Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 4 (Aug. 2013), 301–320

Instructions of History of Mathematics with Mathematical Machines

수학기계를 활용한 수학사 수업

KWON Oh Nam 권오남 PARK Jung Sook 박정숙 KIM Eun Ji* 김은지

Although many people have recognized the importance of history of mathematics in mathematics education, there are few studies that history and mathematics educations are connected. In this paper, we present and discuss the ways of introducing the instruction with mathematics machines. This instruction use the history of mathematics as part of a class not as a tool to stimulate students' interest but as a goal that it can be targeted mathematical itself. To do this, we first analyze the characteristics of applying history of mathematics in mathematical education, second, describe the meaning and the educational value of mathematical machines, and finally explained the way of applying history of mathematics with mathematics machines. The Instruction of history of mathematics with mathematics machines has advantages that practice (manipulation and experiment) and theory (elaboration of definition, production of conjectures and constructions of proofs) are interlaced within a historic-cultural perspective.

Keywords: history of mathematics, mathematics education, mathematical machine; 수학사, 수학교육, 수학기계.

MSC: 97D40 ZDM: D44

1 서론

수학사가 수학교육에서 가지는 중요성은 많은 사람들이 인정하고 있지만 수학사와 수학교육을 연결시킨 연구는 많지 않다[7, 9, 13, 14]. 특히 우리나라의 수학 교육과정을 찾아보면 수학사에 대한 언급을 찾을 수 없으며 교과서에 제시된 수학사는 단원의 도입이나 단원의 마무리에 등장하여 학생들의 흥미를 불러일으키기 위한 동기로서의 역할을 할 뿐 수학 학습에서 수학사가 가지는 고유의 장점을 찾을 수 있는 부분은 드물다. 최근

*Corresponding Author.
KWON Oh Nam: Dept. of Math. Edu., Seoul National Univ. E-mail: onkwon@snu.ac.kr
PARK Jung Sook: Tareung High School E-mail: pjsook9@nate.com
KIM Eun Ji: Graduate School of Math. Edu., Seoul National Univ. E-mail: dmsenl@hanmail.net
Receiveded on June 30, 2013, revised on July 30, 2013, accepted on Aug. 7, 2013.

스토리텔링을 수학교육에 도입하려는 시도 중의 하나로 수학사가 부각되고 있으나 어떻게 활용해야 할지, 어떻게 수학교육에 접목시켜야 할지에 대한 연구는 계속 진행 중에 있다고 볼 수 있다.

수학사와 수학교육을 관련시킨 연구 중에 가장 눈에 띄는 시도 중의 하나는 International Commission on Mathematical Instruction(ICMI)에서 발표한 연구이다. 이 연구에서는 수학교육에서 수학사를 왜 가르쳐야 하는지에 대한 고찰과 함께 실제 수업에서 수학사를 어떻게 활용할 것인가에 대하여 다양한 시도와 함께 여러 가지 사례를 소개하고 있다[7]. 그 중에는 수학사에 제시된 문제를 학생들에게 제시하여 탐구하도록 하는 방법도 있고, 수학자에 대한 일화를 소개하여 학생들에게 흥미를 불러일으키는 경우도 있으며, 학생들과 프로젝트 학습을 진행시키는 사례도 포함되어 있다. 그러나 수학사가 학생들에게 학습 동기를 주는 것 이상으로 수학 학습의 목표가 되기 위해서는 수학사를 보다 직접적으로 다루는 과정이 필요하다. 수학사를 직접적으로 다루는 방법으로 유클리드 원론을 보며 학습하는 방법을 제기하기도 하고, 역사적으로 유명한 구장산술과 같은 수학책에 실린 문제를 해결하는 방법도 있을 수 있으나 이러한 시도들은 현재 학생들이 학습하는 교육과정과 밀접한 관련을 가지지 못하는 경우가 대부분이므로 중고등학교 학생들에게 적절한 자료를 찾는 것은 쉽지 않은 일이다.

중고등학교 교육과정과 밀접한 관련을 가지면서 수학사 자체를 직접 학습하는 방법으로 Bartolini Bussi [2]는 흥미로운 제안을 하였다. 이 연구는 고대 수학자들이 사용했던 도구를 수업 시간에 활용한 사례를 소개하고 있으며 수학의 증명을 경험적으로 구성할 수 있는 방안을 제공할 뿐 아니라 토론 학습을 통해 관련된 수학 개념을 이해를 할 수 있도록 구성하고 있다. 이와 같이 구체적인 조작물을 통해서 수학사를 학습한다면 교육과정 내에서 수학사 자체를 보다 효과적으로 학습할 수 있는 방안을 마련할 수 있을 것이다. 수학 학습에서 구체적 조작물을 활용하는 것은 저학년에 한정되어 있는 것으로 여겨지고 있지만 김수미[20]가 지적했듯이 구체적 조작물의 사용은 학생의 연령을 초월하는 문제이다. 구체적 조작물을 활용한 수학사 학습은 수학사를 보다 생동감 있게 학생들이 체험할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

본고에서 수학사 학습을 위해 제안하는 구체적 조작물은 일명 수학기계(Mathematical Machine)라고 불리는 조작 교구이다. 수학기계는 교육적인 목적으로 고대부터 현대에 이르기까지 역사적 문헌으로부터 재구성한 인공물이다[2]. 조작 교구는 물리적 참여를 통해 추상화 되어질 수 있는 수학적 아이디어를 표현하는 물체[32], 몇 가지 감각에 호소하는, 만질 수 있고 여기저기 옮길 수 있으며, 재배열이 가능하며, 아동에 의해 조작될 수 있는 물체[18], 수학적 개념을 병합하고, 여러 가지 감각에 호소하며, 학생이 만질 수 있고 여기저기 옮길 수 있는 구체적 모델[3]등으로 정의되어 왔다. 또한 김수미[20]는

수학적 조작 교구로서의 기능을 가지기 위해서는 학생의 지각적 감각에 자극을 주어야 하고, 학생이 만질 수 있어야 하며, 이동과 재배열이 가능해야 하고, 수학적 아이디어를 표현해야 한다고 주장하였다. 이러한 정의에 비추어 볼 때, 수학기계도 조작 교구로써의 면모를 갖추고 있다고 볼 수 있지만 그 자체로 역사적이고 문화적인 가치를 갖는다는 점에서 차별화될 수 있다.

수학기계를 활용한 수업은 학생들에게 수학 개념을 가르치고 학습하게 할 뿐 아니라 예술적인 면과 기술적인 측면을 관련시켜 학습할 수 있다는 점에서 최근 수학교육에서 강조되고 있는 STEAM학습과도 관련지어 생각해볼 수 있다. 따라서 본 연구는 수학사가 학생들의 흥미 진작이라는 동기화에 초점을 두는 것이 아니라 수학사가 하나의 주요 학습 대상이 될 수 있도록 구성하는 수업의 일환으로 수학기계를 소개하고, 수학기계를 활용한 수학 수업 사례를 제시하여 수학기계를 활용한 수학사 수업의 특징을 분석할 것이다.

2 수학사와 수학기계

이 장은 수학기계를 활용한 수학사 수업이 어떤 장점이 있는지 기술할 것이다. 이를 위해 먼저 수학교육에서 수학사를 활용한 연구들의 특징을 분석하고, 수학기계의 의미와 수학기계의 교육적 가치에 대해 서술할 것이다.

2.1 수학사와 수학교육

수학사를 수학 수업에서 왜 다루어야 하는가, 어떻게 다루어야 하는가에 대하여 많은 학자들의 연구가 발표되고 있다. 그 중 그동안의 연구들을 정리하여 발표한 것으로는 10th ICMI Study에서 발표한 논문 History in Mathematics Education [7], Gulikers와 Blom [9]이 발표한 논문, Jankvist [13, 14]의 논문을 들 수 있다. History in Mathematics Education는 수학사가 수학교육에서 어떤 역할을 하는지, 수학사를 왜 가르쳐야 하는지, 어떻게 가르쳐야 하는지, 수학사가 교사교육에 어떤 영향을 줄 수 있는지 등에 관하여 그 동안의 문헌들과 연구 결과들을 광범위하게 정리하여 수학사가 수학교육에서 가지는 역할을 조명하였다.

Gulikers와 Blom [9]이 발표한 논문은 1970년부터 1990년대에 이르기까지 수학사와 수학교육을 공통주제어로 갖는 논문들을 분석하여 수학사를 왜 수학교육에 활용해야 하는지 개념적인 측면, 문화적인 측면, 그리고 동기적인 측면에서의 주장들을 교사와 학생의 입장에서 기술하고 있다. 개념적인 측면에 초점을 두고 있는 입장은 교사가 수학을 역사적 발생 순서에 따라 가르칠 수 있으며, 교수학적인 자료를 풍부히 제공해준다고 설명하고 있으며, 학생의 입장에서는 어떻게 수학 개념이 발달되었는지 이해할 수 있고

수학 개념을 선형적인 발달 단계가 아닌 방법으로 학습할 수 있어 학습 장애와 수학 개념 발달이 조화롭게 진행되도록 도움을 줄 수 있다는 것이다. 문화적인 측면에 초점을 두고 있는 입장은 수학이 서구문화의 산물이 아니라 여러 문화권에서 다양하게 이루어져 온 발달이라는 것을 교사가 가르칠 수 있고, 다른 과목과의 통합이 일어날 수 있는 기회를 제공하며, 학생들은 사회에서의 수학의 역할에 대해 이해하고 수학이 인간의 활동의 산물임을 인지할 수 있다고 주장한다. 마지막으로 동기적인 측면에 초점을 두고 있는 입장은 교사가 교실을 생동감 있게 만들 수 있고, 유용한 학습 자료를 제공해주며, 학생들은 수학 학습에 흥미를 가질 수 있고, 수학 자체를 이해할 수 있도록 도움을 준다고 설명한다.

Jankvist [13, 14]는 그 동안의 문헌 분석을 통해 수학사를 가르치는 이유와 어떻게 가르쳐야 하는지에 대해 기술하고 있다. 수학을 가르치는 이유에 대해서는 크게 두 가지로 나누어 설명하고 있다. 첫 번째는 수학을 가르치고 배우는데 수학사가 도움을 준다는 입장인, 도구로서 수학사를 가르쳐야 한다는 것으로 수학사가 학생들에게 동기를 제공하는 도구이며, 정의적 측면을 제공하는 도구로서 활용가능하다는 것이다. 두 번째는 수학사 그 자체를 가르치는 것을 목적으로 수학사를 가르쳐야 한다는 것으로 수학은 시대마다 존재하고 진화해 왔으며, 사람들은 그 진화 과정에 참여함으로써 서로 다른 문화들이 수학 발달에 어떻게 공헌하였는지 알 수 있다고 설명한다.

어떻게 가르칠 것인가에 대한 접근 방법으로는 다음과 같은 세 가지를 제시하고 있다. 첫 번째는 조명 접근(illumination approach)이고 두 번째는 모듈 접근(modules approach), 세 번째는 역사를 기반으로 한 접근(history-based approach)이다. 조명 접근은 실제 교실에서 교과서를 활용할 때, 역사적 정보를 보조로 사용하는 것을 말하며, 모듈 접근은 수학사에 시간을 투자하는 것을 말하며, 역사를 기반으로 한 접근은 수학의 발달과 역사에 근거하여 직접적으로 감명 받은 것을 다루는 접근 방법이다. 역사를 기반으로 한 접근이 모듈 접근과 다른 점은 직접적으로 수학사를 언급하지 않는다는 것이다[13, 14]. 실제 수학사와 수학교육과의 관련 연구 결과를 분석하였을 때, 어떻게 가르칠 것인가에 대한 접근 방법으로 가장 많이 활용되는 것은 조명 접근이며, 학생들이 수학 학습에 흥미를 가질 수 있도록 도구적으로 수학사를 가르치는 경우가 80%가 넘는다고 설명하고 있다.

학생들의 학습 동기를 자극하기 위한 목적으로 수학사를 활용하는 것은 우리나라 논문에서도 많이 찾아볼 수 있다. 김기원과 감혜성[19]은 수학사를 활용하는 수학수업이 학생들의 수학학습태도에 미치는 긍정적 영향에 대해서 논의하였으며, 중학교 3학년에서 수학사를 활용할 수 있는 방안을 발표하였다. 이성철과 전상표[22]는 수학교과서에 수학사를 도입하는 것이 학생들의 학습동기와 의욕을 높일 수 있다고 주장하였고, 신

재용과 박준석[29]는 농촌지역 학생들을 대상으로 수학사를 이용한 포트폴리오 제작물 구안 적용을 통해 학생들의 수학 학습에 대한 인식 개선을 가져올 수 있음을 확인하였으며, 허도하와 오영열[11]은 초등학생들을 대상으로 하는 수학사 기반 수업을 통해 수학사의 활용을 통한 수업이 초등학생들에게 수학적 의사소통 능력의 향상을 가져온다고 보고하기도 하였다.

위에 언급한 논문에서 수학사를 수학교육에 접목시킨 방법을 살펴보았을 때, 대부분은 수학사의 에피소드나 수학자들의 일화를 소개하는 자료를 교사가 제시하는 것에 그치고 있었다. 수학사 자체에 집중한 자료라 할지라도 수학 개념이 도출된 과정을 시대 순으로 설명한 것이라 수학사를 활용하는 다양한 방법을 제안하지 못하고 있고, 학생들이 수학사를 보다 구체적으로 느낄 수 있도록 하기에는 여전히 많은 연구가 필요한 실정이다. 본 연구는 수학사를 목적으로 수학사를 다루며, 모듈 접근으로 수학사 자체를 교육과정 내에서 다루는 방법으로 수학기계를 활용한 수업을 제안할 것이다.

2.2 수학기계

수학기계는 교육적인 목적으로 고대 그리스 시대부터 20세기에 이르는 역사적 문헌으로부터 재구성한 인공물이다. 세계의 여러 박물관(the Museo di Storia della Scienza, in Florence, the Hilvert Raum of the Mathematics Institute in Göttingen, the Emperor Collection, stored in the Palace Museum of the Forbidden City in Bejing)에 원본이 전시되어 있지만 이 기구들은 손상의 위험이 있기 때문에 관람객이 만질 수 없다고 한다. 이에 반해 수학기계는 교실에서 교사와 학생이 직접 조작해볼 수 있는 활동으로 구성할 수 있다는 차이점을 갖는다[2].

수학기계의 종류는 크게 산술과 관련된 기계와 기하와 관련된 기계로 구분할 수 있다. 산술과 관련된 기계는 수 세기, 계산, 수 표현 등을 가능하게 하는 것으로, 대표적인 예로는 메소포타미아 문명의 점토판, 다양한 종류의 주판, 네이피어의 막대(Napier's rods) 등이 있다[2, 25]. 산술 기계는 역사적으로 계산 방법이 어떻게 달라졌는지 보여주며, 시대가 흐르면서 크기가 줄어들고 기능에서도 단순히 더하기를 하는 것이 아니라 셈법의 변화를 가져오게 된다. 바빌로니아의 점토판은 초기 계산 구조의 원리를 보여주는 도구이며, 주판은 계산의 발달 과정에 따라 단순히 세기를 목적으로 하는 직선으로 된 주판과 단위에 따라 계산이 가능한 여러 개의 줄이 있는 주판이 있으며 서양의 주판과 동양의 주판이 서로 다르다. 네이피어의 막대는 십진법의 곱셈을 좀 더 편하게 하기 위해 만들어진 것으로 고대의 산술 기계와 모양은 다르나 도구를 만든 제작자가 계산 원리를 가지고 있다는 점에서는 같은 의미를 가지고 있다.

기하 기계는 점, 선, 면을 이동시키거나 도구를 만든 사람이 정한 수학 법칙에 따라

도형을 변형시키기 위한 것으로 가장 평범한 예로는 자, 컴퍼스 등이 있고 곡선을 작도하는 도구, 팬터그래프, 퍼스펙터그래프(perspectograph)[1)]라고 불리는 Dürer의 유리 등이 있다[2, 26]. Maschietto와 Bartolini Bussi [24]에 따르면 수학기계는 기하학의 역사적 현상학의 일부분이다. 예를 들어, 자와 컴퍼스는 유클리드로 대표되는 초등 기하의 근간을 이루고 있고, 곡선을 작도하는 도구는 데카르트, van Schooten 그리고 뉴톤으로 대표되는 대수 기하학의 근간을 이루고 있으며, 퍼스펙터그래프는 Desargues로 대표되는 사영 기하학의 근간을 이루고 있다. Figure 1은 역사적 문헌에 나타난 Dürer의 유리와 Modena 대학 수학실험실(Mathematical Machines Laboratory, 이후 MMLab)에 있는 모형을 나타낸 것이다.

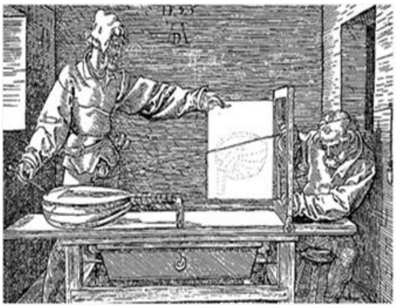


Figure 1. Dürer's Galss(Version of Underweysung(1525)) and Model of MMLab; Dürer의 유리(Underweysung(1525)의 버전)와 Modena 대학 수학실험실의 모형

수학기계를 수업에 활용하였을 때 얻을 수 있는 장점으로 Bartolini Bussi [2]는 문화적, 정의적, 인지적, 교수학적(didactic) 측면에서 잠재력이 있다고 주장하였다. 첫째, 문화적 측면에서 수학기계를 통해 수학사를 교실 활동에 도입할 수 있어 학생들은 수학이 예술, 기술, 일상생활과 연결된 인류 문화 발전의 한 부분이라는 것을 인식하게 된다. 현대 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 문화적인 역할, 인간관과 세계관 형성에 미친 수학의 역할을 이해하게 하는 것이 수학에 대한 학생들의 인식을 바꾸는데 도움이 된다는 수학사의 장점은 많은 학자들[6, 9, 10, 16, 17]에 의해 잘 알려진 사실이다. 둘째, 정의적 측면에서 수학기계를 통해 수학 활동의 발견적이고 즐거운 측면을 강조함으로써 수학에 대한 긍정적 태도를 기를 수 있다. 류선미, 박영희[28]는 수학 조작 교구의 활용에 대한 선행연구를 고찰하여 수학 교수-학습에서 조작교구를 활용함으로써 학습자의 흥미와 학습동기 유발이 가능하고 폭넓은 경험을 제공할 수 있으며 탐구 능력을 신장시키고 교실에서 활발한 의사소통을 촉진할 수 있다고 주장하였는데 이는 수학기계의 정의적 측면에서의 잠재력과 일맥상통한다고 볼 수 있다. 셋째, 인지적 측면에서 수학기계는 구체적인 조작이

1) 퍼스펙터그래프는 대상의 점들과 윤곽을 복사하기 위한 기구로 한 점에서 봤을 때 대상과 그림의 적절한 기하학적 관계를 나타내기 위한 것이다.

가능하기 때문에 신체를 활용하여 정신적 과정을 경험하게 할 수 있다. 신경과학과 인지언어학(cognitive linguistics)에서의 연구 결과에서도 신체를 활용한 정신 활동의 장점에 대한 연구 결과가 발표된 것을 미루어 볼 때, 수학기계를 활용한 수업은 학생들의 인지적 측면에서의 발달을 가속화시킬 수 있다.

이에 덧붙여 Maschietto와 Bartolini Bussi [24]는 수학기계를 활용한 수학사 수업이 역사적, 문화적인 관점 안에서 조작, 실험과 같은 실천 활동과 정의의 정교화, 추측의 생성, 증명의 구성과 같은 이론 활동이 어우러지게 할 수 있다는 점에서 학생들에게 의미 있는 수학적 경험을 가능하게 하는 좋은 수단이라고 주장하였다. 즉, 교수학적 측면에서 수학기계는 의미의 구성과 증명의 구성을 활성화시키는 적절한 학습 맥락을 제공할 수 있다. 또한 Antonini와 Martignone [1]에 따르면 팬터그래프와 같은 수학기계는 추측의 형성과 논증의 발생을 촉진할 수 있는 상황을 제공할 수 있다. 논증은 집단 사이의 갈등을 해결하기 위한 사회적이고 언어적인 수단으로 사회적 합의라는 배경을 떠나서는 이해할 수 없으며[30], 논증 활동은 특정 주제에 대해 자신의 의견을 제시함으로써 어떤 입장을 지지하거나 반박하는 언어적이고 사회적인 추론 활동이다[5]. 따라서 수학기계를 활용한 수업은 추측과 논증을 촉진하는 상황을 조성함으로써 교실에서의 의사소통을 활성화할 수 있고 학생들의 수학적 추론능력을 신장시킬 수 있다.

3 수학기계를 활용한 수업 사례

수학기계의 종류는 매우 다양하나 여기서는 수학기계 중 기하 기계를 활용한 수업 사례로 교사와 학생들이 제작하고 활용할 수 있는 팬터그래프와 원뿔 곡선을 작도하는 도구를 소개한다.

3.1 팬터그래프(pantograph)를 활용한 수업 사례

가. 팬터그래프

팬터그래프는 평면상의 점들 사이에 대응 관계를 만드는 수학기계이며 변환에 따라 여러 가지 형태의 팬터그래프가 있다[1]. 관련된 변환은 반사(reflection), 중점 대칭(central symmetry), 평행이동(translation), 회전이동(rotation), 상사 변환(homothety) 등이다. 이와 같은 변환은 연결 장치(articulated linkage)의 두 개의 플로터[2] 지점에 고정된 두 개의 연필심에 의해 이뤄지는데 이 연결 장치는 단단한 막대들과 몇 개의 중심으로 구성되어 있다.

Figure 2는 반사와 관련된 팬터그래프로 마름모의 네 꼭짓점 중, 직선 S 상에 있는 두

2) 플로터는 데이터를 도면화하는 출력 장치를 말한다.

꼭짓점은 S상에서 움직일 수 있고, P, Q는 축 S에 대한 대칭을 이룬다.

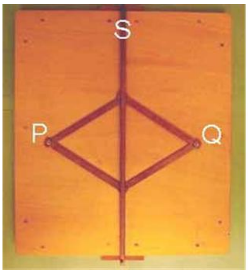


Figure 2. Reflection; 반사와 관련된 팬터그래프

Figure 3은 중점 대칭과 관련된 팬터그래프로 연결 장치의 마름모에서 한 변은 마름모의 한 변의 길이만큼 연장되어 있고 그 변과 인접한 변의 중점 O는 중심점의 역할을 한다. 이때, 점 P와 Q는 중심 O에 대한 대칭 관계에 있다.

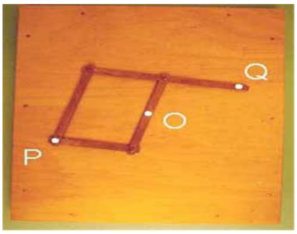


Figure 3. Symmetry to a point; 중점 대칭과 관련된 팬터그래프

Figure 4는 평행이동과 관련된 팬터그래프로 두 개의 평행사변형이 한 변을 공유하고 있다. 왼쪽 평행사변형에서 공유하고 있는 변의 대변은 평면상에 고정되어 있고, 오른쪽 평행사변형의 두 꼭짓점 P와 Q는 평행이동 관계를 이루고 있다.

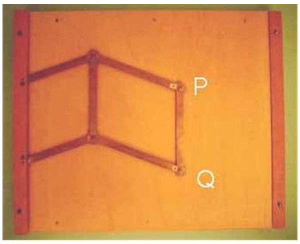


Figure 4. Translation; 평행이동과 관련된 팬터그래프

Figure 5는 회전이동과 관련된 팬터그래프의 평행사변형 $OABC$의 꼭짓점 O는 중심점 (pivot)이다. 이 연결 장치에서 삼각형 APB와 삼각형 CQB는 닮은 도형이고, $\overline{AP}=\overline{AB}$, $\overline{QC}=\overline{CB}$이다. 이때, 점 P와 Q는 회전 이동 관계에 있고 회전각의 크기는 $\angle APB$의 크기와 같다.

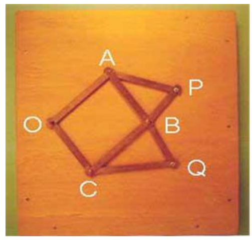


Figure 5. Rotation; 회전이동과 관련된 팬터그래프

Figure 6은 상사변환과 관련된 팬터그래프이고, 연결 장치에 있는 네 개의 막대는 평행사변형 $ABCD$를 이루고 있다. 점 O는 중심점이고 점 O와 일직선상에 놓여 있는 점 D와 P는 상사 변환 관계에 놓여있고, 그 비율은 $\overline{BO}/\overline{AO}$와 같다.

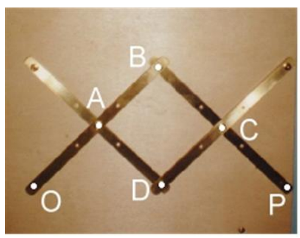


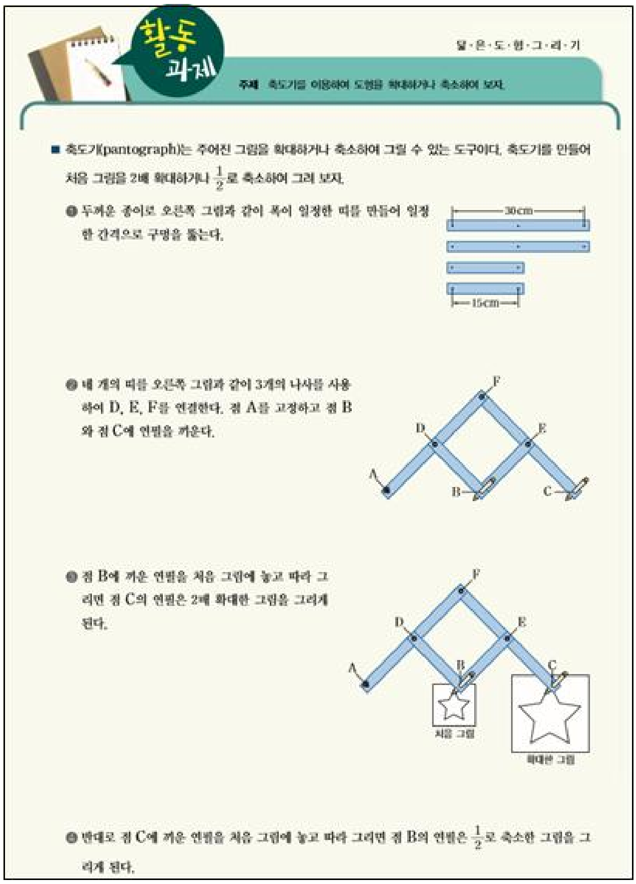
Figure 6. Homothety; 상사 변환과 관련된 팬터그래프

우리나라 교과서에도 팬터그래프를 소개한 예를 찾아볼 수 있다. 개정 교육과정에 따른 교과서에서도 찾을 수 있고 Figure 7과 같이 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에도 그 예를 찾을 수 있다. Figure 7에 제시된 팬터그래프는 Figure 6과 같은 형태의 팬터그래프로 2배 확대 또는 $\frac{1}{2}$로 축소한 도형을 그릴 수 있는 장치이다. 자료가 제시되어 있으니 수업을 구성하는 것은 교사의 재량에 따라 다양하게 구성할 수 있고 학생들의 탐구 활동을 위해 발문을 계획할 수 있지만, 주어진 활동 자료로는 융통성있는 수업 구성을 하기에는 어려움이 있으며, 팬터그래프의 수학적 원리를 탐구하기엔 부족한 부분이 있다.

다음 절은 팬터그래프를 활용하여 어떻게 수업 구성을 할 수 있는지 그 예를 제안할 것이다.

나. 팬터그래프를 활용한 수업 구성

팬터그래프는 2009 개정 교육과정에 따르면 중학교 2학년의 한 단원인 '도형의 닮음' 을 가르치고 학습할 때 활용할 수 있다. 제 7차 교육과정 시행 전에는 닮음을 구체적 활동을 중심으로 초등학교에서 지도한 후 중학교 2학년에서 심화하여 지도하였으나 제 7차 교육과정에 이르러 중학교 2학년에서만 지도하게 되었다. 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 "한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 서로


활동 과제

닮·은·도·형·그·리·기

주제 축도기를 이용하여 도형을 확대하거나 축소하여 보자.

■ 축도기(pantograph)는 주어진 그림을 확대하거나 축소하여 그릴 수 있는 도구이다. 축도기를 만들어 처음 그림을 2배 확대하거나 $\frac{1}{2}$로 축소하여 그려 보자.

❶ 두꺼운 종이로 오른쪽 그림과 같이 폭이 일정한 띠를 만들어 일정한 간격으로 구멍을 뚫는다.

❷ 네 개의 띠를 오른쪽 그림과 같이 3개의 나사를 사용하여 D, E, F를 연결한다. 점 A를 고정하고 점 B와 점 C에 연필을 끼운다.

❸ 점 B에 끼운 연필을 처음 그림에 놓고 따라 그리면 점 C의 연필은 2배 확대한 그림을 그리게 된다.

❹ 반대로 점 C에 끼운 연필을 처음 그림에 놓고 따라 그리면 점 B의 연필은 $\frac{1}{2}$로 축소한 그림을 그리게 된다.

Figure 7. 2009 Revision curriculum middle school textbook second grade [21, p. 297]; 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 2학년 교과서[21, p. 297]

닮음인 관계가 있다고 한다. 또 닮음인 관계가 있는 두 도형을 닮은 도형이라고 한다."[21, p. 264]라고 닮음을 정의하고 있다. 대부분의 교과서에서 이와 유사한 정의를 하고 있다.

임재훈, 박교식[31]은 학생들이 중학교 2학년에 처음으로 닮음을 다루기 때문에 확대, 축소에 대한 사전 학습 경험이 없어 이러한 정의를 이해하는데 어려움을 겪을 수도 있음을 지적하며 닮음을 도입할 때 확대도, 축도를 만들어 보는 풍부한 경험을 제공하여 닮음의 정의를 내면화 할 수 있게 해야 한다고 주장하였다. 또한, 최지선[4]은 도형의 확대나 축소를 이용한 정의를 직관적 정의, 도형의 각의 크기와 변의 길이의 관계를 지시하는 정의를 형식적 정의로 구분하고 이 두 가지 정의가 서로 관련되지 않고 증명되지 않은 채로 학생들에게 제시되고 있다는 점을 비판하며 이에 대한 대안 중 하나로 중학교 교육과정에서 학생들이 닮음을 정의하는 활동을 하는 것을 제안한 바 있다. 이 절에서는 닮음의 정의를 내면화하고 학생들이 닮음을 정의하는 활동을 할 수 있도록 상사변환과 관련된 팬터그래프(Figure 6)를 활용한 수업 예시를 소개하고자 한다. 수업은 총 세 단계로 구성하였다.

1) 첫 번째 단계 : 역사적 배경에 대한 설명 수업 구성의 첫 번째 단계로 역사적 배경과 함께 팬터그래프를 제작한다. 팬터그래프에 대한 역사적 배경에 대한 설명은 다음과 같이 구성할 수 있다.

> 팬터그래프는 1603년에 Christoph Scheiner가 발명했다. 그는 이 장치를 그림을 복사하거나 크기를 조정하기 위해 사용하였다. 그는 27년 후인 1631년에 그의 책 "Pantographice"(Rome 1631)에서 자신의 발명품에 대해 기술했다. 팬터그래프의 한 팔에는 작은 바늘이 붙어있고, 다른 한 팔에는 작도하는 도구가 붙어있다. 바늘을 그림 위에서 움직임에 따라서 다른 종이에 그 그림의 복사본이 그려진다. 이 연결 장치의 바늘이 달린 팔과 작도하는 도구가 달린 팔 사이의 위치를 변경시킴으로써 그려지는 그림의 크기를 바꿀 수 있다.

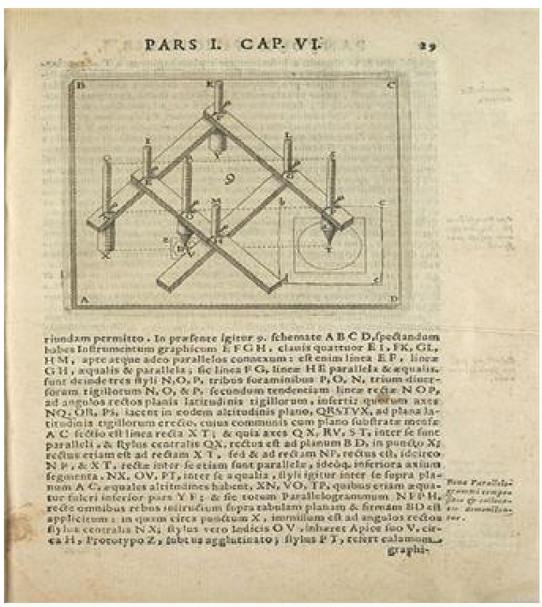


Figure 8. Pantograph of Scheiner(Scheiner, 1631); Scheiner의 팬터그래프(Scheiner, 1631)

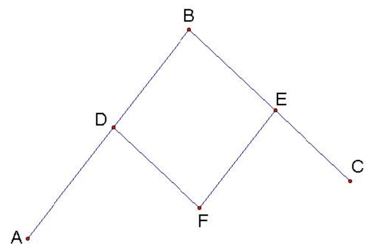
역사적 설명과 함께 앞서 제시한 팬터그래프의 다양한 종류를 보여주면서 각 팬터그래프가 어떻게 움직이며 어떤 도형을 그리는지 컴퓨터 자바 애플리케이션[3]을 이용하여 확인할 수 있도록 한다.

두꺼운 종이를 이용하여 팬터그래프를 제작한다. 이때, 구멍을 세 개만 뚫지 않고 간격을 일정하게 하여 몇 개의 구멍을 더 만들도록 한다.

3) `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Pantograph.shtml` 참고

2) 두 번째 단계: 소집단 활동 2∼3명으로 구성된 소집단 별로 팬터그래프를 직접 조작하는 활동을 하게 한다. 이때, 활동지를 제공하여 학생들의 조작활동과 탐구활동을 교사가 의도하는 방향으로 이끌 수 있도록 하고 활동지에 제시된 문제를 토의를 통해 해결할 수 있게 한다. Table 1은 활동지 예시를 나타낸 것이다.

1. 팬터그래프를 이루고 있는 막대들은 몇 개인가? 각 막대의 길이를 재어보자.
2. 막대들은 어떤 모양을 이루고 있는가? $\square BDFE$는 어떤 사각형인가? 그 이유를 설명 하여라.



팬터그래프를 움직여 보자.

3. 어떤 그림들이 그려지는가? 그려진 그림들의 관계를 설명해보아라.
4. 삼각형을 그려보자. 그려진 두 개의 삼각형의 성질은 어떠한가?
5. $\square BDFE$가 다른 형태의 사각형이라고 해도 여전히 닮은 도형을 그릴 수 있을까?
6. 구멍의 위치를 조정하여 어떤 그림들이 그려지는지 그려보고 앞에서 확인한 그림과의 크기를 비교해보자.
7. 5번의 답에 영향을 주는 팬터그래프의 수학적 원리를 설명하여 보자.
8. 다른 종류의 팬터그래프로 그리면 어떤 그림이 나오는가?
9. 자신만의 팬터그래프를 만든다면 어떤 종류의 팬터그래프를 만들 수 있는가? 어떻게 만들 수 있는가?

Table 1. Worksheet; 활동지 예시

Table 1에 제시된 질문 중 교사에 따라 중복된다고 여겨지는 질문은 빼고 구성할 수 있다. 특히 마지막 질문에 대한 답은 학생들에 따라 다양한 답이 나올 수 있고 창의적인 팬터그래프를 제작할 수도 있다.

3) 세 번째 단계 : 전체 학급의 토론 활동 마지막으로, 주어진 활동지에 대해 소집단별로 토의한 내용을 바탕으로 전체 토의를 할 수 있게 해야 하는데 이때 교사의 발문이 중요하다. 전체 토의 과정에서 교사는 학생들이 탐구한 과정을 서로 공유할 수 있게 하고 학생들이 탐구한 팬터그래프와 팬터그래프를 통해 그려진 그림들의 관계에 대해 질문해야 한다. 교사는 팬터그래프가 “어떻게 만들어졌는가?” “무엇을 그리는가?” “왜 그러한가?” 질문할 필요가 있다. “어떻게 만들어졌는가?”를 질문하는 것은 팬터그래프의 물리적인 구조를 설명하도록 하고 팬터그래프의 연결 장치들의 부분적인 관계와 공간적인 관계를 발견하게 한다. 특히, 교사가 “왜 그러한가?”를 묻는 것은 학생들이 추측을 하고, 그에 대해 논증하고 증명을 구성하는 것을 장려할 수 있다[8]. 즉, 교사는 학생들이 수학적으로 적절한 논증과 정당화를 할 수 있게 도움으로써 학생들의 수학적 의사소통 능력과 수학적 추론 능력의

향상을 꾀할 수 있을 것이다.

3.2 원뿔 곡선을 작도하는 도구를 활용한 수업 사례

가. 원뿔 곡선을 작도하는 도구 (conic drawer)

원뿔 곡선을 작도하는 도구는 원뿔 곡선을 "고정된 한 점과 고정된 한 원주로부터의 거리가 같은 점들의 자취"라고 정의하는 계량 기하학 (metric geometry) 의 관점으로 본다. Figure 9는 원뿔 곡선의 포물선, 타원, 쌍곡선을 작도하는 도구를 나타낸 것으로 van Schooten(1615–1660) 의 저서 De Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione, Tractatus(1646) 에 기술되어 있다.

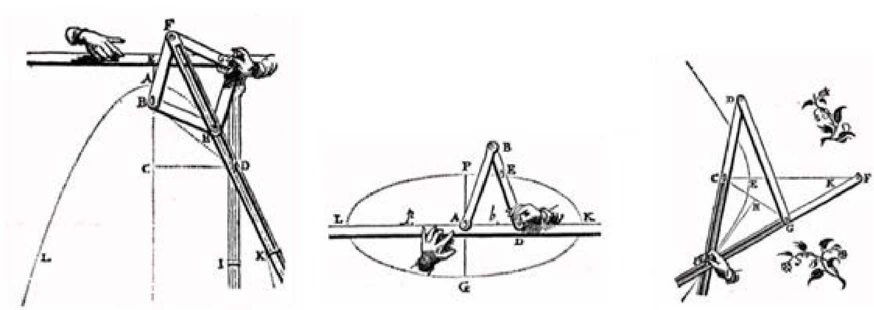


Figure 9. van Schooten's conic drawing device; van Schooten의 포물선을 작도하는 도구

Figure 9의 세 가지 도구 중에서 타원을 작도하는 도구의 수학적 원리를 살펴보자. 이 도구는 일정한 길이를 갖는 막대 사이의 관계를 유지하는 성질을 이용한 것으로 원뿔곡선을 일정한 비례 관계를 만족하는 점의 집합으로 정의한다. 이는 고대 그리스부터 사용된 방법으로 Appolonius, Pappus, Archimedes 등이 이러한 정의를 사용하였다[15].

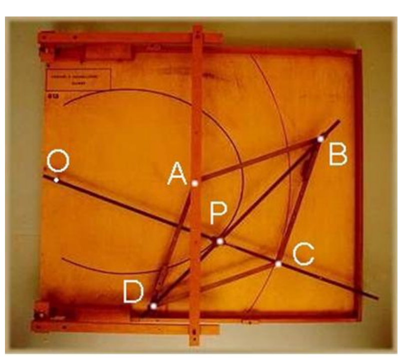


Figure 10. Ellipse drawing device; 타원 곡선을 작도하는 도구

Figure 10의 타원을 작도하는 도구는 연결 장치가 점 P 에서 핀으로 고정되어 그 주변을

회전하는 막대($\overline{OC}$, $\overline{BD}$)들과 마름모 $ABCD$로 이루어진다. 마름모 $ABCD$의 꼭짓점 A는 중심점이고 꼭짓점 C는 평면 위의 점 O를 지나는 막대와 연결되어 있다. 마름모의 꼭짓점 B와 D는 핀으로 막대($\overline{BD}$)와 연결되어 있어 $\overline{BD}$는 항상 마름모 $ABCD$의 대각선이 된다. 이 때, $\overline{OC} = l$이라 하자. 점 C를 움직이면, 중심을 O로 하고 반지름의 길이가 l인 원이 그려진다. $\overline{PO} + \overline{PA} = \overline{PO} + \overline{PC} = l$이므로 막대 $\overline{OC}$와 $\overline{BD}$가 만나는 점인 P는 초점이 O와 A인 타원을 그리게 된다. 이때, 원 O를 준선(directrix)이라고 한다. 점 A가 원의 내부에 있으면 연결 장치는 타원을 그리게 되고, 원의 바깥에 있으면 쌍곡선을 그린다. 만약, 원이 직선이 된다면 P가 그리는 곡선은 초점이 B인 포물선이 된다.

다음 절은 타원을 작도하는 도구를 활용하여 어떻게 수업 구성을 할 수 있는지 그 예를 제안할 것이다.

나. 타원을 작도하는 도구를 활용한 수업 구성

현재 고등학교 교육과정의 '기하와 벡터' 에서는 이차곡선을 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 단면 곡선이라고 소개하면서 그 지도는 해석적인 입장에서 하고 있다. 이러한 설명은 학생들이 기계적으로 이차곡선과 관련된 문제를 해결하기에는 부족하지 않다고 할 수 있으나 이차곡선의 정의나 개념에 대해서는 부족한 이해를 갖게 한다[23]. 장미라와 강순자[12]는 이차곡선의 지도에 대한 기존의 연구들이 주로 이차곡선을 작도하는 방법과 기하학적 관점에서 이차곡선을 어떻게 지도할 것인지에 대한 논문들과 이차곡선이 실생활의 어느 곳에 나타나고 활용되는지에 관한 논문이 주류를 이루고 있음을 언급하며 역사적 고찰을 통한 이차곡선의 지도방안이 필요함을 설명하였다. 그러나 역사적 고찰을 통한 이차곡선의 지도 방안이 문헌을 탐색하는 것에 그치고 있어 조작을 통한 학습과는 거리가 있다.

이 절에서는 Maschietto 와 Bartolini Bussi [24]가 제시한 방법으로 van Schooten의 안티평행사변형을 활용한 수업 예시를 소개하고자 한다. 안티평행사변형[4]은 Figure 11과 같이 나타나며 van Schooten의 책에 첨부된 그림과 이를 바탕으로 재구성한 모형이다.

수업은 총 세 단계로 구성하였다.

1) 첫 번째 단계 : 역사적 배경에 대한 설명 첫 번째 단계는 교사가 전체 학생을 대상으로 수업 시간에 다룰 수학기계의 역사적 배경을 설명하는 방식으로 진행한다. 이 단계에서 학생들의 흥미를 끌고 동기를 유발할 수 있다. van Schooten의 안티평행사변형의 역사적 배경은 다음과 같다.

4) 안티평행사변형이란 두 쌍의 대변의 길이가 같고, 그 중 길이가 더 긴 한 쌍의 대변이 서로 교차하는 사각형을 말한다.

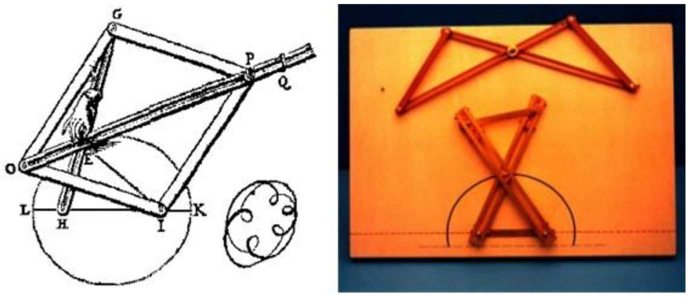


Figure 11. van Schooten's(1657) antiparalleogram and Model of MMLab; van Schooten(1657)의 안티평행사변형과 Modena 대학 수학 실험실의 모형

> 원뿔곡선은 그리스 시대부터 많은 학자들에 의해 연구되었다. Menaechmus는 3대 작도 불능 문제인 주어진 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 원적문제, 각의 삼등분 문제, 배적문제의 해법을 연구하는 과정에서 원뿔을 절단하여 원뿔 곡선을 발견했다. 또한 Apollonius는 원뿔을 '주어진 원과 같은 평면에 존재하지 않은 고정된 한 점(꼭짓점)이 있다. 고정된 점과 원의 둘레를 지나는 직선의 자취를 원뿔이라고 한다.' 고 정의하였다. 또한 원뿔곡선을 '원뿔을 절단하는 각도에 따라서 생기는 단면' 으로 정의하고 원뿔곡선을 분류하는 세 가지 용어인 '포물선', '쌍곡선', '타원' 을 만들었다. 이후 Kepler는 초점(focus)이라는 용어를 사용하여 원뿔곡선을 정의하고 실과 두 개의 초점으로 타원을 작도하는 방법을 제시했다(Figure 12). Pappus는 준선(directrix)과 자취 개념을 이용하여 원뿔곡선을 정의하였다. 즉, Pappus는 원뿔의 절단과는 상관없는 순수한 관계식으로 원뿔곡선을 정의한 것이다[15]. 이에 대해 Descartes는 평면상에서 연속적인 동작으로 곡선을 그릴 수 있는 인공물을 찾았고 van Schooten은 Descartes의 저서 Géométrie를 라틴어로 번역하고 Descartes의 곡선을 작도하는 도구에 대해 해설을 덧붙였다.

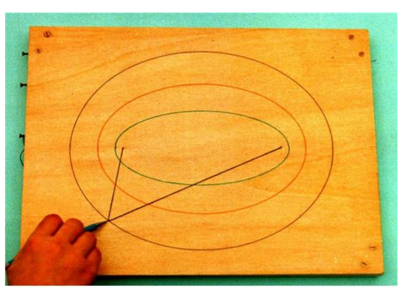
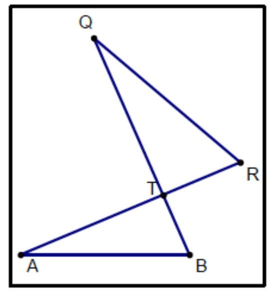


Figure 12. Model of Kepler' s ellipse drawing device in MMLab; Modena 대학 수학 실험실의 Kepler의 타원을 작도하는 도구 모형

2) 두 번째 단계 : 소집단 활동 4~5명으로 구성된 소집단별로 직접 수학기계를 조작할 수 있도록 한다. 이때, 학생들의 조작활동과 탐구활동을 교사가 의도하는 방향으로 이끌 수 있도록 활동지를 제공하고 토의를 통해 해결할 수 있게 한다.

활동지의 1, 2, 3번의 질문은 주어진 수학기계의 물리적인 특성에 초점을 맞추고 있다. 특히, 2번은 연결 장치의 기능과 그려진 곡선의 성질을 정당화하기 위한 것이다. 4, 5, 6번



1. 연결 장치는 몇 개로 구성되어 있는가?
2. 각각의 막대를 길이를 재보아라. 막대들은 어떤 모양을 이루고 있는가?
3. 장치의 요소들 중에서 평면에 고정되어 있는 것은 어떤 것인가?

연결 장치를 움직여보아라.

4. 움직이는 동안에 길이가 변하지 않는 부분은 어디인가?
5. 움직이는 동안 길이가 변하는 부분은 어디인가?
6. 변하는 동안 길이가 같은 부분은 어디인가?

점 Q, R, T의 자취에 대해서 다음 물음에 답하여라.

7. Q와 R이 그리는 곡선은 무엇인가?
8. T에 연필을 넣고 곡선을 그려보아라. 그려진 곡선의 성질은 어떠한가?
9. 적당한 좌표축을 택해라. 점 Q, R, T가 그리는 곡선의 방정식을 써 보아라.

Table 2. Worksheet; 활동지 예시

질문은 장치를 움직일 것을 요구하고 움직이는 동안 변하지 않는 것들에 초점을 맞춘다. 7, 8, 9번은 그려지는 자취에 대한 질문인데, 사실 이 장치에서 실제로 그림이 그려지는 점은 T뿐이다. 8번 질문은 학생들이 타원의 정의를 얻어낼 수 있게 하기 위한 것이고 8번 질문은 학생들의 추측과 그에 대한 논증활동을 촉진할 수 있을 것이다. 9번 질문은 이제까지 학생들이 구성한 내용을 해석 기하학의 영역으로 이동시키는 질문이다.

3) 세 번째 단계 : 전체 학급의 토론 활동 마지막으로 주어진 활동지에 대해 소집단별로 토의한 내용을 바탕으로 전체 토의를 할 수 있게 하여 합의된 결과를 이끌어 낼 수 있게 한다. 이때 교사가 발문이 중요하다. 전체 토의 과정에서 교사는 학생들이 탐구한 과정을 서로 공유할 수 있게 하고 학생들이 탐구한 타원을 작도하는 도구와 타원을 작도하는 도구를 통해 그려진 곡선의 관계에 대해 질문해야 한다. 교사는 타원을 작도하는 도구가 "어떻게 만들어졌는가?", "무엇을 그리는가?", "왜 그러한가?" 물어야 한다. "어떻게 만들어졌는가?" 묻는 것은 타원을 작도하는 도구의 물리적인 구조를 기술하게 하고 타원을 작도하는 도구의 부분적인 관계와 공간적인 관계를 발견하게 한다. 특히, 교사가 "왜 그러한가?"를 묻는 것은 학생들이 추측을 하고, 그에 대해 논증하고 증명을 구성하는 것을 장려할 수 있다[8]. 즉, 교사는 학생들이 수학적으로 적절한 논증과 정당화를 할 수 있게 도움으로써 학생들의 수학적 의사소통 능력과 수학적 추론 능력의 향상을 꾀할 수 있다.

4 결론

수학사를 수학교육에 접목시켜 사용하였을 때, 교사와 학생들 모두에게 의미 있는 경험을 할 수 있도록 도움을 줄 수 있다는 것은 많은 연구자들의 연구 결과를 통해 알 수 있다. 그러나 실제로 교사들은 수업 시간에 수학사를 간단하게 활용하는데 그치고 있다. 교사들이 수업 시간에 수학사를 활용하는 것을 어려워하는 이유는 여러 가지를 들 수 있지만 그 중의 하나는 자료가 충분치 않다는 점과 교사가 수학사에 대해 잘 알고 있지 못하며, 교육과정에 적절한 자료를 찾고 다시 재구성하는 시간이 부족하다는 점들을 들고 있다.

본 연구는 수학사를 학생들의 흥미를 진작시키는 도구로서의 역할이 아닌 수학사 자체가 수학 학습의 대상이 될 수 있도록 하는 수업이 필요함을 인식하였으며 그 방법의 일환으로 구체적 조작물의 역할을 할 수 있는 수학기계를 활용한 수업 방법을 소개하였다. 이를 위해 먼저 수학교육에서 수학사를 활용한 연구들의 특징을 분석하고, 수학기계의 의미와 수학기계의 교육적 가치에 대해 서술하며, 마지막으로 수학기계를 이용하여 수학사를 활용하는 방법에 대해 설명하였다.

수학기계는 역사적, 문화적인 관점 안에서 조작, 실험과 같은 실천 활동과 정의의 정교화, 추측의 생성, 증명의 구성과 같은 이론 활동이 어우러지게 할 수 있다는 점에서 수학 교실에서 의미 있는 수학적 경험을 가능하게 하는 좋은 수단이다[24]. 수학기계를 활용한 수업은 교실에서 교사와 학생이 직접 조작해볼 수 있는 활동으로 구성할 수 있어 생동감 넘치는 수업을 구성할 수 있으며 교육과정과 연계시킬 수 있고 다른 학문과의 연계성을 고려한 수업으로도 의미 있는 수업이 될 수 있다. 팬터그래프를 활용한 수업과 타원을 작도하는 도구를 활용한 수업 예시는 수학사를 목적으로 수학사를 다루고 있으며 하나의 모듈로서의 접근 방법을 시도한 결과이다.

참고 문헌

1. S. Antonini, F. Martignone, "Pantographs for geometrical transformations: An explorative study on argumentation", Consultado el 14 de abril de 2011 en:, 2011, `http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_antonini_martignone.pdf`
2. M. G. Bartolini Bussi, *Ancient instruments in the modern classroom*, In J. Fauvel & J. van Maannen (Eds), *History in mahtematics education: The ICMI Study*, 2000, 343–351. Dordrecht: Kluwer
3. G. W. Cathcart(ed), *The mathematics laboratory: Readings from the arithmetic teacher*, Reston, VA.: NCTM, 1977.
4. Choi J. S., "An Analysis and Criticism on the Definition of the Similarity Concept in Mathematical Texts by Investigating Mathematical History", *The journal of educational research in mathematics* 20(4) (2010), 529–546. 최지선, "수학사 고찰을 통한 교과서의 닮음 정의에 대한 분석과 비판", 수학교육학연구 20(4) (2010), 529–546.

5. F. H. van Eemeren, & R. Grootendorst, *Argumentation, communication, and fallacies: A pragma-dialectical perspective*, Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.
6. J. Fauvel, "Using history in mathematics education", *For the Learning of Mathematics* 11(2) (1991), 3–6.
7. J. Fauvel, J. van Maanen(Eds.), History in mathematics education, *New ICMI study series: Vol. 6*, Dordrecht, the Netherlands: Kluwer, 2000.
8. F. Ferrara, M. Maschietto, "Are mathematics students thinking as Kepler? Conics and mathematical machines", *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education*, Antaya, Turkey, 2013. `http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG4/WG4_Maschietto.pdf`
9. I. Gulikers, K. Blom, " 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education", *Educational Studies in Mathematics* 47(2001), 223–258.
10. T. Heiede, "Why teach history of mathematics", *The Mathematical Gazette* 76(475) (1992), 151–157.
11. Heo D. H. and Oh Y. Y., "The Influence of Mathematical History-Based Mathematics Teaching on Mathematical Communication and Attitudes of Elementary Students", *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* 15(2) (2011), 463–485. 허도하, 오영열, "의사소통 중심의 수학사 기반 수업이 초등학생의 수학적 의사소통과 태도에 미치는 영향", 한국초등수학교육학회지 15(2) (2011), 463–485.
12. Jang M. R., and Kang S. J., "How To Teach The Quadratic Curves Through Historical Overview", *Communications of mathematical education* 24(3) (2010), 731–744. 장미라, 강순자, "역사적 고찰을 통한 이차곡선의 지도방안", 수학교육논문집 24(3) (2010), 731–744.
13. U. T. Jankvist, "A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education", *Educational Studies in Mathematics* 71(2009), 235–261.
14. U. T. Jankvist, "Anchoring Students' metaperspective discussions of history in mathematics", *Journal for Research in Mathematics* 42(4) (2011), 346–385.
15. Jin M. Y., Kim D. W., Song M. H. & Cho H. H., "The history of conic sections and mathematics education", *The Korean Journal for History of Mathematics* 25(4) (2012), 83–99. 진만영 외, "원뿔곡선의 수학사와 수학교육", 한국수학사학회지 25(4) (2012), 83–99.
16. V. J. Katz, "Ethnomathematics in the classroom", *For the Learning of Mathematics* 14(2) (1994), 26–30.
17. V. J. Katz, "Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics", *For the Learning of Mathematics* 17(1) (1997), 62–63.
18. L. M. Kennedy, "A rationale", *Arithmetic Teacher* 33(6) (1986), 6–7.
19. Kim K. W. and Kam H. S., "The Application of the History of Mathematics to the Senior Mathematics Education in the Middle School", *The Korean Journal for History of Mathematics*, 16(2) (2003), 71–86. 김기원, 감혜성, "중학교 3학년 수학교육에서 수학사의 활용", 한국수학사학회지 16(2) (2003), 71–86.
20. Kim S. M., "A Study on Manipulative Materials in Mathematics Education", *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics* 2(2) (2000), 459–474. 김수미, "수학교육에서의 조작교구에 관한 연구", 학교수학 2(2) (2000), 459–474.

21. Kim W. K. et al., *Middle School Mathematics 2*, Seoul: Visang, 2013. 김원경 외, 「중학교 2 학년 수학」, 서울: 비상교육, 2013.
22. Lee S. C. and Jeon S. P., "The Methods of Mathematical Education used on History of Mathematics", *The Journal of Namseoul University* 10 (2) (2004), 163–176. 이성철, 전상표, "수학사를 이용한 수학교육의 방법", 남서울대학교 논문집 10(2) (2009), 163–176.
23. Lew H. C. and Je S. Y., "Construction of Quadratic Curves Using the Analysis Method on the Dynamic Geometry Environment", *Korean Journal of Teacher Education* 25(4) (2009), 168–189. 류희찬, 제수연, "역동적 기하 환경에서 파푸스의 분석법을 이용한 이차곡선의 작도 활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화", 교원교육 25(4) (2009), 168–189.
24. M. Maschietto, M. G. Bartolini Bussi, "Mathematical machines: From history to the mathematics classroom", In P. Sullivan & O. Zavlasky (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (vol. 6, 227–245), New York, USA: Springer, 2011.
25. M. Maschietto, L. Trouche, "Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories", *The International Journal on Mathematics Education* 40(2010), 201–213.
26. M. Maschietto, "The laboratory of mathematical machines of Modena", *Newsletter of the European Mathematical Society* 57(2005), 34–37.
27. National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
28. Ryu S. M. and Park Y. H., "A Study on the Uses and the Activation Plan for the Manipulative Material in Elementary Mathematics", *Journal of Research in Curriculum Instruction* 11(1) (2007), 15–38. 류선미, 박영희, "초등학교 수학과 조작교구 활용실태 및 활성화 방안에 대한 조사 연구", 교과교육학연구 11(1) (2007), 15–38.
29. Shin J. Y. and Park J. S., "An Effect on Mathematical Preference and Learning Attitude of the Application of Designing for Portfolio using Mathematical History", *Journal of the Korean School Mathematics Society* 7(2) (2004), 1–20. 신재용, 박준석, "수학사를 이용한 Portfolio 제작물 구안 적용이 수학적 성향 및 학습태도에 미치는 영향", 한국학교수학회논문집 7(2) (2004), 1–20.
30. D. N. Walton, *Begging the question: Circular reasoning as a tactic of argumentation*, NY: Greenwood, 1991.
31. Yim J. H. and Park K. S., "A Critical Analysis of the Introduction of Similarity in Korean Mathematics Textbooks", *The journal of educational research in mathematics* 19(3) (2009), 393–407. 임재훈, 박교식, "우리나라 수학 교과서의 닮음 도입 및 정의에 관한 비판적 논의", 수학교육학연구 19(3) (2004), 393–407.
32. S. L. Young, "How teacher educators can use manipulative materials with preservice teachers", *Arithmetic Teacher* 31(1983), 12–13.

[그림 출처]

Figure 1: `http://www.museo.unimo.it/Theatrum/macchine/090aogg.htm`

Figure 2: `http://www.museo.unimo.it/labmat/saxiseng.html`

Figure 3: `http://www.museo.unimo.it/labmat/scenteng.htm`

Figure 4: http://www.museo.unimo.it/labmat/trasleng.htm

Figure 5: http://www.museo.unimo.it/labmat/roteng.htm

Figure 6: http://www.museo.unimo.it/labmat/omoteng.htm

Figure 8: http://fermi.imss.fi.it/rd/bdv?/bdviewer/bid=000000920801

Figure 9: http://kmoddl.library.cornell.edu/linkages/,http://www.museo.unimo.it/labmat/Vanschin.htm

Figure 10: http://www.museo.unimo.it/labmat/conparin.htm

Figure 11: http://kmoddl.library.cornell.edu/linkages/, http://www.museo.unimo.it/Theatrum/macchine/052ogg.htm

Figure 12: http://www.museo.unimo.it/Theatrum/macchine/044ogg.htm