-B)

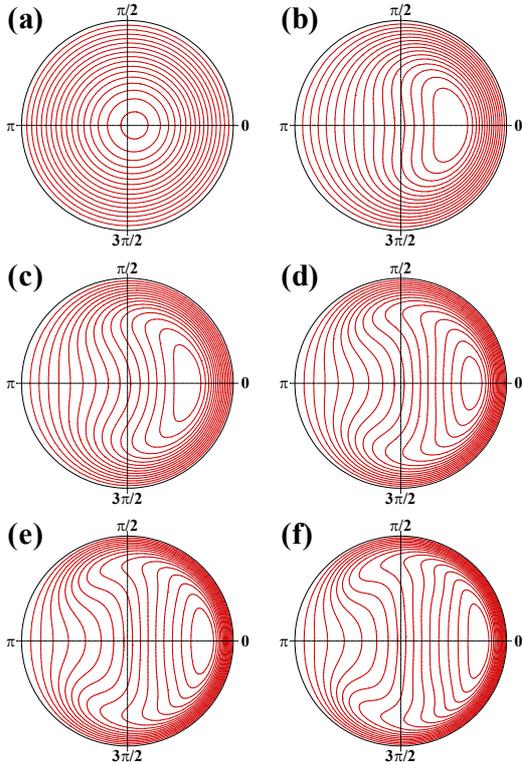


Fig. 10 Temperature contours in an  $r-\theta$  plane for  $\kappa=0.01$ ; (a)  $Re_b=100(K=10)$ , (b)  $Re_b=500(K=50)$ , (c)  $Re_b=1000(K=100)$ , (d)  $Re_b=2000(K=200)$ , (e)  $Re_b=3000(K=300)$ , (f)  $Re_b=4000(K=400)$

4.2 Temperature fields

Fig. 9는  $Re_b=1000$ 인 경우 곡률비( $\kappa$ )의 변화에 따른 수평축(A-A)과 수직축(B-B)에서의 온도 분포를 나타낸 것이다. 무차원 온도 분포의 형태는 축방향 속도( $u_s$ ) 분포와 매우 유사하다. 곡률비( $\kappa$ )의 크기가 증가함에 따라 수평축(A-A)에서의 무차원 온도가 최대가 되는 위치는 점차 바깥쪽 영역으로 이동하며, 그 크기는 점차 증가한다. 반면에 안쪽 영역에서는 무차원 온도가 점차 감소한다. (Fig. 9(a)) 또한 곡률( $\kappa$ )의 크기가 증가함에 따라 바깥쪽 벽면에서의 무차원 온도의 크기는 증가하며 반경방향( $r$ )으로의 기울기도 증가하지만, 파이프의 중심부에서의 무차원 온도의 크기는 점차 감소한다.(Fig. 9(a),(b))

Fig. 10은  $\kappa=0.01$ 인 경우  $Re_b(K)$ 의 변화에 따른  $r-\theta$  평면에서의 무차원된 온도 등고선을 나타낸 것이다. 유동장에서의 축방향 속도( $u_s$ ) 분포와 마찬가지로 곡률의 영향으로 인하여  $Re_b(K)$ 가 증가함에 따라 무차원 온도가 최대가 되는 위치는 점차 바깥쪽 벽면 방향으로 이동하는 것을 확인

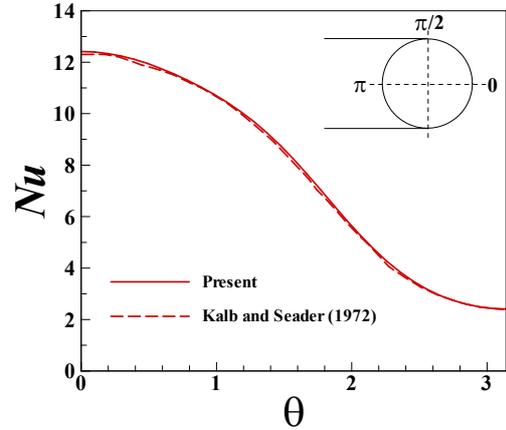


Fig. 11 Local Nusselt number for  $Re_b=1000$ ,  $\kappa=0.01(K=100)$

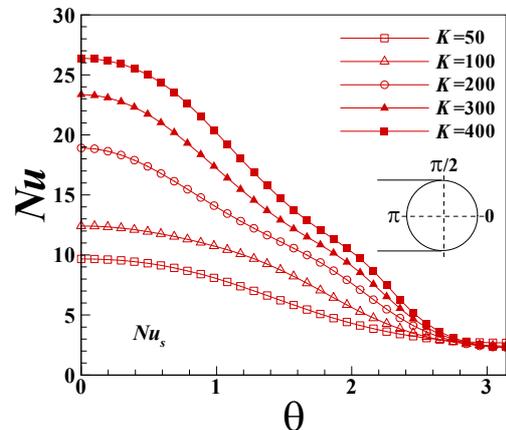


Fig. 12 Variation of local Nusselt number with Dean number( $K$ ) for  $\kappa=0.01$

할 수 있으며, 파이프의 수평축(horizontal axis)에 대하여 대칭의 형태를 보인다. 또한  $Re_b(K)$ 가 증가함에 따라 파이프의 바깥쪽 벽면에서의 온도 등고선의 간격은 점차 좁아지며, 안쪽 벽면에서의 온도 등고선의 간격은 점차 넓어진다. 이는 바깥쪽 벽면에서는 온도 분포의 기울기가 증가하고 안쪽 벽면에서는 온도 분포의 기울기가 감소함을 의미한다.

곡률에 의한 파이프 내 열전달 효과를 알아보기 위하여 Nusselt 수( $Nu$ )를 계산하였다. 이때 Nusselt 수는 다음과 같이 정의된다.

$$Nu = \frac{hD}{k} \tag{15}$$

여기서  $h$ 는 local heat transfer coefficient,  $k$ 는 thermal conductivity 이다. Fig. 11은  $Re_b=1000$ 이고  $\kappa=0.01$ 인 경우 회전방향( $\theta$ )으로의 위치에 따른 벽면에서의  $Nu$ 를 Kalb and Seader<sup>(14)</sup>의 numerical solution과 비교하여 나타낸 것이다. 계산 결과가

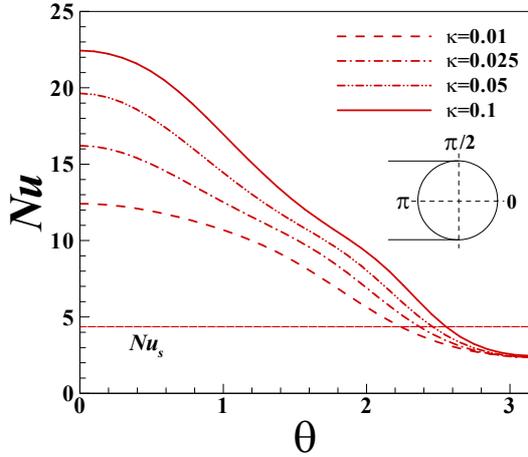


Fig. 13 Variation of local Nusselt number with curvature ratio( $\kappa$ ) for  $Re_b=1000$

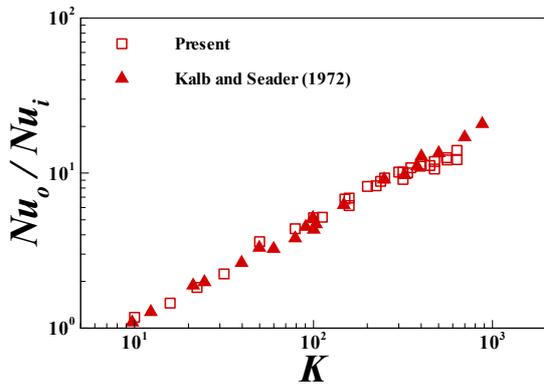


Fig. 14 Ratio of local Nusselt number at the outer wall to that at the inner wall

매우 잘 일치하고 있다. Fig. 12는  $\kappa=0.01$ 인 경우 Dean 수( $K$ )의 변화에 따른 벽면에서의  $Nu$ 를 보여주며, Fig. 13은  $Re_b=1000$ 인 경우 곡률비( $\kappa$ )의 변화에 따른  $Nu$ 를 보여준다. 여기서  $Nu_s(=48/11)$ 는 벽면에서의 heat flux가 일정한 직관(straight pipe) 층류 유동에서의 Nusselt 수이다. 바깥쪽 벽면( $\theta=0$ ) 근처에서의  $Nu$ 가 안쪽 벽면( $\theta=\pi$ ) 근처에서의  $Nu$  보다 크며,  $K$ (또는  $\kappa$ )가 증가함에 따라  $Nu$ 는 점차 증가한다. 하지만 안쪽 벽면 근처에서의  $Nu$ 는 직관에서의  $Nu_s$  보다는 작은 것을 확인할 수 있다. 이는 곡률의 영향으로 안쪽 벽면 근처에서의 축방향 속도( $u_s$ )가 작아지기 때문이다.  $K$ (또는  $\kappa$ )가 증가함에 따라 바깥쪽 벽면 근처에서의  $Nu$ 는 급격히 증가하는 반면에 안쪽 벽면 근처에서의  $Nu$ 의 변화는 거의 없다. 따라서  $K$ 가 증가함에 따라 안쪽 벽면에서의 Nusselt 수( $Nu_i$ )에 대한 바깥쪽 벽면에서의 Nusselt 수( $Nu_o$ )

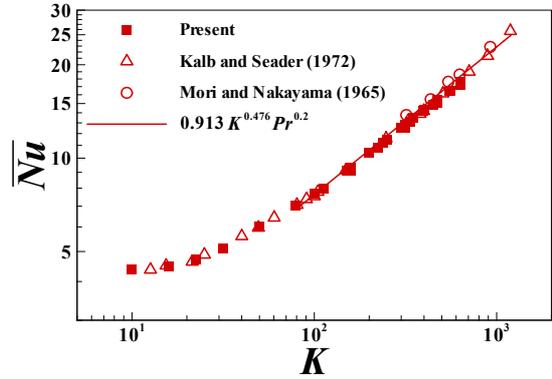


Fig. 15 Averaged Nusselt numbers

의 비는 점차 증가한다.(Fig. 14)

Fig. 15는 Dean 수( $K$ )의 변화에 따른 평균 Nusselt 수( $\overline{Nu} = \overline{hD/k}$ )를 기존 연구 결과들과 비교하여 나타낸 것이다. 본 연구에서 계산된  $\overline{Nu}$ 는 Mori and Nakayama<sup>(3)</sup>의 실험 결과와 Kalb and Seader<sup>(14)</sup>의 numerical solution 결과( $Pr=0.7$ ) 및 관계식

$$\overline{Nu} = 0.913K^{0.476}Pr^{0.2}$$

for  $80 \leq K \leq 1200, 0.7 \leq Pr \leq 5$  (16)

와 잘 일치하고 있다.

Fig. 16은 Dean 수( $K$ )의 변화에 따른 직관(straight pipe) 층류 유동에서의 Nusselt 수( $Nu_s$ )에 대한 곡관에서의 평균 Nusselt 수( $\overline{Nu}$ )의 비를 보여준다. Mori and Nakayama<sup>(3)</sup>의 실험 결과( $\blacktriangle$ ) 및 Dravid 등<sup>(31)</sup>의 실험 결과( $\bigcirc$ )와는 잘 일치하고 있는 반면에 Patankar 등<sup>(16)</sup>의 numerical prediction과는 다소 차이를 보인다. 그리고 Mori and Nakayama<sup>(3)</sup>의 boundary layer approximation

$$\frac{\overline{Nu}}{Nu_s} = 0.1979 \frac{K^{1/2}}{\zeta},$$

for  $\zeta = \frac{1}{5} \left[ 2 + \sqrt{\frac{10}{Pr^2} - 1} \right]$  (17)

와는 비교적 높은  $K$  범위( $\geq 400$ )에서는 잘 일치하지만 낮은  $K$  범위에서는 다소 차이를 보인다. 따라서 본 연구에서 계산된 결과들을 이용하여 다음과 같은 관계식을 계산하였다.(Fig. 16(b))

$$\overline{Nu}/Nu_s = 0.1465K^{0.5} + 0.31 \quad (K \geq 25) \quad (18)$$

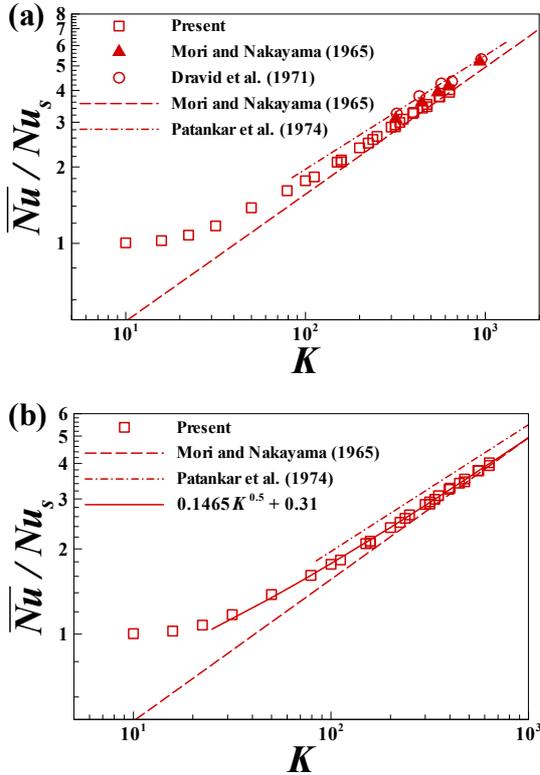


Fig. 16 Ratio of averaged Nusselt numbers

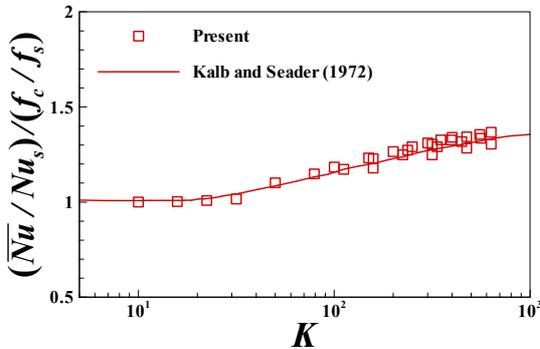


Fig. 17 Efficiency of curved pipes relative to straight pipes

Fig. 17은 직관의 경우에 대한 곡관에서의 friction factor와 평균 Nusselt 수의 증가율을 비교한 것이다.  $K$ 가 증가함에 따라 friction factor의 증가율 보다 평균 Nusselt 수의 증가율이 점차 더 커지는 것을 알 수 있다. 이는  $K$ 가 증가함에 따라 압력 손실율의 증가율 보다 열전달 효율의 증가율이 더 큰 것을 의미한다.

4.3 천이

곡관 유동에서는  $Re_b$ 와 곡률( $\kappa$ )이 증가함에 따

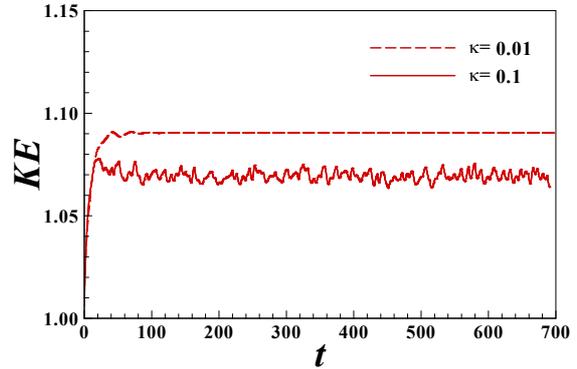


Fig. 18 Variation of kinetic energy for  $Re_b=4000$

라 원심력에 의하여 형성된 곡관 내 이차유동의 불안정성을 야기 시킴으로써 유동장은 층류(Laminar)에서 난류(Turbulent)로 천이하게 된다. 기존의 2차원 해석에 의한 연구에서는 난류 유동으로 천이하는  $Re_b$ 와 곡률( $\kappa$ )의 경우에서도 층류 유동장을 형성하기 때문에 층류와 난류 유동을 명확히 구분할 수 없었다. 하지만 본 연구에서는 3차원 수치해석을 사용한 수치 계산을 통하여 층류와 난류 유동을 구분하였다. Fig. 18은  $Re_b=4000$  이고  $\kappa=0.01, 0.1$  인 경우의 시간에 따른 유동장에서의 운동에너지(kinetic energy)의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 운동에너지(KE)는 다음과 같이 정의된다.

$$KE = \frac{1}{u_b^2 V} \int \frac{1}{2} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_s^2) dV \quad (19)$$

여기서  $V$ 는 곡관의 체적(volume)을 나타낸다. Fig. 18에서 보는 바와 같이  $\kappa=0.01$ 인 경우 유동장은 정상상태(steady state)의 층류 유동이며,  $\kappa=0.1$ 인 경우에는 난류 유동으로 천이된 것을 확인할 수 있다. 따라서 관의 곡률( $\kappa$ )이 층류에서 난류로의 임계 레이놀즈 수( $Re_c$ )에 영향을 줄 수 있고, 추후 선형 유동불안정성 해석을 통해 이를 정량적으로 확인할 예정이다.

5. 결론

본 연구에서는 fully developed 곡관 유동에서 곡률이 유동장 및 온도장에 미치는 영향을 알아보기 위한 3차원 수치해석적 연구를 수행하였다. 본 연구에서 개발된 3차원 코드를 이용하여 계산된 연구 결과들은 기존의 실험 및 수치해석 결과

들과 잘 일치하였다. 곡률에 의하여 파이프 내에는 이차 유동이 형성되었으며, Dean 수( $K$ )가 증가함에 따라 축방향 속도가 최대가 되는 위치는 바깥쪽 벽면으로 이동하였고 벽면 근처에서의 전단응력의 크기는 증가하였다. 또한 직관 유동에서의 friction factor에 대한 곡관 유동에서의 friction factor의 비는 Dean 수가 증가함에 따라 점차 증가하였으며 Ito<sup>(2)</sup>의 실험 관계식과 잘 일치하였다. 이차 유동에 의한 온도 분포의 영향은 축방향 속도 분포와 매우 유사하였다. Dean 수가 증가함에 따라 평균 Nusselt 수는 점차 증가하였으며, 특히 바깥쪽 벽면 근처에서의 열전달율(heat transfer rate)은 급격히 증가하였다. 또한 Dean 수가 증가함에 따라 직관 유동과 비교하여 곡관 유동에서의 압력 손실율의 증가율 보다 열전달 효율의 증가율이 더 큰 것을 알 수 있었다. 그리고 본 연구에서 계산된 결과들로부터 층류 유동에서의  $Pr$  가 0.71인 경우 Dean 수에 따른 평균 Nusselt 수의 관계식  $\overline{Nu}/Nu_s = 0.1465K^{0.5} + 0.31 (K \geq 25)$ 을 얻었다. 이러한 결과들은 곡관 유동이 응용되는 많은 산업 설비의 설계에서 활용될 것이다.

### 후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2012R1A2A2A01013019).

### 참고문헌

- (1) Adler, M., 1934, "Strömung in Gekrümmten Rohren," *Z. Angew. Math. Mec.*, Vol. 14, pp. 257~275.
- (2) Ito, H., 1959, "Friction Factors for Turbulent Flow in Curved Pipes," *J. Basic Eng.*, Vol. 81, pp. 123~134.
- (3) Mori, Y. and Nakayama, W., 1965, "Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes (1st Report, Laminar region)," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 8, pp. 67~82.
- (4) Mori, Y. and Nakayama, W., 1967, "Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes (2nd Report, Turbulent region)," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 10, pp. 37~59.
- (5) Mori, Y. and Nakayama, W., 1967, "Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes (3rd Report, Theoretical analysis under the Condition of Uniform Wall Temperature and Practical Formulae)," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 10, pp. 681~695.
- (6) Collins, W. M. and Dennis, S. C. R., 1975, "The Steady Motion of a Viscous Fluid in a Curved Tube," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 28, pp. 133~156.
- (7) Wang, C. Y., 1981, "On the Low-Reynolds-Number Flow in a Helical Pipe," *J. Fluid Mech.*, Vol. 108, pp. 185~194.
- (8) Dennis, S. C. R. and Ng, M., 1982, "Dual Solutions for Steady Laminar Flow Through a Curved Tube," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 35, pp. 305~324.
- (9) Germano, M., 1982, "On the Effect of Torsion on a Helical Pipe Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 125, pp. 1~8.
- (10) Germano, M., 1989, "The Dean Equations Extended to a Helical Pipe Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 203, pp. 289~305.
- (11) Berger, S. A., Talbot, L. and Yao, L.-S., 1983, "Flow in Curved Pipe," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 15, pp. 461~512.
- (12) Ito, H., 1987, "Flow in Curved Pipes," *JSME Int. J.*, Vol. 30, pp. 543~552.
- (13) Akiyama, M. and Cheng, K. C., 1971, "Boundary Vorticity Method for Laminar Forced Convection Heat Transfer in Curved Pipes," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 1659~1675.
- (14) Kalb, C. E. and Seader, J. D., 1972, "Heat and Mass Transfer Phenomena for Viscous Flow in Curved Circular Tubes," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 801~817.
- (15) Kalb, C. E. and Seader, J. D., 1974, "Fully Developed Viscous-Flow Heat Transfer in Curved Circular Tubes with Uniform Wall Temperature," *AIChE J.*, Vol. 20, No. 2, pp. 340~346.
- (16) Patankar, S. V., Pratap, V. S. and Spalding, D. B., 1974, "Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 62, pp. 539~551.

- (17) Yao, L. -S. and Berger, S. A., 1978, "Flow in Heated Curved Pipes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 88, pp. 339~354.
- (18) Zapryanov, Z., Christov, C. and Toshev, E., 1980, "Fully Developed Laminar Flow and Heat Transfer in Curved Tubes," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 873~880.
- (19) Prusa, J. and Yao, L. -S., 1982, "Numerical Solution for Fully Developed Flow in Heated Curved Tubes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 123, pp. 503~522.
- (20) Boersma, B. J. and Nieuwstadt, F. T. M., 1996, "Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow in a Curved Pipe," *ASME J. Fluids Eng.*, Vol. 118, pp. 248~254.
- (21) Boersma, B. J., 1997, Electromagnetic Effects in Cylindrical Pipe Flow, Ph.D. Thesis, Delft University Press.
- (22) Hüttl, T. J., Wagner, C. and Friedrich, R., 1999, "Navier-Stokes Solutions of Laminar Flows Based on Orthogonal Helical Coordinates," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 29, pp. 749~763.
- (23) Hüttl, T. J. and Friedrich, R., 2000, "Influence of Curvature and Torsion on Turbulent Flow in Helically Coiled Pipes," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 345~353.
- (24) Hüttl, T. J. and Friedrich, R., 2001, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Flows in Curved and Helically Coiled Pipes," *Comput. Fluids*, Vol. 30, pp. 591~605.
- (25) Batchelor, G. K., 1970, An Introduction to Fluid Mechanics, Appendix 2, Cambridge University Press.
- (26) Akselvoll, K. and Moin, P., 1996, "An Efficient Method for Temporal Integration of the Navier-Stokes Equation in Confined Axisymmetric Geometries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 454~463.
- (27) Kim, J. and Moin, P., 1985, "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 59, pp. 308~323.
- (28) Patankar, S. V., Liu, C. H. and Sparrow, E. M., 1977, "Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross-Sectional Area," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 180~186.
- (29) White, C. M., 1929, "Streamline Flow Through Curved Pipes," *Proc. R. Soc.*, Vol. 123, pp. 645~663.
- (30) Ito, H., 1969, "Laminar Flow in Curved Pipes," *Z. Angew. Math. Mec.*, Vol. 49, pp. 653~663.
- (31) Dravid, A. N., Smith, K. A., Merrill, E. W. and Brian, P. L. T., 1971, "Effect of Secondary Fluid Motion on Laminar Flow Heat Transfer in Helically Coiled Tubes," *AIChE J.*, Vol. 17, pp. 1114~1122.