

에너지보존과 토크평형을 이용한 제로터 유압 펌프/모터의 배제용적 해석
 - 내·외부로터 회전 경우 -

An Analysis on Volumetric Displacement of Hydraulic Gerotor
 Pump/Motor using Energy and Torque Equilibrium
 - First Report: Case of Rotation of Inner and outer Rotors -

김성동^{1*} · 김대명² · 함영복³

S. D. Kim, D. M. Kim and Y. B. Ham

Received: 20 Mar. 2013, Revised: 06 May 2013, Accepted: 17 May 2013

Key Words : Volumetric Displacement(배제용적), Energy Conservation(에너지보존), Torque Equilibrium(토크 평형), Gerotor Pump/Motor(제로터 펌프/모터)

Abstract: It is difficult to analytically derive a volumetric displacement formula of gerotor hydraulic pump/motor because geometric shape of rotors is complicated. An analytical method about the volumetric displacement is proposed in this work, which is relatively easy and based upon two physical concepts. The first one is energy conservation between hydraulic energy of the pump/motor and mechanical input/output energy. The second concept is torque equilibrium with respect to inner and outer rotors. The formula about the volumetric displacement is derived for the common case of inner and outer rotors rotate with respect to fixed axes. The formula is verified by comparing another analytical displacement formula, and it is numerically verified by comparing numerical results, which is calculated for geometric specification of a motor. The numerical displacement is calculated through CAD software program and MATLAB program. The proposed analytical formula can be utilized in analysis and design of hydraulic gerotor motors.

기호 설명

T_L : load torque on a pump/motor shaft
 $V_{2\pi}$: volumetric displacement per one revolution
 F_k : force induced by pressure distribution
 $Q(t)$: instantaneous flowrate

\vec{p} : coordinates of pitch point
 m : number of outer rotor's lobes
 r_c : radius of outer rotor's circular part

Subscripts

1 : inner rotor
 2 : outer rotor

* Corresponding author: sdkim@kumoh.ac.kr.
 1 Department of Intelligent Mechanical Engineering, Kumoh National Institute of Technology, Gumi 054-478-7395, Korea
 2 D. M. Kim: Department of R&D, DeaHwa Industrial Machinery Inc., Korea
 3 Y. B. Ham: Extreme Energy Machinery lab, Korea Institute of Machinery & Materials Industrial Machinery, Korea
 Copyright © 2013, KSFC

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서 론

제로터는 소형 유압펌프에 많이 사용되고 있으며, 저속, 고토크용 유압모터로도 응용되어지고 있다. 제로터는 내접 물림운동을 하며, 내부로터와 외부로터의 중심과 피치점이 일정하게 주어진 상태에서 내·외부로터의 로우브(혹은 기어) 수에 반비례하는 속도

의 회전을 하게 된다. 외부로터는 내치차에 해당되고 일반적으로 설계 및 가공의 편의를 위하여 원호곡선을 치형으로 사용한다. 내부로터의 형상은 외부로터의 치형에 의해 생성되며, 트로코이드 곡선¹⁻¹²⁾으로 만들어진다.

일반적으로 제로터 유압 펌프/모터는 기하학적 형상이 매우 복잡하여, 기하학적인 방법으로 용적을 산출하는 것은 매우 어렵다.

일부의 이전 연구¹³⁻¹⁵⁾에서 내부로터와 외부로터의 접촉점 사이의 용적을 직접 산출하는 방법을 이용하여 배제용적을 산출하는 방법을 제시 하였다. 결과공식의 수식이 매우 복잡하여서 설계에 반영하기에 어려움이 따른다.

다수의 연구¹⁶⁻²¹⁾에서 내·외부로터의 접촉점의 길이를 이용한 배제용적 산출 공식을 소개하였다.

본 논문에서는 펌프/모터의 유압에너지와 구동축의 기계적 에너지 사이의 에너지 보존원리와 로터에 대한 토크평형의 두 가지 개념을 이용한 새로운 방법으로 펌프/모터의 용적을 산출하는 방법을 제시하였다. 제시된 이론적 산출방법의 신뢰성을 검증하기 위하여 두 가지 다른 배제용적 계산방법의 결과와 비교하였다.

첫번째 검증방법으로서 회전날개길이를 이용한 방법을 소개하고 에너지보존방법의 결과 공식과 회전날개법의 결과공식이 동일함을 증명하였다.

두 번째 검증방법은 내부로터와 외부로터 사이의 용적의 최대값과 최소값을 이용하는 방법이며, 선택된 한 가지 제로터 모델에 대하여 에너지보존과 토크평형의 방법과 배제용적이 동일함을 수치해석적으로 검증한다. 배제용적 산출과정에서 내부로터와 외부로터 사이의 접촉점이 도출되어야 하며, 접촉점 산출과정도 소개한다.

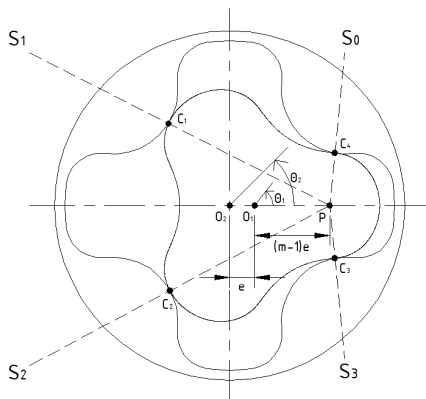


Fig. 1 Driving principle : rotation θ_1 of inner rotor and rotation θ_2 of outer rotor

본 연구는 이전의 연구에 이어서 Fig. 1에서 보여주는 바와 같은 내부로터와 외부로터의 중심 O_1, O_2 와 피치점 \vec{p} 가 공간상에 일정하게 주어진 상태에서 내·외부로터의 로우브 수에 반비례하는 속도로 회전하는 경우에 대해서 수행되었다.

2. 에너지보존과 토크평형을 이용한 배제용적

2.1 에너지 보존 원리

Fig. 2의 유압 펌프/모터에서 유압에너지와 축의 기계적 토크에너지 사이에 에너지보존 원리를 적용한다. 해석의 편의를 위하여 효율이 100%인 이상적인 경우로 가정하고, 고압부의 압력은 P 이며, 저압부의 압력은 0인 상태로 간주한다.

이상의 가정에서 펌프/모터 축의 $\Delta\theta_1$ 회전에 대하여 다음 식과 같은 에너지보존의 식이 성립한다.

$$T_L \Delta\theta_1 = P \Delta V \quad (1)$$

여기서 T_L 은 펌프/모터의 축에 인가되는 부하토크를 의미하며, ΔV 은 $\Delta\theta_1$ 회전에 대한 유체의 배제용적이거나 공급용적이며, P 는 공급압력이다.

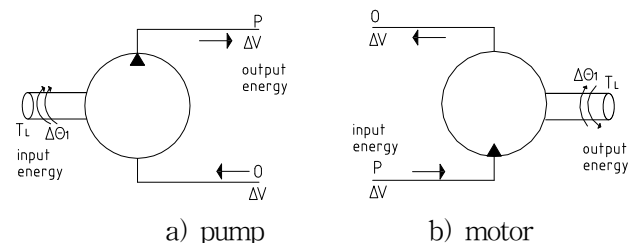


Fig. 2 Hydraulic energy and torque energy

2.2 토크 평형

(1)식에서 토크 T_L 은 Fig. 3과 Fig. 4에서 보여주는 바와 같은 내·외부로터 자유물체도에 대한 힘의 토크평형방정식으로부터 압력 P 의 함수로 구해질 수 있다. 펌프/모터의 구동축이 내부로터에 연결되는 것인지 외부로터에 연결되는 것인지에 따라서 작은 부분에서 차이를 보이지만 해석의 전개 과정이 유사하기 때문에 본 연구에서는 내부로터에 구동축이 연결되는 것으로 국한한다. Fig. 3과 Fig. 4에서 R_k 는 내·외부로터의 접촉점 C_k 에서 작용력을 의미하며, F_k 는 압력 P 에 의한 유체작용력을 의미한다. 내부로터와 외부로터에 작용하는 접촉력과 유체력은 각각 쌍을 이루는 작용력과 반작용력의 관계이므로 작용점과

크기는 동일하나 방향에서는 내·외부로터에서 서로 반대방향으로 작용한다. 유체력이 단면에 작용하는 효과는 단면의 투영면적에 의하여 결정되며, 단면의 형상에는 무관하여 다음의 식과 같이 표현된다.

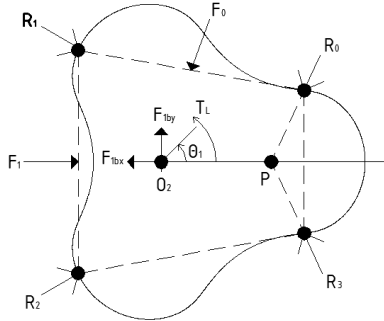


Fig. 3 Free body diagram of the inner rotor

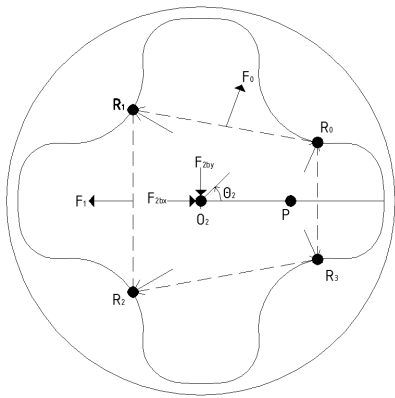


Fig. 4 Free body diagram of the outer rotor

$$F_k = P b \rho_{C_i C_j} \quad (2)$$

$$\rho_{C_i C_j} = \sqrt{(X_{C_i} - X_{C_j})^2 + (Y_{C_i} - Y_{C_j})^2} \quad (3)$$

여기서 $\rho_{C_i C_j}$ 는 이웃하는 두 접촉점 C_i 와 C_j 사이의 거리를 의미하며, b 는 내·외부로터의 두께이다. 아래 첨자 k 는 k 번째 챔버를 의미하며, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 이다.

Fig. 5에서 보여주는 바와 같이 C_i 와 C_j 의 두 접촉점 사이에 유체력에 의한 토크 효과는 중심점 O_1 과 O_2 에 대하여 각각 다음의 식과 같이 표현된다.

$$T_{FO_k} = P b [(Y_{C_j} - Y_{C_i}) (\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_{O_1}) + (X_{C_j} - X_{C_i}) (\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_{O_1})] \quad (4)$$

$$T_{RO_k} = -P b [(Y_{C_j} - Y_{C_i}) (\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_{O_2}) + (X_{C_j} - X_{C_i}) (\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_{O_2})] \quad (5)$$

(5)식에서 ‘-’ 부호의 의미는 내부로터에 작용하는 토크의 방향과 서로 반대 방향임을 의미한다. $Pb(Y_{C_j} - Y_{C_i})$ 와 $Pb(X_{C_j} - X_{C_i})$ 는 유체력의 X방향 분력과 Y방향 분력을 각각 의미하며, $\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2}$ 와 $\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2}$ 는 유체력의 하중중심의 좌표값을 각각 의미하며, $(\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_{O_1})$ 와 $(\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_{O_1})$ 는 내·외부로터의 회전중심에 대한 모멘트팔의 길이를 각각 의미한다.

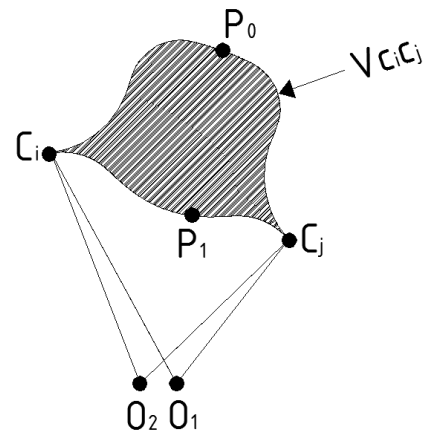


Fig. 5 Volume of a chamber between two contact points of C_i and C_j

Fig. 3의 내부로터 자유물체도에서 접촉력 R_k 와 유체력 F_k 의 수평 방향력 성분과 수직 방향력 성분에 대한 평형은 베어링 지지력이 균형을 이루게 되며, 여기서는 베어링의 지지력은 관심의 대상이 아니므로 고려할 필요가 없다. 내부로터의 회전중심인 O_1 을 중심으로 한 모멘트 평형식은 부하토크 T_L 이 유체력 F_k 의 토크효과 $\sum T_{FO_k}$ 와 외부로터 로우브의 접촉력 R_k 의 토크효과 $\sum T_{RO_k}$ 의 합과 균형을 이루는 형태로 표현된다.

$$T_L = \sum_{k=0}^h T_{FO_k} + \sum_{k=0}^h T_{RO_k} \quad (6)$$

여기서 h 는 고압부 압력 P 가 작용하는 고압부 챔버 수에 해당한다.

외부로부터에 대한 자유물체도 Fig. 4의 토크평형에서는 외력 토크 T_L 이 작용하지 않으므로 유체력의 토크효과와 접촉력의 토크효과가 서로 균형을 이룬다. 즉, 내부로부터 접착점을 통하여 전달되는 반작용 토크 $\sum T_{RO_2k}$ 는 유체력에 의한 $\sum T_{FO_2k}$ 와 동일한 크기를 가진다.

$$\sum_{k=0}^h T_{RO_2k} = \sum_{k=0}^h T_{FO_2k} \quad (7)$$

외부로부터에서 발생한 토크 $\sum T_{RO_2k}$ 는 외부로부터 피치반경 r_2 에 대한 내부로부터 피치반경 r_1 의 비례로 내부로부터로 전달된다. 또, r_1 와 r_2 의비는 내·외부로부터의 로우브(혹은 기어) 수에 비례한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^h T_{RO_1} &= \frac{r_1}{r_2} \sum_{k=0}^h T_{RO_2} \\ &= \frac{m-1}{m} \sum_{k=0}^h T_{RO_2} \end{aligned} \quad (8)$$

(7)식과 (8)식을 정리하여 (6)식에 대입하면

$$T_L = \sum_{k=0}^h T_{FO_1k} + \frac{m-1}{m} \sum_{k=0}^h T_{FO_2k} \quad (9)$$

(4)식과 (5)식을 (9)식에 대입하면

$$\begin{aligned} T_L &= \sum_{k=0}^h P b [(Y_{C_j} - Y_{C_i}) (\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_{O_1}) \\ &\quad + (X_{C_j} - X_{C_i}) (\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_{O_1})] \\ &\quad - \frac{m-1}{m} \sum_{k=0}^h P b [(Y_{C_j} - Y_{C_i}) (\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_{O_2}) \\ &\quad + (X_{C_j} - X_{C_i}) (\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_{O_2})] \end{aligned} \quad (10)$$

Fig. 3과 Fig.4에서 내부로부터와 외부로부터 사이에는 외부로부터 로우브 갯수만큼 접촉점이 생기는데 접촉점 C_0 부터 C_h 까지 생성되는 챔버를 고압챔버라고 가정하면, 전체 고압 챔버의 유체력 토크효과 $\sum T_k$ 를 고압부의 최초 접촉점 C_0 와 고압부의 최종 접촉점 C_h 만을 이용하여 표현할 수 있다. 왜냐하면 한 고압 챔버의 C_i 점 좌표는 다음 고압 챔버의 C_j 점 좌표에

해당하여서 서로 상쇄되어지기 때문이다. (10)식은 다음과 같이 간단한 형태로 변환된다.

$$\begin{aligned} T_L &= P b [(Y_{C_{jmax}} - Y_{C_{jmin}}) (\frac{Y_{C_{jmax}} + Y_{C_{jmin}}}{2} - Y_{O_1}) \\ &\quad + (X_{C_{jmax}} - X_{C_{jmin}}) (\frac{X_{C_{jmax}} + X_{C_{jmin}}}{2} - X_{O_1})] \\ &\quad - \frac{m-1}{m} P b [(Y_{C_{jmax}} - Y_{C_{jmin}}) (\frac{Y_{C_{jmax}} + Y_{C_{jmin}}}{2} - Y_{O_2}) \\ &\quad + (X_{C_{jmax}} - X_{C_{jmin}}) (\frac{X_{C_{jmax}} + X_{C_{jmin}}}{2} - X_{O_2})] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $(X_{C_{jmax}}, Y_{C_{jmax}})$ 는 피치점으로부터 가장 먼 접촉점 C_h 를 의미하며, $(X_{C_{jmin}}, Y_{C_{jmin}})$ 은 가장 가까운 접촉점 C_0 를 의미하기도 한다. h 는 흡입 챔버의 개수이며, 외부로부터의 로우브 수인 m 이 짝수인 경우 $h = m/2$ 이며, m 이 홀수이면 내부로부터의 자전 회전 θ_1 의 함수로서 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} h &= \frac{m-1}{2} \quad \text{for } \frac{2k\pi}{m-1} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+1)\pi}{m-1} \\ &= \frac{m+1}{2} \quad \text{for } \frac{(2k+1)\pi}{m-1} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+2)\pi}{m-1} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $k = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$ 이다.

2.3 모터 용적과 유량

(11)식을 (1)식에 대입하면 $\Delta\theta_1$ 회전에 대한 유체의 용적변화율 $\Delta V/\Delta\theta_1$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} &= b [(Y_{C_{jmax}} - Y_{C_{jmin}}) (\frac{Y_{C_{jmax}} + Y_{C_{jmin}}}{2} - Y_{O_1}) \\ &\quad + (X_{C_{jmax}} - X_{C_{jmin}}) (\frac{X_{C_{jmax}} + X_{C_{jmin}}}{2} - X_{O_1})] \\ &\quad - \frac{m-1}{m} b [(Y_{C_{jmax}} - Y_{C_{jmin}}) (\frac{Y_{C_{jmax}} + Y_{C_{jmin}}}{2} - Y_{O_2}) \\ &\quad + (X_{C_{jmax}} - X_{C_{jmin}}) (\frac{X_{C_{jmax}} + X_{C_{jmin}}}{2} - X_{O_2})] \end{aligned} \quad (13)$$

용적변화율 $\Delta V/\Delta\theta_1$ 은 순간적인 로터 회전각에 대하여 극한 값을 취한다면 순간적인 용적의 변화율을 의미한다.

모든 고압챔버의 용적변화율의 평균값 $(\Delta V/\Delta\theta_1)_{avg}$ 은 (13)식을 (12)식의 각도 구간동안에 적분하고, 그 적분 값을 해당 각도로 나누어서 구해진다.

3. 내외부 로터의 접촉점

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1}_{avg} &= b \int_0^{2\pi/(m-1)} \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1} d\theta_1 / [2\pi/(m-1)] \\ &= \frac{(m-1)b}{2\pi} \cdot \\ &\int_0^{2\pi/(m-1)} [(Y_{C_{\mu max}} - Y_{C_{\mu min}}) \left(\frac{Y_{C_{\mu max}} + Y_{C_{\mu min}}}{2} - Y_{O_1} \right) \\ &\quad + (X_{C_{\mu max}} - X_{C_{\mu min}}) \left(\frac{X_{C_{\mu max}} + X_{C_{\mu min}}}{2} - X_{O_1} \right)] \\ &\quad - \frac{m-1}{m} [(Y_{C_{\mu max}} - Y_{C_{\mu min}}) \left(\frac{Y_{C_{\mu max}} + Y_{C_{\mu min}}}{2} - Y_{O_2} \right) \\ &\quad + (X_{C_{\mu max}} - X_{C_{\mu min}}) \left(\frac{X_{C_{\mu max}} + X_{C_{\mu min}}}{2} - X_{O_2} \right)] d\theta_1 \end{aligned} \quad (14)$$

또한, 1회전 당 배제용적 $V_{2\pi}$ 는 (14)식에 1회전인 2π rad를 곱하여 구해진다.

$$\begin{aligned} V_{2\pi} &= \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1}_{avg} \cdot 2\pi \\ &= (m-1)b \cdot \\ &\int_0^{2\pi/(m-1)} [(Y_{C_{\mu max}} - Y_{C_{\mu min}}) \left(\frac{Y_{C_{\mu max}} + Y_{C_{\mu min}}}{2} - Y_{O_1} \right) \\ &\quad + (X_{C_{\mu max}} - X_{C_{\mu min}}) \left(\frac{X_{C_{\mu max}} + X_{C_{\mu min}}}{2} - X_{O_1} \right)] \\ &\quad - \frac{m-1}{m} [(Y_{C_{\mu max}} - Y_{C_{\mu min}}) \left(\frac{Y_{C_{\mu max}} + Y_{C_{\mu min}}}{2} - Y_{O_2} \right) \\ &\quad + (X_{C_{\mu max}} - X_{C_{\mu min}}) \left(\frac{X_{C_{\mu max}} + X_{C_{\mu min}}}{2} - X_{O_2} \right)] d\theta_1 \end{aligned} \quad (15)$$

순간 유량 $Q(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1} \frac{\Delta \theta_1}{\Delta t} \\ &= \omega_1 b [(Y_{C_{h max}} - Y_{C_{h min}}) \left(\frac{Y_{C_{h max}} + Y_{C_{h min}}}{2} - Y_{O_1} \right) \\ &\quad + (X_{C_{h max}} - X_{C_{h min}}) \left(\frac{X_{C_{h max}} + X_{C_{h min}}}{2} - X_{O_1} \right)] \\ &\quad - \frac{m-1}{m} \omega_1 b [(Y_{C_{h max}} - Y_{C_{h min}}) \left(\frac{Y_{C_{h max}} + Y_{C_{h min}}}{2} - Y_{O_2} \right) \\ &\quad + (X_{C_{h max}} - X_{C_{h min}}) \left(\frac{X_{C_{h max}} + X_{C_{h min}}}{2} - X_{O_2} \right)] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 ω_1 은 내부로터 각속도이며, t 는 시간을 나타낸다.

평균유량 Q_{avg} 은 다음과 같이 표현된다.

$$Q_{avg} = \frac{V_{2\pi}}{2\pi} \omega_1 \quad (17)$$

내·외부로터의 운동은 Fig. 1에 표현된 바와 같이 내부로터의 자전회전 θ_1 과 외부로터의 자전회전 θ_2 으로 이루어진다. 내부로터 중심점 O_1 에 대한 피치점 \vec{p} 의 순간변위와 외부로터 중심점 O_2 에 대한 피치점 순간변위는 일치한다. 여기서 순간변위로 표현한 이유는 피치점의 위치는 공간 상에서 일정한데, 내·외부로터의 피치점에 대응하는 점의 미소변위를 의미하기 때문이다.

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \quad (18)$$

r_1 와 r_2 의 비는 내·외부로터의 로우브 수에 비례하므로

$$\theta_1 = \frac{m}{m-1} \theta_2 \quad (19)$$

Fig. 1에서 나타난 바와 같이 각 로우브에서의 접촉점은 외부로터의 원호치형 중심점에서 피치점을 연결하는 직선과 원호치형 곡선이 만나는 점이 된다. 따라서 피치점의 위치를 알면 각 로우브에서의 접촉점을 계산할 수 있다. 외부로터 원형부분의 중심 좌표 \vec{S}_k 는 회전각 θ_2 에 따라서 변화하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{S}_k &= X_k \vec{i} + Y_k \vec{j} \\ &= r_t \cos\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right) \vec{i} + r_t \sin\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right) \vec{j} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 \vec{i} 와 \vec{j} 는 수평축과 수직축 방향의 단위벡터를 의미한다.

고정점으로서 피치점 p 의 좌표는

$$\vec{p} = m\vec{e}i + \vec{o}j \quad (21)$$

피치점과 외부로터 원형부분의 중심 좌표 \vec{S}_k 를 연결하는 \vec{pS}_k 직선 식은 아래와 같고,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{Y_k}{X_k - m} (X - m) \\ &= \frac{r_t \sin\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right)}{r_t \cos\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right) - m} (X - m) \end{aligned} \quad (22)$$

중심 S_k 인 외부로터 원형 식은 다음과 같다.

$$(X - X_k)^2 + (Y - Y_k)^2 = r_c^2 \quad (23)$$

(22)식과 (23)식의 교점이 접촉점 C_k 이 된다.

4. 회전날개길이법 배제용적을 이용한 검증

4.1 회전날개 길이법 배제용적

내부로터와 외부로터가 각각 회전중심 O_1 과 O_2 에 대하여 θ_1 과 θ_2 로 자전 회전하는 경우에 챔버 공간의 용적변화율, 배제용적, 순간유량 등들 또한 내부로터와 외부로터의 회전운동으로 표현될 수 있다. Fig. 5에서 보여주는 인근한 두 접촉점 사이의 챔버 공간 $V_{C_i C_j}$ 의 변화율 $\Delta V_{C_i C_j}$ 은 내부로터와 외부로터의 회전중심인 O_1 과 O_2 으로부터 접촉점 C_i 와 C_j 까지의 거리인 회전날개길이들 $r_{O_1 C_i}$, $r_{O_1 C_j}$, $r_{O_2 C_i}$, $r_{O_2 C_j}$ 의 함수로써 표현될 수 있다. 예를 들어서 내부로터가 $\Delta\theta_1$ 회전하는 동안에 증가하는 챔버 면적은 $\Delta\theta_1$ 에 의하여 만들어지는 삼각형면적인 $r_{O_1 C_j}^2 \Delta\theta_1 / 2$ 가 된다. 동일한 방법으로 회전날개 $r_{O_1 C_i}$ 의 회전에 의하여 $r_{O_1 C_i}^2 \Delta\theta_1 / 2$ 만큼 챔버 면적이 감소한다. 두 접촉점 사이의 챔버 공간 $C_i P_1 C_j P_0 C_i$ 의 변화율 $\Delta V_{C_i C_j}$ 은

$$\Delta V_{C_i C_j} = \left[\frac{1}{2}(r_{O_2 C_j}^2 - r_{O_2 C_i}^2) \Delta\theta_1 - \frac{1}{2}(r_{O_1 C_j}^2 - r_{O_1 C_i}^2) \Delta\theta_1 \right] b \quad (24)$$

여기서 중심점 O_1 에 대한 내부로터의 회전 $\Delta\theta_1$ 는 챔버 공간의 용적을 증가시키는 효과를 가지는 반면에 중심점 O_2 에 대한 외부로터의 회전 $\Delta\theta_2$ 는 챔버 공간의 용적을 감소시키는 효과임을 의미한다.

(24)식에 (18)식의 $\Delta\theta_2 = \frac{m-1}{m} \Delta\theta_1$ 을 적용하였을 경우에 내부로터의 자전회전 θ_1 을 구동하는 펌프이거나, 내부로터의 축으로 출력하는 모터의 경우에 대한 결과 식은 다음과 같다.

$$\Delta V_{C_i C_j} = \frac{1}{2} b [(r_{O_2 C_j}^2 - r_{O_2 C_i}^2) - (r_{O_1 C_j}^2 - r_{O_1 C_i}^2) \frac{m-1}{m}] \Delta\theta_1 \quad (25)$$

한 흡입 챔버의 C_j 점 좌표는 다음 흡입 챔버의 C_i 점 좌표에 해당하여서 서로 상쇄되어지게 되어서 전체 흡입 챔버의 용적변화율 $\Delta V / \Delta\theta_1$ 는

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} &= \frac{\sum_{k=1}^h \Delta V_{C_i C_j k}}{\Delta\theta_1} \\ &= \frac{1}{2} b [(r_{O_2 C_{jmax}}^2 - r_{O_2 C_{imin}}^2) - (r_{O_1 C_{jmax}}^2 - r_{O_1 C_{imin}}^2) \frac{m-1}{m}] \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $r_{O_1 C_{jmax}}$ 는 회전 중심 O_1 으로부터 가장 먼 접촉점까지의 회전날개 길이를 의미하며, $r_{O_1 C_{imin}}$ 는 가장 가까운 접촉점까지의 회전날개 길이를 의미한다.

모든 흡입 챔버들 총 용적의 평균 변화율 $(\Delta V / \Delta\theta_1)_{avg}$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\Delta V}{\Delta\theta_1}_{avg} = \frac{\int_0^{2\pi/(m-1)} \sum_{k=1}^h \Delta V_{C_i C_j k} d\theta_1}{2\pi/(m-1)} \quad (27)$$

(27)식에 2π 를 곱하여 1회전당 배제용적 $V_{2\pi}$ 이 구해진다.

$$\begin{aligned} V_{2\pi} &= 2\pi \cdot \frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} \\ &= (m-1) \int_0^{2\pi/(m-1)} \sum_{k=1}^h \Delta V_{C_i C_j k} d\theta_1 \end{aligned} \quad (28)$$

순간유량 $Q(t)$ 도 유사한 방법으로 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} Q(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} \\ &= \frac{b}{2} [(r_{O_2 C_{jmax}}^2 - r_{O_2 C_{imin}}^2) - (r_{O_1 C_{jmax}}^2 - r_{O_1 C_{imin}}^2) \frac{m-1}{m}] \omega_1 \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 ω_1 은 내부로터의 회전속도를 의미한다. 평균유량은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} Q_{avg} &= \int_0^{2\pi/(m-1)} Q(t) d\theta_1 / [2\pi/(m-1)] \\ &= \frac{m-1}{2\pi} \int_0^{2\pi/(m-1)} \frac{b}{2} [(r_{O_2 C_{jmax}}^2 - r_{O_2 C_{imin}}^2) - (r_{O_1 C_{jmax}}^2 - r_{O_1 C_{imin}}^2) \frac{m-1}{m}] \omega_1 d\theta_1 \end{aligned} \quad (30)$$

4.2 이론적 검증

2장에서 제시한 에너지보존원리와 토크평형을 이용하여 유도한 제로터 펌프/모터의 용적과 유량에 관한 결과공식들이 4장 1절에서 설명한 회전날개길이법의 결과공식과 동일함을 증명하는 것은 (13)식이 (26)식과 동일함을 보이는 것으로 충분하다. (13)식을 적절히 정리하면 다음 식으로 수정된다.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1} = & \frac{b}{2} [(Y_{C_{i\max}}^2 - Y_{C_{i\min}}^2) - 2(Y_{C_{i\max}} - Y_{C_{i\min}})Y_{O_1} \\ & + (X_{C_{i\max}}^2 - X_{C_{i\min}}^2) - 2(X_{C_{i\max}} - X_{C_{i\min}})X_{O_1}] \\ & - \frac{m-1}{m} \frac{b}{2} [(Y_{C_{o\max}}^2 - Y_{C_{o\min}}^2) - 2(Y_{C_{o\max}} - Y_{C_{o\min}})Y_{O_2} \\ & + (X_{C_{o\max}}^2 - X_{C_{o\min}}^2) - 2(X_{C_{o\max}} - X_{C_{o\min}})X_{O_2}] \end{aligned} \quad (31)$$

(31)식에서 $Y_{C_{i\max}}$ 항과 $Y_{C_{i\min}}$ 항, $X_{C_{i\max}}$ 항, $X_{C_{i\min}}$ 항으로 각각 묶은 후에 $Y_{O_1}^2$ 항, $X_{O_1}^2$ 항, $Y_{O_2}^2$ 항과 $X_{O_2}^2$ 항을 더하거나 빼줌으로써 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1} = & \frac{b}{2} [(Y_{C_{i\max}} - Y_1)^2 + (X_{C_{i\min}} - X_1)^2 \\ & - (Y_{C_{i\min}} - Y_1)^2 - (X_{C_{i\min}} - X_1)^2] \\ & - \frac{m-1}{m} \frac{b}{2} [(Y_{C_{o\max}} - Y_2)^2 + (X_{C_{o\max}} - X_2)^2 \\ & - (Y_{C_{o\min}} - Y_2)^2 - (X_{C_{o\min}} - X_2)^2] \\ = & \frac{b}{2} (r_{O_1 C_{i\max}}^2 - r_{O_1 C_{i\min}}^2) - \frac{m-1}{m} \frac{b}{2} (r_{O_2 C_{o\max}}^2 - r_{O_2 C_{o\min}}^2) \end{aligned} \quad (32)$$

(31)식과 (32)식으로부터 (13)식이 (26)식과 동일함이 증명되었다.

5. 챔버용적법 배제용적을 이용한 검증

5.1 챔버용적법 배제용적

제로터 펌프/모터의 1회전당 배제용적 $V_{2\pi}$ 를 산출하는 다른 방법으로서 Fig. 5에서 보여주는 내·외부 로터 접촉점 사이의 챔버용적을 직접 구하는 방법을 고려할 수 있다.

구동축이 1회전하는 동안에 각각의 챔버는 팽창과 수축의 주기운동을 하게 되며, 각각의 챔버는 최대용적 V_{\max} 와 최소용적 V_{\min} 의 차이 용적을 흡입하여 토출하게 된다. 내부로터에 연결된 구동축이 1회전하

는 동안에 $(m-1)$ 개의 챔버가 팽창과 수축을 반복하게 되어서 배제용적 $V_{2\pi}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} V_{2\pi} = & (m-1)(V_{\max} - V_{\min}) \\ = & (m-1)b(A_{\max} - A_{\min}) \end{aligned} \quad (33)$$

(33)식에서 A_{\max} 과 A_{\min} 은 Fig. 5의 접촉점 사이 해칭부 평면적의 최대값과 최소값을 의미하며, b 는 내·외부로터의 두께이다.

5.2 수치해석을 이용한 검증

에너지보존원리와 토크평형을 이용하여 유도한 용적과 유량에 관한 결과공식들의 타당성을 검증하는 또 다른 방법으로서 외부로터와 내부로터의 접촉 챔버의 최대용적과 최소용적의 차이를 이용하는 (33)식의 방법으로 배제용적을 산출하는 방법의 결과와 비교하였다.

(33)식의 챔버용적법을 적용하는 과정에서 접촉점 사이 평면적 A_{\max} 과 A_{\min} 을 이론적으로 산출하는 것이 매우 복잡하기 때문에 상용화된 CAD 프로그램에서 도형의 윤곽면적 기능을 이용하여 수치해석적으로 산출되었다. 에너지보존원리와 토크평형을 이용하여 배제용적을 산출하는 과정에서는 MATLAB 프로그램이 이용되었다.

Table 1에서 수치해석에 사용된 제로터 펌프/모터의 기본 사양을 보여주며, Fig. 6에서 기본 사양의 외부로터와 내부로터를 CAD 프로그램으로 설계한 프로파일의 모습을 보여준다. Fig. 6은 내부로터의 회전 각이 0° 도 일때 내부로터와 외부로터의 상태를 나타내고 있다.

Fig. 7에서는 MATLAB 해석 프로그램의 플로우차트를 보여주며, Fig. 8에서 프로그램 문서코드의 한 부분을 보여준다.

Table 1 Specification of gerotor pump/motor used in numerical analysis

사양 내용	데이터 (mm)
외부로터 로우브수	4
내부로터 로우브수	3
편심(e)	2.5
외부로터 원형부분 반경(r_c)	6.5
$O_2 - S_k$ 의 거리(r_t)	16.5
로터 두께 (b)	1.5

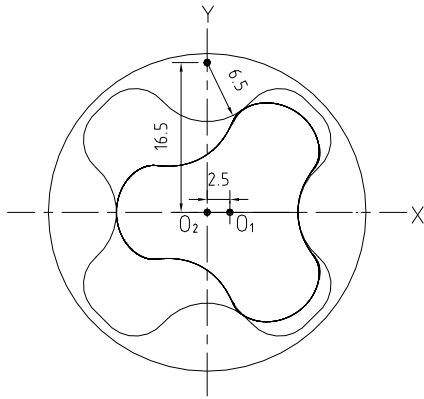


Fig. 6 Profiles of inner rotor and outer rotor used in the analysis

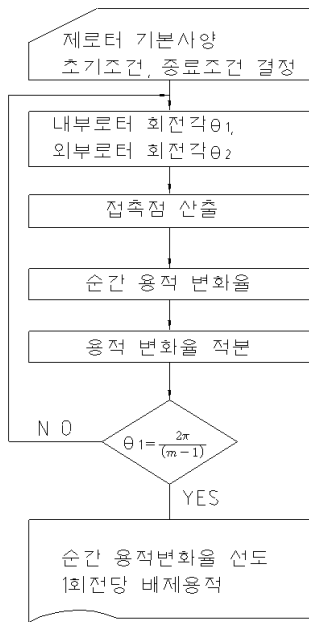


Fig. 7 Flowchart to calculate the volumetric displacement

Fig. 9에서는 3절의 (13)식에 대한 용적변화율의 그래프를 나타낸 것이다.

이때, 수평축의 물리 값이 내부로터 회전각인데, 회전각 θ_1 가 $\pm 0.5818 \text{ rad}$ 인 지점에서 용적변화율이 평균용적변화율 69.74와 동일한 지점에 해당하는데, 이 값에 2π 를 곱한 1회전 당 배제용적의 결과 값은 Table 2의 좌측에서 보여준다.

이러한 결과 값은 5장에서 설명한 접촉점사이의 용적을 이용한 방법의 결과인 Table 2의 우측의 결과값과 거의 동일한 결과를 보이고 있다. Fig. 10에서 외부로터가 구동하면서 외부로터의 회전각이 180° 일 때 최대면적을 가지는 챔버와 최소면적을 가지는 챔버의 모습을 보여준다. 이때, 최대면적을 가지는 챔버의 면적은 115.80 mm^2 이며 최소면적은 18.51 mm^2 의

면적을 가지며 로터의 두께는 1.5 mm^2 이다.

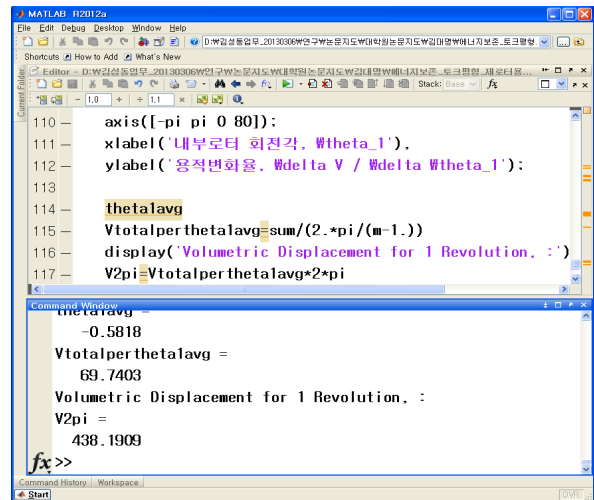


Fig. 8 A view of the MATLAB numerical analysis program

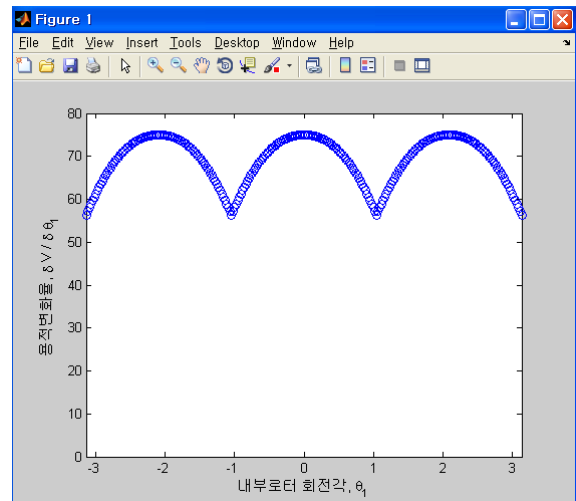


Fig. 9 Rate $\Delta V / \Delta \theta_1$ of the volumetric displacement

Table 2에서는 회전날개 길이이용법 산출 방법과 접촉점 사이의 용적을 이용한 산출 방법을 비교 한 결과를 나타내고 있다. 비교 결과 $0.39 \text{ mm}^3/\text{rev}$ 만큼 차이가 나타났는데 그 이유로는 CAD 프로그램 상에서 나타나는 오차라고 사료된다.

Table 2 Volumetric displacement for 1 revolution

배제용적 검증 결과	
에너지보존과 토크평형을 이용한 배제용적	접촉점 사이의 용적을 이용한 배제용적
$438.19 \text{ mm}^3/\text{rev}$	$437.81 \text{ mm}^3/\text{rev}$

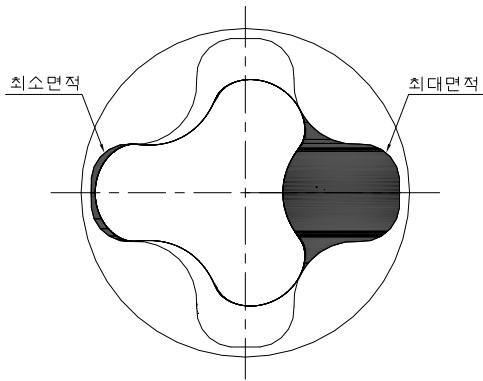


Fig. 10 The area of the chamber

6. 결 론

본 연구의 주요 결론은 다음과 같이 요약된다.

1) 제로터 기구에서 내·외부로터의 중심과 피치점이 일정하게 주어진 상태에서 내·외부로터의 로우브 수에 반비례하는 속도로 회전하는 운동형태의 경우에 대하여 모터에 공급되는 유압에너지와 모터축의 기계적 에너지 사이의 에너지 보존원리와 로터에 대한 토크평형을 이용하여 모터용적을 산출하는 방법을 제시하였다.

2) 유압에너지와 모터축의 기계적 에너지 사이의 에너지 보존원리와 로터에 대한 토크평형을 이용하여 모터용적을 산출하는 결과공식이 회전날개길이법의 배제용적 결과 수식이 동일함을 이론적으로 증명하였다.

3) 또 다른 검증방법으로서 접촉점 사이의 챔버용적을 이용하여 산출된 배제용적 결과와 수치해석적인 방법으로 비교하였으며, 에너지 보존원리와 로터에 대한 토크평형을 이용한 모터용적과 유량에 관한 이론과 수식의 타당성을 확인하였다.

4) 에너지보존과 토크평형을 이용하여 유량과 배제용적을 산출하는 방법의 계산과정이 단순히 내외부로터의 접촉점의 좌표만을 이용하기 때문에 복잡한 형상의 내·외부로터사이 챔버용적을 구하는 방법보다 간단하다.

5) 에너지보존과 토크평형 이용법이 회전날개길이법과 계산과정의 난이도가 유사하지만, 축의 구동 토크와 배제용적의 상관관계를 직접적으로 보여주기 때문에 토크사양이 주어진 유압모터의 설계에 이용이 효율적일 것이다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비 의하여 연구된 논문입니다.

참고 문헌

- 1) J.R. Colbourne, "The geometry of trochoid envelopes and their application in rotary pumps", Mechanism and Machine Theory, Vol. 9, pp. 421-435, 1974
- 2) Sung-Chul Lee and Sung-Nam Lee, "Design and Analysis of Gerotor for Hydraulic Motors", Journal of The Korean Society of Tribologists & Lubrication Engineers, Vol.11, No. 2, pp. 63-70, 1995
- 3) Y.J. Chang, J.H. Kim, C.H. Jeon, Chul Kim and S. Y. Jung, "Development of an Integrated System for the Automated Design of a Gerotor Oil Pump", J. Mech. Des. 129, 1099, 2007
- 4) J. S. Seo, H. S. Chung, H. M. Jeong, "A Study on Gerotor Design with Optimum Tip Clearance for Low Speed High Torque Gerotor Hydraulic Motor ", Journal of the Korea Society for Power System Engineering, Vol. 10, No.4 , pp.119-126, 2006
- 5) Y. J. Nam, M. K. Park, "Design of the Port Plate for Gerotor Pumps", Journal of the Korean Society of Mechanical Engineers Vol. B, Vol.28, No.4, pp.406-414, 2004
- 6) J. H. kim, J. H. Park, S. Y. Jung, J. H. Son, C. Kim, "Optimal Design of Tooth Profile for High-Efficiency Gerotor Oil Pump", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol.22, No.5, pp.28-36, 2005
- 7) J. H. Kim, C. Kim, "Development of an Integrated System for Automated Design of Gerotor Oil Pump", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol.23, No.2, pp.88-96, 2006
- 8) J. H. Kim, C. Kim, C. H. Kim, "Optimum design on the lobe shapes of Gerotor Oil Pump", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol.23, No.4, pp.124-131, 2006
- 9) S. Y. Jung, S. M. Han, C. kim, "Development of an Automated Design System for Oil Pumps with Ellipse Lobe Profile", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol.26, No.1, pp. 120-129, 2009

- 10) C. B. Tsay and C. Y. Yu., "Mathematical Model for the Profile of Gerotor Pumps.," J. CSME, Vol.10, No.1, pp.41-47, 1989.
- 11) C. Y. Yu and C. B. Tsay, athematical Model of Gerotor Pump Applicable to Its Characteristic Study," J. CSME, Vol.11, No.4, pp.385-391, 1990.
- 12) D.W. Dudley, "Handbook of Practical Gear Design", pp.1.33, McGraw-Hill, New York, 1984
- 13) J.R. Colbourne, "Gear Shape and Theoretical Flow Rate in Internal Gear Pumps", Transactions of Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 3 No. 4, pp.215-223, 1975
- 14) Sung-Chul Lee, "Profile Design of the Inner Rotor of a Gerotor by the Composite Curve of Circular Arcs", Journal of the Korean Society of Tribologists & Lubrication Engineers, Vol. 22, No. 2, pp 79-86, 2006,
- 15) J.C. Kim, J.H. Shin, S.M. Kwon, "A Study on Gear Tooth Profile of a Positive Displacement Rotor Pump". Korean Society of Machine Tool Engineers, Fall Conference, pp.106-111, 2006
- 16) S. D. Kim, D. M. Kim, Y. B. Han, C. H. Han, "An Analysis on Volumetric Displacement of Gerotor Pump/Motor Using Vane Length", Journal of the Korea fluid power systems society, Vol.8, No2, pp 8-16, 2011
- 17) Noah D Manring, Suresh B. Kasaragadda, "The Theoretical Flow Ripple of an External Gear Pump", Transaction of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 125, pp. 396-404, 2003
- 18) Daniel C. H. Yang, Jia Yan, Shih-Hsi Tong, "Flowrate Formulation of deviation Function Based Gerotor Pumps", Transaction of ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 32, 2010
- 19) Daniel C. H. Yang, Jia Yan, Shih-Hsi Tong, "Flowrate fomulation and displacement analyses for deviation function-based gerotor pumps", Proc. IMechE Vol. 225 Part C:J. Mechanical Engineering Science, 2010
- 20) Kuo Jao Huang, Wun Chuan Lian, " Kinematic flowrate characteristics of external spur gear pumps using an exact closed solution", Mechanism and Machine Theory, Vol. 44, pp. 1121-1131, 2009
- 21) P.J. Gamez-Montero, R. Castilla, M. Khamashta, E. Codina, "Contact problems of trchoidal-gear pump", International Journal of Mechanical Sciences 48 pp.1471-1480, 2006
- 22) L Ivanovic, G Devedzic, N Miric and S Cukovic, "Analysis of forces and moments in gerotor pumps", Proc. IMechE Vol. 224 Part C:J. Mechanical Engineering Science, 2010
- 23) Tang Dewei, Luo Changlie, Deng Zongquan, "performance of Hydraulic Motor with Multi-External Mesh Spur Gears", Chinese Journal of Mechanical Engineering, Vol. 43, No. 11, pp. 119-124, 20071