대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 3, 335 ~ 351. Aug 2013

교과서 문제해결에 포함된 가추의 유형
- 중학교 2학년과 3학년 수학 교과서를 중심으로-

이 영 하* · 강 민 정**

본 연구는 가추(abduction)를 창의적 개연추론의 핵심이라고 생각하여 학교수학에서도 그 가치를 높게 평가하고 적극적으로 지도되기를 기대하는 데에서 출발한다. 수학의 모든 문제해결에서 가추가 사용될 수밖에 없음에 유의하여, 중학교 수학교과서의 문제들이 얼마나 가추의 활용을 다양하게 강조하고 있는지를 살펴보려고 하였다. 이를 위해 Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011) 등이 제안한 가추의 유형과 거의 유사하지만 분류가 더 선명하게 이루어 질 수 있도록 분류 틀을 수정하여 재구성하였다. 또 그에 따라 우리나라 교과서의 문항들에서 문제해결을 위해 어떤 유형의 가추들이 사용되는 지 조사해 보았다. 그 결과 확정적-선택형 문항이 약 64%, 가변적-선택형 문항이 약 28%로서 선택형만 약 92%나 됨을 알 수 있었다. 결국 창작형 또는 혼합형은 모두 8%에 불과함을 알 수 있었다. 새로운 개념, 원리, 법칙을 배울 때 접하는 최초의 교재가 교과서라는 점을 고려할 때, 교과서는 창의력 계발보다 먼저 이들 원리, 개념, 법칙을 모방적으로 습득하는 데 초점이 놓여야 한다는 주장도 설득력이 있다. 그러나 창의력 계발이 21세기 교육의 중심과제임을 고려할 때 창작형 가추가 불과 8%의 문항에서만 요구되는 것은 너무 적은 것은 아닌지 함께 고민할 필요가 있다는 것이 연구자의 주장이다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

만유인력과 관련된 뉴턴의 사과 이야기는 사실 여부를 떠나, 연구자에게 다음과 같은 질문을 던진다. “그 사과가 땅으로 떨어지면서 뉴턴에게 ‘땅 쪽에서 무엇인가 잡아당기는 것이 있어서 끌려간다고, 말했을까?”하는 질문이다. 그러지 않았다면[1] 떨어지는 사과를 보고 만유인력의 법칙을 생각한 뉴턴의 발견은 그의 상상력 또는 추측으로부터 비롯되었다고 할 수 있다.

뉴턴의 추측에 대해 연구자는 그의 추측이 다음과 같은 형태이었을 것이라고 추측한다.

“<규칙: 모든 물체는 적당한 힘으로 끌어당기면 끄는 쪽으로 이동한다.> <결과: 저 사과는 땅 쪽으로 이동하였다.> <사례: 땅 쪽에서 눈에 보이지 않는 무엇인가가 사과를 끌어당기고 있을 것이다.>”

* 이화여자대학교(youngha@ewha.ac.kr)
** 이화여자대학원 교육대학원(msiimm@daum.net)

1) 이 주장을 하려면 수학에서는 증명되어야 하며, 증명을 피하려면 이것을 공리나 정의 등으로 간주해야 한다. 그러나 사회과학, 자연과학 같은 경험과학에서는 경험이며, 추측에 불과한 이 주장을 별다른 논쟁 없이 인정해 줄 수 있다.

연구자는 이런 형식의 추측이 자연과학의 많은 법칙을 탄생시키고 인류 역사를 변화시켰다고 생각한다. 화학에서 보아의 가설, 물리학에서 아인슈타인의 광양자설 등이 모두 그들의 천재적인 상상력과 추측의 결과라고 연구자는 믿는다.

"<규칙: p이면 q이다.> <결과: q이다.> <사례: p 때문이다.>" 같은, 이런 형식의 추론은 수학적으로는 용납되지 않는다. 그렇지만, 실제는 수학 문제를 해결하는 과정에서 숨겨진 형태로 널리 보편화되어 있다. 즉, 데카르트가 유클리드의 원론에 나와 있는 많은 증명들에서, "어떻게 하여 그런 증명의 구상을 얻게 되었는지에 관한 설명이 증명에 포함되어 있지 않다."라고 불평했던 바로 그것, 즉 증명 이전의 추측들에 대해 연구자는 주목하고 있다.

앞의 그런 형식의 추론을 가추라고 하는데, Charles Sanders Peirce(James Hoopes 엮음, 1992; 김동식, 이유선 역, 2008)에 의해 구체화 되었다. 본고에서 가추란 바로 그가 생각한 그 개념이기 때문에 그의 견해를 살펴보기로 한다.

Peirce는 가설에 대해, 알려진 성질이 있고, 그 성질을 나타내는 다른 모든 성질을 어떤 대상이 가지고 있다면 그 대상은 알려진 그 성질을 가지고 있음을 개연적으로 예측할 수 있다고 하였다.

Peirce의 유명한 콩 주머니의 예를 가지고 소개한다면, "<규칙: 이 주머니에서 나온(=p) 콩들은 모두 하얗다(=q).> <결과: 이 콩들은 하얗다(=q).> 따라서 <사례: 이 콩들은 이 주머니에서 나왔을(=p) 것이다.>"와 같은 형태의 개연적 추론을 Peirce는 가추라고 하였다.

이 추론의 형식을 논리학적으로 음미해 보자. 앞의 p, q에 관한 진리집합을 P, Q라 할 때, <규칙>은 $P \subset Q$ 이다. 그런데 이런 추론은 $P \approx Q$[2]인 경우에 더욱 효과적인 개연추론이 된다.

실제로, 가추는 미래를 모르는 인간적 추론의 불가피한 선택이라고 할 수 있다. 가령 "<규칙: 모든 당뇨병 환자(=p)는 혈당치가 매우 높다.(=q)> <결과: 이 환자는 혈당치가 높다.(=q)> 따라서 <사례: 이 환자는 당뇨병이 가장 의심된다.(=p)>" 같은 추론에서 혈당치가 매우 높은 사람의 대부분이 당뇨병 환자라면 위의 추론은 매우 신빙성 있는 추론이 된다. 그리고 모든 의사들이, 다른 검사를 더 받아보자고 하면서도, 이렇게 논리적으로 완전하지 않은 추론하기를 두려워하지 않는 것이다.

한편, 어떤 학생이 "<(경험)규칙: K유형의 문제(=q)는 일차방정식을 세워서 해결하는(=p) 경우가 많더군!> <결과: 이 문제는 K유형의 문제야!(=q)> 따라서 <사례: 이 문제를 풀려면 먼저 무엇인가를 미지수로 하는 방정식을 세워야 해!(=p)>"[3]라고 생각한다면 이 학생은 문제 해결을 위해, 그런 생각의 유효성여부[4]는 알 수 없더라도, 바르게 접근해가는 자세를 갖고 있다고 볼 수 있다.

연구자는 본고에서 문제해결의 상황을 생각하고 있으며, '추측하기'를 두려워하는 사람에게는 문제해결의 기회의 문도 함께 닫혀 버린다는 점, 가추를 두려워하는 사람은 누구나 생소하고 어려운 문제해결에서 실패자일 수밖에 없을 것이라고 연구자는 전제한다.

당연해 보이지만, 연구자는 초중등 수학 교실에서 '추측하기'나 가추에 대해 학생들에게, 수학이기 때문에, 어떤 신념을 강요하고 있는지 먼저 반성해 봄으로써 본 연구의 필요성을 생각하

---

2) 가령 P가 Q의 95%이상이면 통계적으로 유의수준 5%에서 타당한 추론이 된다.

3) 이 경우는 $P \subset Q$인 경우는 아니다. 그러나 $P \cap Q^c \approx \varnothing$(즉, $P \cap Q \approx Q$)라고 믿는 학생에게는 유효한 가추적 추론이 된다.

4) 본고에서 가추적 사고의 유효성 여부란 그런 생각이 문제 해결에 실제로 도움이 되거나 도움이 되지 않는 것을 뜻한다.

는 것이다.

2. 연구문제

Gagne 등(1993, 이용남 외 공역, 2005)은 문제해결이란, 앞서 배운 원리를 이용하여 새로운 문제 상황을 해결하는 것이라고 정의하였고, Polya (1957, 우정호 역, 2005)는 간단하게 풀리지 않는 문제 상황을 해결하기 위해 적절한 방법을 찾는 것으로 정의하였다. 수학을 배우는 과정의 학생들에게, 모든 수학적 문제해결의 과정은 추측, 그 중에서도 특히 가추에서부터 시작된다고 할 수 있다. “이렇게 하면 문제가 풀릴지도 모른다.”거나 “이 지식이 이 문제 해결에 도움이 될 거야.”라는 가추적 추론 이후에, 연역적 검증의 과정을 거치면서, 그런 추측에 대한 유효성 여부가 가려지겠지만, 근본적으로는 이와 같은 가추가 없다면 이후의 연역적 과정도 아무 의미가 없다고 할 수 있다.

즉 문제해결의 열쇠는 연역적 검증 과정의 정확성도 중요하지만 활발한 가추적 추측활동도 뺄 수 없는 핵심요소라는 점이다.

문제해결과정이나 문제해결력과 관련된 선행연구들은 문제해결력 향상과 관련해 다양한 외부적인 요소를 연구하였지만 문제해결과정 중 일어나는 수학적 추측을 직접적으로 연구하지는 않았다.

본 연구는 먼저 Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011)의 연구를 바탕으로 하여, 가추의 종류를 문제해결 상황에 맞게 분류할 새로운 틀을 구성하고, 현행 수학 교과서의 각각의 문항마다 문제해결을 위해 사용할 대표적 가추의 종류를 이 기준에 따라 분류, 조사하고자 한다.

이것은 학교 현장에서 가추적 사고법 지도의 다양한 방법들 중에서 극히 일부를 살피는 것에 불과하지만, 추가의 다른 후속 연구 결과를 기대하면서 우선 교과서를 분석하는 것으로부터 본 연구를 시작하려는 것이다.

학교 수학에서 교과서의 역할은 아주 중요하므로, 교과서가 문제해결력 증진을 위해 어떻게 구성되어 있는지 분석하는 것은 필요하다. 그러나 기존의 교과서에 관한 연구들은 교육과정의 목표와 내용에서 제시한 것과 실제 교과서 구성의 비교, 개정된 교육과정에 따른 교과서 내용 구성의 변화 등에 대한 것이 대부분이고, 문제해결력을 증진시키는 요소와 관련해서 교과서를 분석한 연구는 드물었다(김용대 외, 2012).

그러므로 본 연구는 현행 교과서의 문항들을 분석함으로써, 학생들이 교과서의 문항을 통해 문제해결력을 기르려 할 때, 창작형 가추적 사고를 얼마나 자주 사용하게 될지 알아보려는 것이다.

Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011)의 연구를 바탕으로 문제해결에서 사용되는 가추적 사고의 분류법을 조정하여, 이것을 기준으로 현행 교과서의 문항들을 분석한다. 현행 교과서 문항들은 수학적 문제해결에서 어떤 가추적 사고들을 활용을 기대하고 있는지, 그 형태와 수준을 가늠해 보려는 것이다.

II. 이론적 배경

1. 지식의 생성과 가추

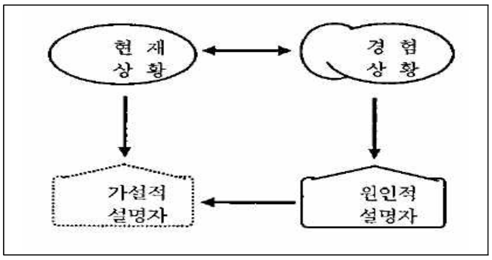
수학이라는 학문의 주 전개방법은 연역적 방법인데, 사실 연역적 방법만이 수학적 타당성을 인정받는[5] 전개방법이라 해도 과언이 아니다. 수학 분야에서는 연역적으로 논증되지 않은 아이디어는 인정되지 않으며, 따라서 수학적 연구결과에 대하여 각자의 서로 다른 의견이나 추측

5) 연구자는 수학적 귀납법을 연역법의 한 종류로 이해한다. (우정호 (2005))

때문에 발생하는 논쟁도 거의 없다[6].

이성에 의한 필연적 결과만을 주장하는 수학에 비해 새로운 경험적 발견에 의해 끊임없이 도전 받는 자연과학은 수학과 달리, 연역, 귀납, 가추의 방법을 모두 연구에 필요한 사고로 인정한다(안건훈, 2001).

자연 현상에 관한 설명적 지식은 가추에 의해 생성된다고 할 수 있다. 권용주 외(2002)는 가추를 미지의 현 상황을 이전에 경험했던 다른 상황과의 유사성에 비추어, 이전 경험을 차용하여 설명하는 추론이라 소개하며, 가추는 새로운 아이디어를 이끌어내는 유일한 추론이며, 귀납은 어떤 것이 실제로 작용하는지 보이는 방법일 뿐이고, 연역은 필연적인 결과를 이끌어낼 뿐임을 언급하였다. 권용주 외(2002)는 가추에 의한 과학적 지식의 생성과정을 다음과 같이 설명했다.



[그림 Ⅱ-1] 가추에 의한 과학적 지식의 생성과정 (권용주 외, 2002)

첫 번째 단계는 현재의 상황을 구성하는 하위 특성들을 살펴보고 이에 관한 의문을 던지는 단계이다. 두 번째 단계는 현재의 의문과 과거의 경험들의 유사성 정도를 판단하여 유사성이 높다고 판단되는 과거의 경험 상황을 생각해내는 단계이고, 세 번째 단계는 이 경험 상황을 설명하는 이미 알고 있는 '원인적 설명자'를 생각해내는 단계이다. 마지막 단계는 '원인적 설명자'를 바탕으로 현재의 상황을 가장 효과적으로 설명하는 '가설적 설명자'를 선택하는 단계이고, 이 과정을 통해 과학적 지식이 생성된다. 권용주 외(2002)에 의하면 네 단계 중 두 번째, 세 번째, 네 번째 단계는 가추적 추론 과정으로 볼 수 있다.

김진호(2005)에 따르면, 수학자들은 수학적 지식을 발견할 때, 직관에 의해 규칙을 추측하고, 추측한 규칙을 여러 상황에 적용해 봄으로써 그 중 유용한 규칙만 수학적 지식으로 구성하게 된다. 그는 수학자들의 이러한 지식 생성 과정과 사고과정은 학교수학을 학습하는 학습자에게서도 일어나야 한다고 주장한다.

가설의 기능은 통일성을 형성하지 못하는 많은 것들을, 그것들을 포함하는 하나 또는 적은 수의 것으로 대체하는 것이고, 이 과정이 가추이다.

어떠한 현상에 주목하는 것과 가설을 받아들이는 것 사이의 정신적 메커니즘 중에는 적절한 조건을 탐색, 확보하고, 때로는 알지도 못한 채 검사하고, 무의미한 노력을 하고, 놀랄만한 추측이 나오기도 하고, 변칙에 적합한 소견을 피력하기도 하는 등의 것들이 탐구의 첫 단계를 구성한다고 보는 것이다.

문제를 읽고 이해하여 해법이 바로 떠오르는 문제는 어려운 문제가 아니며, 해결 알고리즘을 스스로 찾아내는 문제가 어려운 문제라고 할 때, 수학에서 어려운 문제라고 간주되는 문제의 대부분이 이런 탐구 과정을 거쳐야 해결되는 문제라는 사실에 유념할 필요가 있다.

가추법은 안정성을 제공하지 않으므로 반드시 테스트되어야 한다. 테스트는 가설을 먼저 검토하고, 그 가설과 결부되는 모든 종류의 조건적 실험결과의 검열로부터 시작되어야 한다. 그리고 학생들의 풍부한 지식과 연역적 추론 능력은 이와 같은 검열과정에서 빛을 발하게 된다. 그렇지

6) 주장하는 수학적 개념의 몰이해로부터 발생되는 논쟁, 정의나 공리의 의미에 관한 타당성 가치 논쟁 등은 제외한다. 가령, 증명의 이해 과정의 논쟁이나, 무한은 실재 하는가 같은 논쟁은 여기서 말하는 수학적 논쟁이 아니다. 즉 명제의 참과 거짓에 관한 주장만을 뜻한다.

만 그것은 가추가 이루어진 후에야 비로소 가능해지는 과정일 뿐이다.

2. 가추(Abduction)의 분류에 관한 선행 연구

가. Eco의 가추 분류

Eco(1983)는 처음에는 Peirce의 가추를 세 가지로 분류하는 것이 적합하다고 여겼다가, 후에는 반성적 가추(Meta-abduction)의 개념을 추가하여 네 가지로 소개하였다.

가정 또는 확정적 가추(Overcoded abduction)는 자동적으로 법칙이 결정된다. 규정된 규칙을 통해 문제 상황을 해석하는 것에는 가추가 최소한으로 사용되므로 생각하기에 따라서는 가추라고 말하기는 어렵다고 할 수도 있다. 또, 가변적 가추(Undercoded abduction)는 통용되는 다양한 지식 중에서 이용할 수 있는 적합한 지식을 선택하는 것을 말한다. 규칙은 다양하고 문제해결자의 판단에 의해 융통성 있게 선택된다. 한편 창작형 가추(Creative abduction)는 통용되는 지식 중에서 선택할 것이 없을 때 새로운 규칙을 고안하는 것으로, 이때의 규칙은 복잡하지 않아도 된다. 그런데 앞서의 세 가지 중에서 어떤 경우든지, 새로운 생각의 고안은 반성적 가추(Meta-abduction)를 일으키는데, 반성적 가추(Meta-abduction)는 우리가 가추의 첫 단계에서 가능할 것이라 생각한 것과 실제 실험을 통해 확인한 것이 같은지, 즉 추측이 적합한지 결정할 때 이루어진다. 확정적 가추 또는 가변적 가추에서는 이런 반성 단계의 추론이 필수적이지는 않다고 연구자는 생각한다. 이런 경우는 이미 경험을 통해 확인된 규칙들로 추론하기 때문이다. 창작형 가추에서는 확실성이 보장되지 않기 때문에 반성적 가추를 통해 바른 추측을 완성할 수 있다.

따라서 앞의 세 가지 가추 중에서 새로운 생각과 관련지어 가장 중요한 것은 창작형 가추라고 할 수 있다.

나. Pedemonte & Reid의 가추 분류

Pedemonte & Reid(2011)는 Eco(1983)의 가추 분류를 바탕으로 가추를 재분류하였다. 확정적 가추(Overcoded abduction)는 주어진 상황에 해당하는 규칙이 딱 하나 생각날 때 해당된다. 가변적 가추(Undercoded abduction)는 주어진 상황에 해당하는 다양한 규칙이 생각나는 경우이다. 선택형 가추(Selective abduction)(Magnani, 2001, Pedemonte & Reid, 2011; 재인용)는 확정적 가추와 가변적 가추를 연결한 것으로, 여러 규칙들의 결론을 대조함으로써 가장 적합한, 포괄적인 규칙을 찾는 것이다. 창작형 가추(Creative abduction)는 주어진 사례에 대한 보편적인 규칙을 찾을 수 없을 때, 문제해결자가 새로운 규칙을 고안하는 것이다. 알고 있는 규칙으로부터 새로운 규칙을 만드는 창작형 가추가 가장 어려운 가추이고, 만들어진 규칙이 바른 이론인지 확인하기 위해 많은 검증이 필요하다. 결국 반성적 가추 외에는 Eco의 견해와 크게 다르지 않으며, 창작형 가추와 관련된 두 연구의 생각은 서로 같다고 할 수 있다.

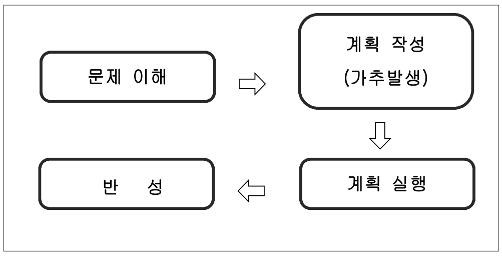
3. 수학적 문제해결과정에서의 가추

수학적 문제 상황이 주어졌을 때, 문제해결자는 기존의 알고 있던 규칙으로부터 새로운 사실을 이끌어내면서 가설을 세우게 되는데, 기존의 규칙과 현재 관찰된 결과로부터 추측할 수밖에 없고 이러한 과정에서 새로운 수학적 사실이 발견, 발명된다(김선희, 이종희, 2002). 김선희, 김

기연(2004)에 의하면 가추는 수학적 모델링에서 여러 역할을 담당하는데, 현실 모델에서 수학적 모델을 추상화하고, 수학적 결과에 대한 실질적인 근거를 제시하는 해석을 하고, 기존의 수학적 모델을 수정하여 새로운 수학적 모델을 도출하는데 사용된다. 가추는 수학적 사실을 발견하는 데에 유용하게 작용할 수 있으며, 수학적 모델링을 통해 문제의 답을 찾는 과정에서도 중요한 역할을 한다고 강조하고 있다.

Polya는 모든 문제의 해결을 문제에 대한 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 4단계로 구분하여 제시하였다(Polya, 1971; 우정호 역, 2005)

문제 이해 단계나 계획의 실행 단계, 또는 반성 단계에서 가추가 전혀 일어나지 않는다고 할 수는 없다. 그러나 계획 작성 단계는 그 자체가 가추와 예상되는 결과에 대한 역행추론[7] (retroduction)의 연속이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅱ-2] Polya의 문제해결의 4단계

Polya는 이 과정에서 수학적 지식 외에 발견술(heuristic)의 역할에 대해 주목하였는데, 연구자는 그런 발견술이나 지식의 활용이 가추의 틀 속에서 움직인다는 점에 주목하였다. 정확한 풀이절차를 이미 알고 있는 상황[8]이 아니라면, 즉 진정한 문제해결의 상황이 전개된다면, 이 때 문제해결의 계획 작성은 대부분 추측에 의존할 수 밖에 없기 때문이다.

이상의 선행연구들을 바탕으로 본 연구에서는 문제해결 과정에서의 가추적 사고를 다음과 같이 정의한다. 문제해결 과정에서의 가추적 사고란, 제시된 문제를 이해한 후 문제와 사전지식의 유기적인 관계를 이해하고 '이렇게 하면 이 문제가 해결될 것이다.' 라는 가설을 설정[9]하여, 문제에 대한 계획을 작성하게 하는 사고이다. 문제해결자는 학습한 사전 지식 중 문제 상황에 적합한 지식이 있는지 없는지에 따라 다른 가추법을 사용하여 문제를 해결할 것이며 또한 사전 지식을 근거하여 선택한 규칙 혹은 만들어낸 규칙의 적합성을 비판적으로 판단할 것이다.

결국 활발한 가추가 문제해결의 필수요소라고 할 수 있는데, 여기에는 그 활동을 활발하게 해주는 여러 가지 심리적 기제가 필요하다고 추측된다.

한국교육개발원에서 발간한 기본연구 보고서 RR85-09(강옥기 외, 1985)중에 문제해결의 심리학(p22) 부분에서는 문제해결의 4요소로서 자원(source), 발견술(heuristic), 통제(monitoring), 수학적 신념(belief system)을 적고 있다. 본 연구는 그 중에서 통제와 밀접한 관련을 갖는 연구라고 생각할 수 있다.

왜냐하면, Cifarelli(1997)는 "문제해결과정 중 예상하지 못한 문제가 발생했을 때 어떻게 진행할지에 대한 아이디어의 근원을 구성하는 이해활동에 가추가 큰 도움이 되고, 특히 새로운 탐

7) 역행추론에 대해 일부 학자들은 가추와 동일시하기도 한다. 여기서 역행추론이란 가추에 대한 연역적 검증과 유사하지만 연역처럼 엄밀한 것이라고 할 수 없고, 다시 추측의 과정일 뿐인데 가추와는 달리 검증과정이라는 차이가 있다. "그렇게 하면 정말 문제해결에 도움이 될까? 이렇게 다음 순서를 진행하면 도움이 되려나?" 같은 생각을 역행 추론이라고 본다.(Berth Danermark 외(2005))

8) 이 경우도 문제해결 상황으로 보는 경우가 있고, 그래서 가추적 추론이 일어난다고 볼 수도 있는데, 본 연구에서도 이 경우를 가추의 일부(overcoded abduction)로 분류하였다.

9) 이렇게 생각할 때 문제해결 계획수립 단계의 거의 모든 생각이 가추 또는 역행 추론이라고 할 수도 있다.

색을 돕고, 이후 해결활동을 구조화하는 것을 돕는다." 고 하였는데 바로 이런 활동이 통제를 의미하기 때문이다.

또 Kehle & Lester(2003, 김선희, 김기연, 2004; 재인용)는 "일상 경험으로부터 수학 모델을 유도하는 단순화, 추상화뿐만 아니라 현실적 경험에 대한 해석에서도 가추적 사고가 사용될 수 있다고 하였다. 가추적 사고는 사례에 대한 추론을 하는 것이므로 모델링 과정에서 모델을 형성하는 단순화와 추상화, 그리고 그 모델이 적합한지 확인, 수정하는 해석에 사용될 수 있다."고 하였는 데 이것이 바로 발견술이 적용되는 통제의 모습이라고 할 수 있기 때문이다.

가추적 사고에서는, 추측에 따른 반복적인 시행착오와 실패가 예상됨으로, 시행착오를 줄여주는 지혜로운 가추적 추론과 시행착오를 극복할 에너지인 과제집착력이 특히 요구될 것이라고 판단된다. 과제 집착력은 곧 문제해결에 대한 욕구와 의지의 영향을 받을 것이라는 점은 쉽게 예상할 수 있고 결국 흥미, 수학적 신념(belief system) 등과 연결되는 문제라고 생각된다. 그러나 이것은 다시 과거의 문제해결의 성공 경험과 밀접한 관련을 가질 수 있기 때문에 원인과 결과의 순환적 관계로 인해 적절한 분석 방법을 찾기가 어려워 보인다.

한편 지혜로운 가추적 추론이란 가추에 의한 추측의 결과가 문제해결에 효과적으로 이어지는 추측을 말한다.

앞서 가추적 추론은 자신의 사고를 통제하는 능력과 밀접한 관련이 있다고 하였다. 이것은 문항마다 일어나는 가추와 역행추론의 문항관련 유효성을 생각하는 것이다.

결국 문제해결에서의 통제의 문제는 계획 작성과 관련된 가추의 효과를 높이는 방향을 의미하며 따라서 가추에 주목할 것을 요구한다고 보는 것이다.

이 때 가추의 문항관련 효과는 어떤 종류의 가추인가에 따라 차이가 있을 것이 예상됨으로, 가추의 종류를 구분하여 다양한 가추 활동이 이루어질 수 있도록 하는 것이 바람직하리라 보는 것이다.

4. 가추의 분류

먼저 Eco(1983)의 분류는 문제 상황에서 가추적 사고를 통해 생각할 수 있는 규칙의 특성에 따른 분류이기 때문에, 문항을 분석하기에 좋은 분석틀이 될 수 있다. 그러나 본 연구는 문제 상황에서 해결을 위한 가설을 세울 수 있게 해주는 사고가 가추라고 하였으므로, 문제에 대한 규칙을 단 하나 알고 있어 그 하나의 규칙을 사용하면 문제를 해결할 수 있을 것이라 생각하는 확정적 가추 역시 가추로 본다는 점에서 그와 생각을 달리한다. 또한 Eco는 반성적 가추를 창작형 가추를 완성하기 위한 과정이라 언급하였으나, 반성적 가추는 모든 가추적 사고 후에 나타나는 사고라고 생각된다.

Pedemonte & Reid(2011)은 Eco(1983)의 분류 중에서 생각난 규칙 중 가장 적합한 규칙을 선택하는 선택형 가추를 추가하여 가추가 일어나는 상황에 대해 구체화하였다. 그러나 규칙이 하나 생각날 때에도 그 규칙이 문제 상황에 적합한지 고려하여 사용할지 선택하게 되며, 여러 가지 규칙이 생각날 때에도 그런 과정은 동일하게 일어나게 되므로 선택형 가추를 확정적 가추나 가변적 가추와는 다른 종류의 가추 유형으로 보기는 어렵고, 문제 상황에 따라 선택형 가추와 창작형 가추가 한꺼번에 일어날 수도 있다.

또한 이와 같은 가추의 분류가 선명하게 각각의 특징을 드러내지 못한다고 생각하여, 정해진 기준에 따라 분류를 단순하게 하되 서로 다른 분류들을 서로 교차시키는 방식을 통해 분류가

선명해 지도록 하였다.

먼저 문제 상황으로부터 해결에 사용할 떠오르는 규칙의 개수에 따라 개수가 하나 뿐인 경우의 확정적(Overcoded)인 것과 규칙의 개수가 2개 이상인 가변적(Undercoded)인 것으로 구분한다.

또 다른 한 가지 분류 방식은 발생되는 가추에서의 지식이 기존의 경험과 지식 리스트에서 선택하는 선택형(selective)인 것과, 기존의 리스트에는 없어서 문제 상황에 맞게 경험, 지식의 조합을 통하여 직관적으로 새롭게 구성되는 창작형(creative)으로 구분할 수 있다.

그리고 이들을 교차하여 확정적-선택형, 확정적-창작형, 가변적-선택형, 가변적-창작형의 네 분류를 생각할 수 있는데, 실제 분류에서 가변적 가추가 예상되는 문항 중에서 부분적으로 선택형 부분적으로 창작형이라고 할 수 있는 경우가 있어서 이 경우는 혼합형이라고 하기로 하고 가변적 - 혼합형이라는 분류 항목을 추가하였다.

첫째, 확정적-선택형 가추(Over-Selec abduction)는 문제해결자가 이미 학습한 수학적 지식 중 주어진 문제해결에 도움을 줄 것으로 예상되는 규칙이 단 하나 떠오르고, 다른 규칙은 떠오르지 않는 경우에 사용되는 가추적 사고이다.

다음의 [그림 II-3]은 '도형의 닮음' 단원 문항 중 확정적-선택형 가추를 사용할 수 있는 예에 해당한다. 이 문항을 해결하기 위해서는 '닮음인 두 도형은 대응변의 길이의 비가 일정하다.' 의 규칙만을 생각하고 이용할 수 있으므로 확정적-선택형 가추를 사용할 수 있다.

문제 해결 영화속에서 키가 6m, 얼굴의 길이가 1.4m인 괴물을 촬영하기 위해 키가 30cm인 모형을 만들었다. 이 모형에서 얼굴의 길이는 몇 cm로 만들어야 하는지 구해 보자.

[그림 II-3] 확정적-선택형 가추 문항 예시 1
(박윤범 외, 2010, p.217)

본 연구는 문제 상황과 관련된 규칙을 단 하나 알고 있더라도 '그 규칙을 사용하면 이 문제를 해결할 수 있다.'는 생각을 하는 것이 가추적 사고라 여겨 확정적 가추 역시 가추로 보고, 또 관련 규칙을 한 가지 알더라도 그 규칙을 사용해도 좋겠다는 생각을 하는 것은 선택형 가추가 일어난 것이므로 이런 경우를 확정적-선택형 가추로 분류하였다.

그러므로 이런 유형의 문항들은 문제 상황으로 제시되기 이전에 소개된 기본적 원리들을 바르게 적용하기 위한 목적으로 제시되는 경우가 많을 것이 예상되며, 주제별 학습 초기에 기초지식을 확립하기 위해서 사용하기에 좋은 문항들이 될 것이라고 예측된다.

둘째, 가변적-선택형 가추(Under-Selec abduction)는 문제해결자가 이미 학습한 수학적 지식 중 주어진 문제 상황을 해결하는 데 도움이 될 것으로 판단되는 지식이 두 가지 이상 떠오르고, 새로운 규칙은 떠오르지 않는 경우의 가추적 사고이다.

다음의 [그림 II-4]는 '문자와 식' 단원 문항 중 가변적-선택형 가추를 사용할 수 있는 예에 해당한다. 문제에 한 문제를 해결하는 두 가지 방법을 비교하도록 제시함으로써 두 가지 방법을 동시에 생각할 수 있도록 유도하고 있다.

추론 $6x^2+17x+5$를 $6x^2+15x+2x+5$로 한 후 인수분해하여도 결과가 같은지 확인해 보자.

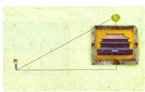
[그림 II-4] 가변적-선택형 가추 문항 예시 2
(강신덕 외, 2011a, p.48)

이 때, 알고 있던 여러 종류의 수학적 지식은 근본적인 원리가 상이해야한다. 또한 문제 계획 단계에서의 가추적 사고를 확인하는 것이므로, 떠오른 여러 생각 중 결과적으로 문제해결에 도

움을 주지 않는 생각이 포함되어도 가변적-선택형 가추로 분류한다.

따라서 가변적-선택형 가추 문항은 문제해결자가 학습한 여러 원리 중 문제해결을 위해 사용할 원리를 선택하는 형태로 나타나, 이 유형의 문항을 통해 문제해결자는 여러 원리 사이의 관계와 각 원리의 선행조건을 명확히 이해하는 데 도움이 될 것이라고 예상되며, 학습자의 기초지식은 상호 연결성이 더해져 더 탄탄해질 것이 기대된다

셋째, 확정적-창작형 가추(Over-Creat abduction)는 문제해결자가 이미 학습한 수학 규칙 중 문제해결에 도움이 될 규칙이 하나도 떠오르지 않아 새로운 규칙을 하나 생각해내는 경우의 가추적 사고로, 그 규칙이 문제 상황에 적합한 규칙이어야 발견한 것으로 인정한다. Eco(1983)와 Pedemont & Reid(2011)는 창작형 가추를 확정적 가추나 가변적 가추와 구분하였으나, 본 연구는 선택형 가추를 확정적-선택형 가추와 가변적-선택형 가추로 나누었으므로 창작형 가추 역시 확정적-창작형 가추와 가변적 창작형 가추로 분리하여, 문항이 다양한 창작형 가추를 유도하는지 확인하고자 한다.



정사각형 모양의 성의 동, 서, 남, 북의 벽 가운데에 각각 성문이 있다. 북문을 나와 북쪽으로 20걸음 가면 큰 나무가 한 그루 서 있는데, 남문을 나와 남쪽으로 14걸음 간 지점에서 서쪽으로 직각으로 꺾은 후 1775걸음 걸어가야 비로소 나무가 보인다고 한다. 이 성의 한쪽 벽의 길이는 몇 걸음이나 되는가?

[그림 II-5] 확정적-창작형 가추 문항 예시 2
(정상권 외, 2011, p.75)

위의 [그림 II-5]은 '문자와 식' 단원 문항 중 확정적-창작형 가추를 사용할 수 있는 예이다. 문제해결자는 표면적으로 나타나지 않는 해결 방법을 생각해야하고, 이전에 학습한 삼각형의 닮음을 이용할 것을 생각하면서 비례식을 세워 문제를 해결할 수 있다. 문제를 접하자마자 생각해 낼 수는 없는 규칙을 한 가지 찾아내고 이를 이용하여 문제를 해결하는 과정이 확정적-창작형 가추의 과정이다.

따라서, 확정적-창작형 가추 문항은 도형을 변형하거나 문제의 규칙을 스스로 발견하여 해결하는 형태로 나타나, 기초 지식이 확립된 후 주어진 문제 상황을 변형하고 스스로 규칙을 찾아 이미 알고 있는 원리에 창의적으로 연결할 수 있는 학습을 위해 효과적일 것이라고 본다.

넷째, 가변적-창작형 가추(Under-Creat abduction)는 문제해결자가 이미 학습한 수학 규칙 중 문제 상황에 도움이 될 규칙이 하나도 떠오르지 않아 새로운 규칙을 여러 개 생각해내는 경우의 가추적 사고로, 발견한 여러 규칙이 모두 문제 상황에 도움이 될 규칙일 때 여러 개 발견한 것으로 인정한다. 따라서 가변적-창작형 가추 문항은 여러 가지 규칙을 스스로 발견해야 하므로 확정적-창작형 문항보다 더 많은 수학적 지식을 요구한다고 할 수 있고, 결국 심화된 창의적인 학습에 효과적일 것이 예상된다.

내가 만드는 문제
이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.
반지름의 길이가 20m인 원 모양의 인공 호수가 있다. 오른쪽 그림과 같이 호수의 둘레에 폭이 xm인 산책길을 만들려고 한다. 길의 넓이를 호수의 넓이의 3배가 되도록 할 때, x의 값을 구하여라.

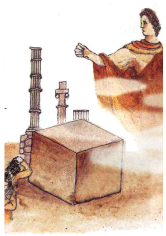
문제 만들기
문제의 조건 바꾸기
- 호수의 크기를 다르게 하면?
- 길의 넓이를 호수의 넓이의 2배로 하면?

새로운 문제와 해결
조건을 바꾸어 새로운 문제를 만들고, 이를 해결해 보자.

[그림 II-6] 가변적-창작형 가추 문항 예시 2
(강신덕 외, 2011b, p.77)

다음의 [그림 II-6]는 ‘문자와 식’ 단원 문항 중 가변적-창작형 가추를 사용할 수 있는 예이다. 조건을 다양하게 변형하여 문제를 만드는 문항을 통해 문제해결자는 다양한 창작형 가추를 할 수 있으며, 그것을 해결하는 과정을 통해 자신이 바꾼 조건이 과정에 어떤 영향을 미치는지 직접 확인할 수 있다.

부피가 2배인 제단을 만들어라
기원전 5세기경 그리스의 델로스 섬에는 전염병이 발생하여 많은 사람들이 죽었다. 겁이 난 사람들은 이것이 아폴로 신의 노여움 때문이라고 생각하여 아폴로 신에게 많은 곡물을 바치며 전염병을 없애 주길 간청했다. 그러자 아폴로 신은



“신전에 있는 정육면체 모양의 제단과 모양은 같게 하되 부피를 2배로 만들어라. 그리하면 전염병이 없어질 것이다.”
라고 말하였다. 사람들은 제단과 똑같은 정육면체를 하나 더 만들어 제단 옆에 두고 부피가 2배가 되었으니 전염병이 없어질 것이라고 기뻐하였다. 그러나 병은 없어지지 않았다.
그래서 사람들은 다시 정육면체의 각 변의 길이를 각각 2배로 하는 새로운 제단을 만들었다. 그러나 이번에도 전염병은 없어지지 않았고 아폴로 신의 노여움을 진정시킬 수 없었다.

문제 해결 (1) 사람들의 첫 번째 시도가 성공하지 못한 이유는 무엇인지 말해 보자.
(2) 제단의 각 변의 길이를 2배로 했을 때, 부피는 몇 배가 되는지 구해 보자.
(3) 아래 표를 이용하여 부피가 2배인 새 제단을 만들려면 정육면체의 각 변의 길이를 약 몇배 하면 되는지 구해보자.

x	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25
x^3	1.771561	1.815848	1.860867	1.906624	1.953125
x	1.26	1.27	1.28	1.29	1.3
x^3	2.000376	2.048383	2.097152	2.146689	2.197

[그림 II-7] 가변적-혼합형 가추 문항 예시 1
(박윤범 외, 2010, p.237)

다섯째, 가변적-혼합형 가추(Under-mixed abduction)는 이미 학습한 수학 규칙 중 주어진 문제를 해결할 수 있는 관련된 규칙이 떠오르고, 또한 그 규칙과는 다른 원리의 새로운 규칙을 생각해낸 경우인데, 문제에 따라 알고 있던 규칙과 새롭게 생각해낸 규칙을 같이 사용하여 문제 해결을 꾀할 수도 있을 것이다. 이 유형은 Eco(1983)나 Pedemonte & Reid(2011)의 가추 분류에서 언급되지 않은 유형으로, 선택형 가추와 창작형 가추가 결합된 가추 유형이다.

위의 [그림 II-7]는 ‘도형의 닮음’ 단원 문항 중 가변적-혼합형 가추를 사용할 수 있는 예에 해당한다. 도형의 닮음의 정의, 닮음비와 부피비 사이의 관계를 이용함으로써 선택형 가추를 할 수 있고, 또한 배우지 않은 세제곱근의 개념을 표를 통해 도입함으로써 세제곱의 값이 2가 되는 수는 몇 정도가 될지에 대해 창작형 가추를 사용할 수 있다.

이 유형의 가추는 선택형과 창작형이 결합된 형태로서 고난도의 문항이 많고 창의력과 과제 집착력을 높이는데 기여할 수 있는 종류의 문항일 것이라고 추측된다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

대표적인 논증 중심의 단원이라고 할 수 있는 중2 도형의 닮음 단원과 중등학교 대수의 핵심이라 할 수 있는 문자와 식 단원 중에서 숙달된 조작 중심의 중3 문자와 식 단원을 분석하였다.

중학교 2학년 총 27종 교과서와 중학교 3학년 총 24종 교과서 중에서 3개[10] 출판사의 교과서

10) 결과적으로 분석한 문항은 교과서와 익힘 책 합하여 403문항에 이르며, 분석 량이 많은 것이 항상 더 정확한 결과를 보장하는 것은 아니다. 통계학에서 표본조사가 전수조사보다 더 정확하다고 하는 이유와 같은 이유다.

를 임의로 선정하였다. 학년별 세 출판사의 수학 책과 수학 익힘책의 모든 문항들, 즉 총 403문항을 분석하였는데, 같은 조건에서 같은 것을 묻는 문항은 중복되지 않도록 한번만 분석하였다.

많은 교과서 중에서 일부 교과서만을 분석한 것이기 때문에 본 연구의 분석 결과를 일반화하기에는 한계가 있다.

2. 연구 방법

분석 과정에서는 교과서의 각각의 문항들을 해결하기 위해 학생이 어떤 가추적 사고를 하게 될지 문항 별로 예측해보고, 그런 사고의 역할을 검토해 보고자 한다.

그리고 문제 해결과정의 각 단계마다 다양한 가추적 사고가 있을 수 있지만, 본 연구는 처음 문제를 접하고 문제를 이해하여 '계획 수립 단계' 중에 일어나는 가추적 사고만을, 앞의 이론적 배경 II-3절에서의 논의에 따라, 그 문항에 필요한 가추적 사고라고 판단하였다.

문항 분류의 객관성 확보를 위해, 연구자 외 2명, 모두 3명의 판단자가 각각 문항을 분석하고 그 의견을 종합하여 분석하였다.

세 판단자는 학원 및 중학교에서 강사, 교사 경력이 2년-5년이고, 수학교육전공 석사이거나 석사과정 중이다.

판단집단은 그들이 학생들을 가르친 경험을 바탕으로 하여, 학생들이 각 문항을 접했을 때 학생들에게 나타났던 각자의 경험들에 포함된 모든 경우의 가추적 사고를 반영하기 위해 노력하였다.

따라서 3명에 불과한 이들 판단 집단의 생각을 일반화 할 수는 없으나 그들의 판단이 대부분의 다른 교사들의 판단과 크게 다르거나 또는 대부분의 학생들의 실제 풀이 방법과는 현저한 차이가 있을 것이라고 할 수도 없다.

또한 한 문항에 대해 여러 학습자가 다르게 생각하고 다른 방법으로 해결할 수 있는 문항은 할 수 있는 모든 생각을 포함하여 문항을 분류하기 위해 노력하였다. 총 403 문항을 3명의 판단자가 각각 분류한 후, 연구자가 그 결과를 취합하여 분석하는 형태로 이루어졌다. 세 판단자가 각각 분류한 유형별 수치를 평균을 내어 살펴보되, 효과적인 결과 분석을 위해 분류된 가추 유형의 수치를 전체 문항, 교과서별 문항, 단원별 문항 순으로 비교 분석하고, 각 가추 유형으로 분류된 문항들의 특징을 살펴보았다.

Ⅳ. 연구결과

'가추적 사고의 분류'를 기준으로 현행 교과서를 효과적으로 분석하기 위해, 전체 문항의 유형 분포를 분석한 뒤, 교과서별, 단원별로 분석을 하고, 가추적 사고의 다섯 가지 유형별 특징을 분석한다.

1. 분석 대상 전체의 가추 유형 분포

분류	평균 문항 수 (문항)	해당 비율 (%)	분류	해당 비율 (%)
확정적-선택형	260	64.5	선택형	92.2
가변적-선택형	111.7	27.7		
확정적-창작형	20.3	5.0	창작형	6.4
가변적-창작형	5.3	1.3		
가변적-혼합형	5.7	1.4	혼합형	1.4
총 계	403	100	총계	100

<표 Ⅳ-1> 전체 문항의 가추적 사고 분류

분석 대상이 되는 403문항을 분석한 결과, 문제해결을 위해 확정적-선택형 가추를 사용할 수 있는 문항이 평균 260문항으로 64.5%를 차지하

여 가장 큰 비율을 보였고, 가변적-선택형 가추를 사용할 수 있는 문항이 평균 111.7문항으로 27.7%를 차지하였다. 또한 확정적-창작형 가추를 사용할 수 있는 문항이 평균 20.3문항으로 5.0%를 차지하였고, 가변적-창작형 가추를 사용할 수 있는 문항이 평균 5.3문항으로 1.3%, 가변적-혼합형 가추를 사용할 수 있는 문항은 평균 5.7문항으로 1.4%를 차지하여, 비슷한 비율을 보였다.

이 결과를 선택형 가추와 창작형 가추, 혼합형 가추의 세 유형으로 비교하면, 선택형 가추 문항이 92.2%, 창작형 가추 문항이 6.4%, 혼합형 가추 문항이 1.4%로 90%가 넘는 문항이 모두 선택형 가추를 사용할 수 있는 문항으로 구성되어 있음을 볼 수 있다.

2. 가추적 사고의 교과서별 특징

각 교과서에 수록된 문항을 분석한 결과, 확정적-창작형 가추 문항과 가변적-창작형 가추 문항을 합한 창작형 가추 문항은 적은 비율이지만 다른 유형에 비해 교과서별 격차가 큰데, 2학년 교과서가 3학년 교과서에 비해 많이 나타났다. 가변적-혼합형 가추 문항은 모든 교과서에서 미미한 비율로 나타났다.

특별한 차이는 한 교과서(신항균 외, 2010, 2011)에서만 '문제 만들기' 문항과 '논술&서술' 문항이 나타났는데, '문제 만들기' 문항은 한 주제에 관한 문항을 문제해결자 스스로 구성하도록 함으로써, 문제해결자가 해당 주제에 관한 다양한 접근을 시도하면서 문제를 만들게 되고 또한 새로운 문항을 창작한다는 측면에서 가변적-선택형 가추나 가변적-창작형 가추를 사용할 수 있도록 한다고 분석되었다. 또한 '논술&서술' 문항은 주어진 문제를 해결하는 방법을 언어로 설명하고자 해결방법을 논리적으로 구성하기 위해 문제를 다양한 측면에서 살펴봄으로써 다른 문항에 비해 가변적-선택형 가추를 비교적 많이 사용할 수 있게 하는 것으로 분석되었다. [그림 Ⅳ-1]이 그 예이다.

논술&서술

4. 인수분해를 이용하여 다음을 계산하는 과정을 설명하여 보아라.

$$\boxed{1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2}$$

[그림 Ⅳ-1] '논술&서술' 문항의 예 (신항균 외, 2011, p.48)

3. 가추적 사고의 단원별 특징

단원별 수록된 문항을 분석한 결과 각 단원의 대부분을 차지한 선택형 가추 문항의 경우 '도형의 닮음' 단원과 '닮음의 활용' 단원은 확정적-선택형 가추 문항이 그 중 대부분이었으나 '인수분해' 단원과 '이차방정식' 단원은 확정적-선택형 가추 문항과 가변적-선택형 가추 문항이 비슷한 비율을 보였다. 또한 다른 단원에 비해 '닮음의 활용' 단원에서 창작형 가추 문항이 많이 나타나는 것을 볼 수 있으며, '인수분해' 단원에서는 창작형 가추 문항이 거의 나타나지 않음을 볼 수 있다. 이러한 특성은 '도형의 닮음' 단원과 '닮음의 활용' 단원은 도형의 다양한 성질을 바로 바로 숙지한 후 창의적으로 활용하도록 구성하고자 확정적-선택형 가추 문항과 창작형 가추 문항이 많이 나타난 것으로 생각할 수 있으며, '문자와 식' 단원은 공식을 이용해 식을 조작하는 것에 중점을 두어 아는 지식 안에서 문제를 해결하도록 하는 선택형 문항이 대부분인 것으로 생각할 수 있다.

4. 가추적 사고의 유형별 문항제시 형식 및 방법의 특징

가. 확정적-선택형 가추

전체 문항의 64.5%를 차지한 확정적-선택형 가추 문항은, 문항의 교과서 내에서 놓인 위치로 미루어 볼 때, 대개 “먼저 원리를 설명하고 이 원리의 바른 적용을 훈련시키는 목적으로 제시되는 경우”가 많았다. ‘도형의 닮음’ 단원에서는 제시된 해결법에 그대로 적용하여 해결하는 문항이 대부분이었던 것에 반해, ‘문자와 식’ 단원에서는 제시된 방법을 문제 상황에 비추어 그에 맞는 방법을 적용하는 문항이 비교적 많았다. 확정적-선택형 가추 문항의 특징을 고려하면, 문항 구성시 이미 소개한 이론의 바른 적용을 위해서는 확정적-선택형 가추 문항을 제시하는 것이 효과적이다. 그러나 Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011)의 지적과 같이 확정적-선택형 가추는 가추적 사고의 결과를 고민하지 않게 한다. 그런 점에서 64.5%의 문항이 모두 확정적-선택형 가추 문항이라는 결과는 기계적인 학습을 우려하게 한다.

나. 가변적-선택형 가추

전체 문항의 27.7%를 차지한 가변적-선택형 가추 문항은, 교과서 내에 문항이 놓인 취치로 미루어 볼 때, 저자가 “한 주제에 관한 여러 원리가 소개된 후 문제해결자가 그 원리들 중 문제해결을 위해 사용할 원리를 선택하는 연습”을 의도한 것처럼 추측되는 형태가 많았다. 가변적-선택형 가추 문항들의 이러한 특징을 고려하면, 여러 원리를 소개한 뒤 문제 상황에 적합한 원리들을 스스로 선택하여 해결하는 능력을 기르고자 할 때 가변적-선택형 가추 문항을 활용하면 효과적일 것이고, 기초지식을 더 탄탄히 하도록 도울 것이다. 그러나 현행 교과서의 가변적-선택형 가추 문항들은 한 가지 방법만 생각하여 해결하면 더 이상 해결 방법이나 규칙을 생각하지 않아도 되는 형태이다. 그러므로 가변적-선택형 가추를 사용하기 위한 문항을 제시할 때, 문제에서 ‘두 가지 이상의 방법을 이용하여’와 같은 말을 직접적으로 명시하면 문제해결자가 가변적-선택형 가추를 이용하여 문제를 해결할 수 있을 것이다.

다. 확정적-창작형 가추

전체 문항의 5.0%를 차지하는 확정적-창작형 가추 문항은 “주어진 문제 상황 그대로는 해결하기 어려운 문제의 도형을 변형하거나 문제의 규칙을 스스로 발견하여 해결하는 경우”가 대부분이었다. 확정적-창작형 가추 문항은 3학년 ‘문자와 식’ 단원에 비해 2학년 ‘도형의 닮음’ 단원에서 4배가 넘는 수로 많이 나타났다. 이 결과는 ‘도형의 닮음’ 단원에서는 도형을 변형하고 보조선을 긋는 등 다양한 창조적 방법을 생각할 수 있는 문항이 많이 제시되는 반면, ‘문자와 식’ 단원은 창조적인 생각을 하기 어려운 문항이 많이 제시된다는 것을 보여준다. 특히 ‘인수분해’ 단원에서는 확정적-창작형 가추 문항이 한 문항도 나타나지 않아, ‘인수분해’ 단원의 특성상 기계적인 학습이 될 수 있음을 보여주고 있다. 확정적-창작형 가추 문항들은 보조선을 그어 해결하는 문항이 가장 많았고, 표면적으로 바로 알 수 없는 해결 방법과 규칙을 찾아내는 형식의 문항이 많았다. 이러한 특징을 고려하면, 기초지식을 충분히 숙지한 상태에서 주어진 문제 상황을 변형하고 스스로 규칙을 찾아 이미 알고 있는 원리로 연결할 수 있는 다소 심화된 학습을 할 때, 확정적-창작형 문항이 효과적일 것이다.

라. 가변적-창작형 가추

전체 문항 중 1.3%를 차지하는 가변적-창작형 가추 문항은 “주어진 문제 상황 그대로는 해결하기 어려운 문제의 도형을 변형하거나 문제의 규칙을 스스로 발견하여 해결하는 방법이 여러 가지인 경우”였다. 가변적-창작형 가추 문항은 전체적으로도 매우 적은 비율이지만, ‘문자와 식’ 단원에서는 거의 0%로 나타났다. ‘도형의 닮음’ 단원에서도 ‘닮음의 활용’ 단원에서만 비교적 많이 확인할 수 있었다. 이러한 문항들의 특징을 고려하면, 기초지식이 충분히 숙지된 후 주어진 문제 상황을 변형하고 스스로 규칙을 찾아 이미 알고 있는 원리로 연결할 수 있는 다소 심화된 학습을 할 때 가변적-창작형 문항을 제시함으로써 기초지식을 활용한 심화학습에 효과적일 것으로 예상되며, 이 유형의 다양한 문항 개발이 필요하다.

마. 가변적-혼합형 가추

전체 문항의 1.4%를 차지하는 가변적-혼합형 가추 문항은 “복잡한 문항에서 보조선을 긋는 등의 창작형 가추를 한 뒤 도형의 성질을 이용하는 등의 선택형 가추를 하는 경우, 창작형 가추로 문제를 해결하는 방법도 존재하고 선택형 가추로 문제를 해결하는 방법도 존재하는 경우, 창작형 가추와 선택형 가추를 연속적으로 사용하는 방법이 여러 가지인 경우” 등의 문항이 나타나, 수적으로는 적지만 다양한 경우가 나타났다. 가변적-혼합형 가추 문항은 가변적-창작형 가추와 마찬가지로 ‘문자와 식’ 단원에서는 거의 이루어지지 않는 것으로 볼 수 있다. 이러한 문항들의 특징을 고려하면, 가변적-혼합형 가추 문항은 문제 상황을 변형하고 스스로 규칙을 찾은 뒤, 학습한 규칙들을 다시 적용하여 문제를 해결하는 최고난도 학습효과를 위해 사용될 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 문제해결과정 중 ‘계획 작성’의 단계에서 문제해결을 위한 가설을 추리하는 가추적 사고의 필요성을 제시하며, 모든 문제해결과정에는 가추적 사고가 일어남을 선행 연구 결과를 근거로 하여 주장하였다.

또, 본 연구는 문제해결과정에서 중요한 역할을 하는 가추적 사고가 현행 교과서 문항에서는 어떻게 나타나고 있는지 알아보고자, 먼저 교과서의 분석틀인 ‘가추적 사고의 분류’를 Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011)의 가추 분류를 재구성하여, 확정적-선택형 가추, 가변적-선택형 가추, 확정적-창작형 가추, 가변적-창작형 가추, 가변적-혼합형 가추의 다섯 유형으로 구성하였다.

수학 학습이 이루어질 때, 각각의 가추 유형을 사용하는 문항을 상황에 맞게 적절히 활용하면 수학적 지식을 정확히 학습하는 것과 문제해결을 향상시키는 데에 도움이 될 것이다.

구성된 ‘가추적 사고의 분류’를 분석틀로 하여 현행 교과서 3종의 중학교 2학년 ‘도형의 닮음’ 단원과 중학교 3학년 ‘문자와 식’ 단원을 연구자 외 2명의 판단자가 분석한 결과, 대부분의 문항이 선택형 가추를 사용할 수 있도록 구성되어있음을 볼 수 있었다. 교과서별로 비교하자면, 3학년 교과서들은 선택형 문항이 거의 100%를 차지하였고, 창작형 가추 문항은 2학년 교과서가 3학년 교과서에 비해 많이 나타났다. 이러한 차이는 기하영역과 대수영역이라는 단원에 따른 문항 차이로 볼 수 있는데, 단원에 따라 문항의 가추 유형이 지나치게 편중되어, 기하영역 단원에서는 가변적-선택형 가추를 통해 문제 상황에 따라 다양한 원리를 비교하여 지식을 확립하는 경험의 부족이 염려되고, 대수영역 단원에서는

창작형 가추 문항이 거의 없음에 따라 다항식을 다양한 상황에 적용할 수 있음을 학습하는 경험이 부족할까 염려된다. 단원의 특성에 따라 문항 유형의 분포가 조금 달라질 수는 있으나, 다섯 유형의 문항이 충분히 제공되어 학습자가 다양한 가추적 사고를 하며 문제해결과정을 다양하게 경험할 수 있도록 도와야 할 것이다.

본 연구는 이상의 논의를 바탕으로 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 현행 교과서에는 확정적-선택형 가추 문항이 대부분이므로, 가추의 다양한 경험을 학생들에게 제공하기 원한다면, 가추적 사고 유형이 더 다양하게 문항들을 제시할 필요가 있다.

둘째, 연구자는 본 연구를 수행하는 과정에서, 기초 지식을 확립하는 단계에서는 확정적-선택형 가추, 확립된 여러 기초 지식을 바르게 선택하여 적용해 보는 단계에서는 가변적-선택형 가추, 기초지식이 충분히 숙달되어 이들 지식을 문항에 부합되도록 변형하여 활용할 수 있는 단계에서는 확정적-창작형 가추, 가변적-창작형 가추, 가변적-혼합형 가추 등이 사용 적절하다는 느낌을 갖게 되었는데, 이런 연구자의 추측에 대한 확인 연구가 더 필요하다.

참 고 문 헌

강신덕, 홍민숙, 김영우, 전민정, 나미영 (2011a). **중학교 수학3**, 서울: 교학사.

강신덕, 홍민숙, 김영우, 전민정, 나미영 (2011b). **중학교 수학익힘책3**, 서울: 교학사.

강옥기 외(1985) 한국교육개발원 기본연구 보고서 RR85-09 **문제해결의 심리학** 한국교육개발원

권용주, 정진수, 강민정, 양일호 (2002). **과학적 설명 지식의 창의적 생성 과정**. 창의력교육연구 5(1), 5-18.

김선희, 김기연 (2004). **수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석**. 대한수학교육학회지 <학교수학> 6(3), 283-299.

김선희, 이종희 (2002). **수학적 추론으로서의 가추법**. 대한수학교육학회지 수학교육학연구 12(2), 275-290.

김용대, 최길수, 이종연 (2012). **중학교 정보 교과서에서 '문제해결 방법과 절차' 영역의 창의적 문제해결력 경향 분석**. 한국컴퓨터교육학회 논문지 15(1), 1-11.

김진호 (2005). **수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구할 수 있는 방안 모색**. 한국수학교육학회지 시리즈 A 44(1), 87-101.

박윤범, 남상이, 최소희, 홍유미 (2010). **중학교 수학익힘책2**. 서울: 웅진씽크빅.

신항균, 이광연, 황혜정, 윤혜영, 이지현 (2010). **중학교 수학익힘책2**, 서울: 지학사.

신항균, 이광연, 윤혜영, 이지현 (2011). **중학교 수학익힘책3**, 서울: 지학사.

안건훈 (2001). **과학, 기술 그리고 철학**. 서울: 철학과 현실사.

우정호 (2005), **수학학습지도 원리와 방법** p.341, 서울: 서울대학교출판부

이영하, 태성이 (2009). **수학과 수학교육학의 학문학적 비교연구 - 연구 방법을 중심으로 -**. 대한수학교육학회지 수학교육학연구 19(4), 493-511.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 서혜숙, 박부성, 강은주 (2011). **중학교 수학익힘책3**. 서울: 금성출판사.

Berth Danermark, Mats Ekstrom, Liselotte Jacobsen, Jan Ch. Karlsson, 이기홍 옮김(2005) 새로운 사회과학방법론 –비판적 실재론의 접근-(Explaining Society: Critical Realism in the Social Sciences) 파주: 도서출판 한울

Bettina Pedemonte, David Reid (2011). *The role of abduction in proving process.* Educ Stud Math 76, 281-303.

Charles Sanders Peirce. James hoopes 엮음 (1992). 김동식, 이유선 옮김 (2008). **퍼스의 기호학** (*Peirce on signs : writings on semiotic*). 파주: 나남.

Cifarelli, Victor (1997). *Emergence of Abductive Reasoning in Mathematical Problem Solving.* American Educational Research Association, March 1997.

Eco, U. (1983). *Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction.* In U. Eco & T. Sebeok (Eds.), The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce (pp. 198–220). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Gagne, E. D., Yekovich, C. W., Yekovich, F. R. (1993). 이용남, 이시영, 허승준, 부지영, 강숙영, 정창윤, 송기주, 정일선, 정환금, 오익수, 최양숙, 이영길, 신의정, 최종오, 홍정기, 이현욱, 이민영, 강만철, 김미란 공역 (2005). **인지심리와 학교학습** (*The cognitive psychology of school learning*). 서울: 교육과학사.

Polya, G (1957). 우정호 역 (2005). **어떻게 문제를 풀 것인가 : 수학적 사고 방법 / 개정판** (*How to solve it. 2nd ed.*). 서울: 교우사

An Analysis of Problems of Mathematics Textbooks in regards of the Types of Abductions to be used to solve

Youngha Lee(Ewha Womans University)
Kahng Min Jung(Graduate school of Ewha Womans University)

This research assumes that abduction is so important as much as all the creative plausible reasoning to be based upon. We expect it to be deeply appreciated and be taught positively in school mathematics.

We are noticing that every problem solving process must contain some steps of abduction and thus, we believe that those who are afraid of abduction cannot solve any newly faced problem. Upon these thoughts, we are looking into the middle school mathematics textbooks to see that how strongly various abductions are emphasized to solve problems in it.

We modified types of abduction those were suggested by Eco(1983) or by Bettina Pedemonte, David Reid (2011) and investigated those books to see if, we may regard, various types of abduction be intended to be used to solve their problems.

As a result of it, we found that more than 92% of the problems were not supposed to use creative abduction necessarily to solve it. And we interpret this as most authors of the textbooks have emphasis more on the capturing and understanding of basic knowledge of school mathematics rather than the creative reasoning through them. And we believe this need innovation, otherwise strong debates are necessary among the professionals of it.

Keywords ; Abduction(가추), Types of abduction(가추의 분류), Problem solving(문제해결), Textbook analysis(교과서 분석)

논문접수 : 2013. 7. 7
논문수정 : 2013. 8. 12
심사완료 : 2013. 8. 19