Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 4 (Aug. 2013), 219–232

The Succession and Innovation of Wasan to Chinese Mathematics —A case study on Seki's interpolation

和算对中算的继承与创新—以关孝和的內插法为例

QU Anjing 曲安京

Japanese mathematics, namely Wasan, was well-developed before the Meiji period. Seki Takakazu (1642?–1708) is the most famous one. Taking Seki's interpolation as an example, the similarities and differences are made between Wasan and Chinese mathematics. According to investigating the sources and attitudes to this problem which both Japanese and Chinese mathematicians dealt with, the paper tries to show how and why Japanese mathematicians accepted Chinese tradition and beyond. Professor Wu Wentsun says that, in the whole history of mathematics, there exist two different major trends which occupy the main stream alternately. The axiomatic deductive system of logic is the one which we are familiar with. Another, he believes, goes to the mechanical algorithm system of program. The latter featured traditional Chinese mathematics, as well as Wasan. As a typical sample of the succession of Chinese tradition, Wasan will help people to understand the real meaning of the mechanical algorithm system of program deeper.

Keywords: Wasan, interpolation, Seki Takakazu

MSC: 01

1 序論

日本传统数学(和算)在17 世纪中叶出现了一大批著名的数学家和数学成果。关孝和(Seki Takakazu 1642 ?–1708)及其弟子建部贤弘(Takebe Katahiro 1664–1739)是其代表人物。

和算的成长时期，大体与我国的清代同时，他们是在接受传统中国数学的基础上发展起来的。与清代数学家不同的是，和算家研究的问题，虽然大部分都可以追朔到中算的源头，但是，这些问题，基本上都被和算家抽象为纯粹的数学问题，而且多有创造性的贡献。而与和算家同时代的明清数学家，则在对传统数学的继承与创新方面，

QU Anjing: Dept. of Math., Northwest Univ., Xi'an, China. E-mail: qaj@nwu.edu.cn
Receiveded on July 3, 2013, revised on July 25, 2013, accepted on Aug. 10, 2013.

相较和算家逊色很多。

比较和算与中算的异同，对于我们理解明清时期复兴中国传统数学的各种努力，特别是对我们理解中国古代数学的机械化程序算法体系的特征，及其在整个数学史长河中的地位，是有重要意义的。

关孝和的累裁招差法，基本上根源于中国传统数理天文学中提出的问题，本文以这个问题为例，通过复原和算家处理这些问题的思想方法，并比较它们与中国古代算法的异 同，以期说明和算家对中国传统数学的机械化程序算法体系的继承与创新。

2 《授时历》的内插法与关孝和的累裁招差法

日本数学家对于内插法的研究，提出了若干种不同的算法，如累裁招差法、混沌招差法等等。经过前人的研究，这些算法的具体内容和程序，已经很清楚了。[1] 可以肯定的是，和算家构造的这些算法，都是在研究了《天文大成管窥辑要》(1653) 中记录的《授时历》(1280) 中的三次内插法的基础上发展起来的。

比较有意思的问题是，关孝和的累裁招差术与《授时历》的关系到底是怎样的？尽管已经有若干文章讨论，但是，由于这些研究者未能很好地理解《授时历》内插法的构造思想，因此，尚未见到很好的答案。[2, 3] 为了比较《授时历》与关孝和算法之构造思想的异同，让我们先简要地回顾一下《授时历》的内插法。

2.1 《授时历》的三次内插法

在《授时历》中，郭守敬创造了三次插值算法。令插值函数为

$$f(x) = ax + bx^2 + cx^3$$

其中，系数 a, b, c 分别被称为定差、平差、立差，因此，人们也称该算法为平立定三差算法。《授时历》三次插值函数 $f(x)$ 的构造原理，《元史》未做交代，目前人们最常引用的材料，即梅文鼎根据《大统历通轨》与《大统历历草》编写的《大统历法原》，收载于《明史历志》(卷33)。[4] 根据梅文鼎的记述，我们可以知道《授时历》三次插值函数 $f(x)$ 是按以下的方式构成的：首先，取 $x_k = kn$ 为插值点，称为“积日”，则“积差” $f(x_k)$ 为已知。因为 $f(0) = 0$，所以，令

$$y(x) = \frac{f(x)}{x} = a + bx + cx^2$$

于是，当 $k \geq 1$ 时，“日平差”为

$$y_k = \frac{f(x_k)}{x_k}$$

为已知数据。由此可以得到

$$\text{一差：}\ \Delta_k = y_{k+1} - y_k$$

$$\text{二差：}\ \Delta_k^2 = \Delta_{k+1} - \Delta_k$$

因为构造的函数$f(x)$ 是三次插值函数，所以，二差Δ_k^2 彼此相同，记为Δ_1^2。根据《明史历志》的记录，插值函数$f(x)$ 的各项系数分别为：

$$\text{定差：}\ a = y_1 - (\Delta_1 - \Delta_1^2)$$

$$\text{平差：}\ b = \frac{(\Delta_1 - \Delta_1^2) - (\Delta_1^2/2)}{n}$$

$$\text{平差：}\ c = \frac{\Delta_1^2}{2n^2}$$

段日k	积日kn	积差$f(kn)$	日平差y_k	一差Δ_k	二差Δ_k^2
1	14.82	7058.0250	476.25	−38.45	−1.38
2	29.64	12976.3920	437.80	−39.83	−1.38
3	44.46	17693.7462	397.97	−41.21	−1.38
4	59.28	21148.7328	356.76	−42.59	−1.38
5	74.10	23279.9970	314.17	−43.97	
6	88.92	24026.1840	270.20		

Table 1. The three differences in the Shoushi Calendar (The equation of center of apparent motion of the Sun around the winter solstice);《授时历》三差数据（冬至前后太阳视运动的中心差）

我们以《授时历》太阳视运动中心差为例，将《明史历志》记录的冬至前后的差分表的各项数据，照录在 Table 1 [4, p. 3595–3596]。根据 Table 1 中的数据，按照上面给出的定差a、平差b、立差c的构成，可以立刻得到《授时历》太阳中心差在冬至前后的插值函数。

2.2 《授时历》三次内插法是如何构造出来的？

我们已经看到，《授时历》的三次插值函数 $f(x)$ 是通过降阶，构造一般的二次函数 $y(x)$ 而得到的。这个二次函数与刘焯在其《皇极历》(600) 中创立的二次内插函数的重要差别是，出现了常数项，即定差a。所以，对于郭守敬来说，构造函数 $y(x)$ 的关键，是要确定“定差”

$$a = y_0$$

的意义。

由于《明史历志》仅仅说明了《授时历》三次内插函数的系数构成，并没有告诉我们其

三次内插法的构造过程，所以，清初以来，就不断有学者试图说明《授时历》的构造方法，可谓众说纷纭。[5, 6, 7, 8] 我们根据《天文大成管窥辑要》中记录的一些史料，可以将《授时历》构造三次内插法的方法复原。[9] 现概述如下：

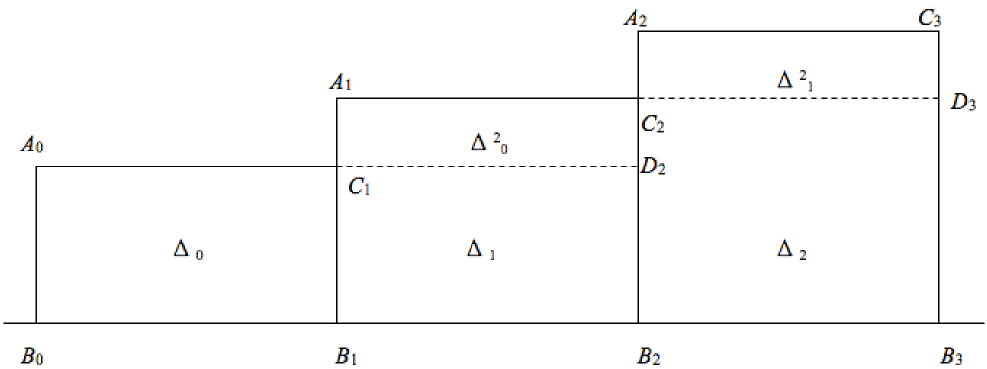

Figure 1. The construction of cubic interpolation in the Shoushi calendar (I);《授时历》三次插值法的构造 (I)

根据假设，当 $k{\geq}1$ 时，已知一差

$$\Delta_k = y_{k+1} - y_k$$

令，$y_0 = a$, $\Delta_0 = y_1 - y_0$, $\Delta_0^2 = \Delta_1 - \Delta_0$, 如 Figure 1 所示，其中，$\Delta_k =$ 矩形A_kB_{k+1}。根据假设，$\forall k \geq 0$，二差

$$\Delta_k^2 = \Delta_{k+1} - \Delta_k$$

彼此相等，是一个常数。由此可知，

$$\Delta_0^2 = \Delta_1^2$$

于是，根据定义，

$$y_1 - y_0 = \Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_0^2 = \Delta_1 - \Delta_1^2$$

即

$$a = y_0 = y_1 - (\Delta_1 - \Delta_1^2)$$

这就是“定差”a 的来源。根据 Figure 1，由于矩形$A_kB_{k+1} = \Delta_k$，容易看出

$$y_1 = a + \Delta_0,$$

$$y_2 = a + \Delta_0 + \Delta_1,$$

$$y_3 = a + \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2$$

根据《天文大成管窥辑要》的提示, [10] 将 Figure 1 的相邻的矩形, “切”成一个大的、等积的梯形, 如 Figure 2 所示。令 $B_0B = x$, 记

$$y(x) = a + G_0B_0BG = a + G_0B_0BF + G_0FG$$

因为

$$G_0B_0B_1F_1 = \Delta_0 - \frac{\Delta_1^2}{2} = (\Delta_1 - \Delta_1^2) - \frac{\Delta_1^2}{2}$$

而

$$G_0B_0B_1F_1 : n = G_0B_0BF : x = b$$

由此即得“平差”

$$b = \frac{(\Delta_1 - \Delta_1^2) - (\Delta_1^2/2)}{n}$$

又,

$$G_0F_1G_1 = \frac{\Delta_1^2}{2}$$

而

$$G_0F_1G_1 : n^2 = G_0FG : x^2 = c$$

由此即得“立差”

$$c = \frac{\Delta_1^2}{2n^2}$$

这就是《授时历》三次内插法的构造过程。由此可见,《授时历》算法的关键, 是对于定差 a 的推算。在定差确定后, 平差 b 和立差 c 可以根据几何图形 (Figure 2), 利用相似形的面积关系得出。

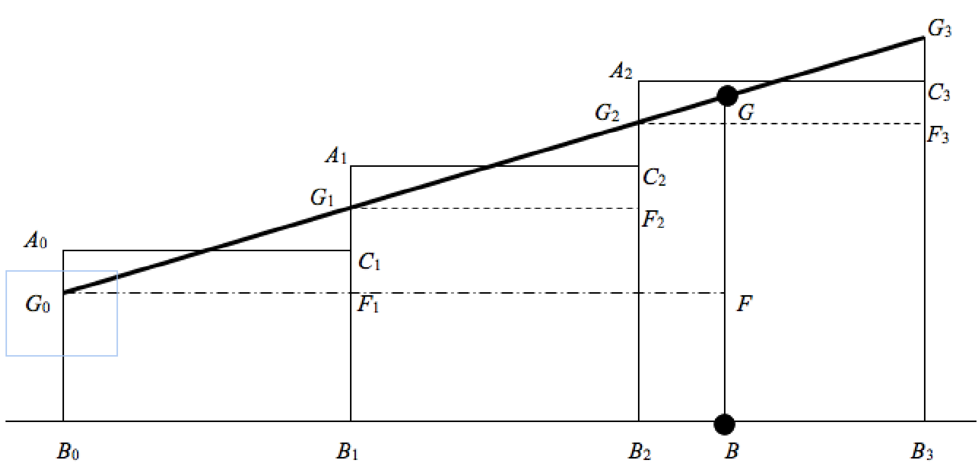

Figure 2. The construction of cubic interpolation in the Shoushi calendar (II);《授时历》三次插值法的构造(II)

2.3 《授时历》内插法的一般化

《授时历》三次内插法的构造，借助了几何图形。如果我们允许代数变换的话，根据《授时历》三次内插法的构造思想，可以将其推广到一般的情形，这样就更容易看出其造术思想的本质是什么。设所求函数为

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

第一步，令

$$y(x) = \frac{f(x)}{x} = a_1 + a_2 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

取 $x_k = km$ 为插值点，若 $k \neq 0$，记

$$y_k = \frac{f(x_k)}{x_k}$$

并且记 $y_0 = a_1$, $\Delta_k = y_{k+1} - y_k$, $\Delta_k^2 = \Delta_{k+1} - \Delta_k$, 一般地, $\forall k \geq 0$ 记

$$\Delta_k^r = \Delta_{k+1}^{r-1} - \Delta_k^{r-1}$$

如果存在 p，使得$\Delta_1^p = \Delta_0^p$，则有

$$a_1 = y_0 = y_1 - \Delta_0 = y_1 - (\Delta_1 - \Delta_0^2) = \cdots = y_1 - \Delta_1 + \Delta_1^2 - \Delta_1^3 + \cdots + (-1)^p \Delta_1^p$$

第二步，令

$$z(x) = \frac{y(x) - a_1}{x} = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots + a_n x^{n-2}$$

若 $k \neq 0$，记

$$z_k = \frac{y_k - a_1}{x_k}$$

并且记 $z_0 = a_2$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $\Delta^2 z_k = \Delta z_{k+1} - \Delta z_k$, 一般地 $\forall k \geq 0$, 记

$$\Delta^r z_k = \Delta^{r-1} z_{k+1} - \Delta^{r-1} z_k$$

如果存在 q，使得$\Delta^q z_1 = \Delta^q z_0$，则有

$$a_2 = z_0 = z_1 - \Delta z_0 = z_1 - (\Delta z_1 - \Delta^2 z_0) = \cdots = z_1 - \Delta z_1 + \Delta^2 z_1 - \cdots + (-1)^q z_1$$

第三步，重复上述步骤，令

$$w(x) = \frac{z(x) - a_2}{x} = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + \cdots + a_n x^{n-3}$$

可以得到系数 a_3。如此往复，即可得到函数 $y(x)$ 的所有系数。

2.4 关孝和的累裁招差法

累裁招差法，是关孝和的创造，记录在其《括要算法》中。[11] 根据前人的研究，累裁招差法的程序，已经非常清楚了。[1, p. 148–150] 与《授时历》一样，关孝和欲构造的插值函数，也是缺少常数项的多项式，形如

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

并且，关孝和也是令

$$y(x) = \frac{f(x)}{x} = a_1 + a_2x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} \tag{1}$$

并通过确定函数 $y(x)$ 系数，得到插值函数 $f(x)$。假设 $x = x_k$ 为插值点。记

$$y_k = y(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

由此，可以构造一个差分表，如 Table 2 所示。

k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\cdots$	$\Delta^{n-1} y_k$
1	y_1	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\frac{\Delta y_3 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$		$\frac{\Delta^{n-2} y_2 - \Delta^{n-2} y_1}{x_n - x_1}$
2	y_2	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2}$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-2$	y_{n-2}	$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$	$\frac{\Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}}{x_n - x_{n-2}}$	$\cdots$	
$n-1$	y_{n-1}	$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$	$\cdots$		
n	y_n	$\cdots$			
$n+1$	y_{n+1}				

Table 2. Seki's defference table; 关孝和累裁差分表

关孝和发现，函数 (1) 的最高次项的系数一定是：

$$a_n = \Delta^{n-1} y_1 = \frac{\Delta^{n-2} y_2 - \Delta^{n-2} y_1}{x_n - x_1}$$

于是，令

$$z(x) = y(x) - a_nx^{n-1} = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-2}$$

则很容易得到

$$z_k = y_k - a_n x_k^{n-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

根据这些插值 z_k，可以构造一个类似 Table 2 的差分表（只需将 Table 2 中的 y 置换为 z），最后得到函数 $z(x)$ 的最高次项的系数 a_{n-1}

$$a_{n-1} = \Delta^{n-2} z_1 = \frac{\Delta^{n-3} z_2 - \Delta^{n-3} z_1}{x_{n-1} - x_1}$$

由此，确定函数（1）的系数 a_{n-1}。重复上述步骤，令

$$w(x) = z(x) - a_{n-1} x^{n-2} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n-3}$$

可以确定系数 a_{n-2}。如此往复，即可得到所求函数 $y(x)$ 的所有系数。这就是关孝和的累裁招差法。

2.5 关孝和是如何构造出累裁招差法的？

关孝和在《括要算法》中利用累裁招差法构造了《授时历》平立定三差，并且在《天文大成管窥辑要》中专门撷取了15 条与历法有关的算法，进行翻译校点，撰成《関訂書》，其中就包含了《授时历》内插法的内容。[12] 因此，三上义夫认为，关孝和的累裁招差法是在研究《天文大成管窥辑要》记录的《授时历》内插法的基础上创造的，[13] 和算史家们也普遍接受了三上义夫的看法。[14]

在和算史家针对关孝和垛积术的大量研究中，基本上倾向于运用现代数学符号，对累裁招差法的构造原理以及关孝和给出的各种“演段”（即具体的算法过程）进行详细的解 说。[15, 16] 这些解说，对于我们理解“什么是累裁招差法”是很有帮助的，不过，要搞清楚“累裁招差法是怎么得到的”，似乎还需要进一步的探究。

由于累裁招差法与《授时历》内插法的种种联系，人们很自然会问：累裁招差法是《授时历》内插法的推广吗？根据上面的讨论可以看到，《授时历》差分Table 1 与累裁招差法的差分Table 2，有着本质的不同。

因此，欲复原累裁招差法的构造思想，关键的问题是，关孝和是如何想到构造差分Table 2 的？

实际上，在《括要算法》的开篇“垛积总术”中，关孝和以“累裁招差之法”为题，明确地阐释了他的算法的构造过程。关孝和说：

> 夫元积之各数参差者，齐之以累裁招差之法求之矣。凡以定积一次相减，各积差得等数者，招平定二差，而依一次相乘之法（古所谓相减相乘之法）求之；到二次相减各积差得等数者，招立平定三差，而依二次相乘之法（古所谓三差之法）求之；到三次相减各积差得等数者，招三乘立平

定四差，而依三次相乘之法求之。皆俟各段得 等数者，而招诸差率求元积也。[1, p. 273]

根据这段文字可以知道，关孝和非常深刻地认识到，所求插值函数的阶数，与差分表的阶数是密切相关的，即：差分表的阶数，决定了插值函数的阶数。而关孝和得到这个深刻的见解，应该来源于他对于二次差分、三次差分的一种归纳。我们不难复原这个过程如下：

首先，如果假设所求函数为

$$y(x) = a_1 + a_2 x \tag{2}$$

令 $x = x_k$ 为插值点，称为第 k 段的"限数"，则已知"定积" y_k 如下：

$$y_k = y(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

根据

$$y_2 - y_1 = (a_1 + a_2 x_2) - (a_1 + a_2 x_1) = a_2(x_2 - x_1)$$

立刻得到函数(2)的最高次项的系数，即"平差" a_2：

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \Delta y_1 \tag{3}$$

这就是《括要算法》"一次相乘演段" 推导"平差" 的过程。

进一步，若假设所求函数为

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \tag{4}$$

同样令 $x = x_k$ 为插值点，称为第k 段"限数"，则已知"定积" y_k 如下：

$$y_k = y(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

于是有

$$y_2 - y_1 = (a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2) - (a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2) = a_2(x_2 - x_1) + a_3(x_2^2 - x_1^2)$$

记

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a_2 + a_3(x_2 + x_1)$$

同理可得

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a_2 + a_3(x_3 + x_2)$$

根据

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = a_3(x_3 - x_1)$$

立刻得到函数(4)的最高次项的系数，即“立差” a_3：

$$a_3 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 y_1. \tag{5}$$

这就是《括要算法》“二次相乘演段”推导“立差”的过程。

根据以上的推理，不难归纳出以下的猜想：设所求函数为

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

令 $x = x_k$ 为插值点，并且记

$$y_k = y(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

则根据(3)与(5)的提示，一定可以得到函数 $y(x)$ 的最高次项的系数 a_n：

$$a_n = \frac{\Delta^{n-2} y_2 - \Delta^{n-2} y_1}{x_n - x_1} = \Delta^{n-1} y_1.$$

由此，即可非常自然地构造出差分Table 2。

累裁招差法的构造思想由两个部分组成：首先，通过对简单情形的分析、归纳，猜测出一般的过程和结果；然后，完全利用代数变换，构造出一个纯粹的机械化的内插法算 法。关孝和之所以能够成功地超越《授时历》的内插法，构造出一个全新的算法，关键的一点是，他能够将内插法的构造，从更加一般的角度抽象成一个纯粹的数学问题，从而利用代数变换，彻底摆脱了对几何图形的依赖。

3 中日内插法之异同

3.1 累裁招差法与《授时历》内插法的构造思想是不同的

《授时历》的内插法，是根据历法问题构造出来的一种算法。关孝和是在研究《天文大成管窥辑要》中记录的这个算法时，创造出来他自己的算法。因此，中日数学家内插法问题的来源是一致的，都是为了构造形如

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

的插值函数。值得注意的是，这个函数缺少常数项，据此，通过降阶，得到新的插值函数：

$$y(x) = \frac{f(x)}{x} = a_1 + a_2 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

然后，依次通过确定函数 $y(x)$ 的系数 a_k，来得到插值函数。

所差异者,《授时历》采用等间距的插值，利用事先给定的差分表，并按照如下次序

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$$

由低到高，确定函数的系数。矣孝和则采用不等间距的插值，每降阶一次，按照相同的方式构造一个差分表，并按照次序

$$a_n \to a_{n-1} \to \cdots \to a_1$$

由高到低，次第确定函数的系数。

郭守敬《授时历》三次内插法的构造，延续了刘焯《皇极历》(600）二次内插法的传统，始终依赖于几何图形解释所构造函数的数理意义，这个事实说明，郭守敬尚未深刻地认识到内插法的本质，因此，无法自觉地利用代数变换的技巧，也就很难发展完善更加一般的内插法。

关孝和在构造这个算法时，娴熟地利用了代数变换，完全超越了利用几何图形解释算法意义的做法。在算法的构造方面，这是一个深刻的飞跃。由此可以看出，关孝和对于内插法的本质有深刻的认识。

3.2 累裁招差法应该称为“关孝和内插法”

很多研究者称《授时历》或者关孝和的内插法是牛顿内插法，实际上这都是不准确的。牛顿插值函数是

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

系数b_i 按下面的方式次递获得：

$$b_i = f_i(x_i) = \frac{f_{i-1}(x_i) - f_{i-1}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

其中，$f_0(x) = f(x)$。确定系数的次序为

$$b_1 \to b_2 \to \cdots \to b_n.$$

牛顿内插法在形式上，与《授时历》三次内插法和关孝和的累裁招差法显然不同。虽然《授时历》与关孝和的算法，都采用了降阶的思想，通过逐次确定插值函数的系数，来构造插值函数，这一点与牛顿内插法是类似的。但是，他们采用降阶的方式是不同的。另外，牛顿内插法确定函数的系数是从低向高，与关孝和相反。

概而言之，累裁招差法本身，堪称一个机械化的、完美的、崭新的算法，与牛顿内插法不同，可以直接称之为“关孝和内插法”。

4 结论

本文以关孝和的累裁招差术为例，讨论了和算家研究这些问题的出发点，研究方式，及其与中国古代数学家的异同之处。根据上面的讨论可以看出，和算家的出发点，都是基于中国传统数理天文学所提出的问题，他们处理这些问题的思想方法与中国古代类似，也是通过设计机械化的程序算法，获得问题的解答。

值得我们深思的是，中算家在设计算法的时候，常常从具体问题出发，依赖于其几何意义的阐述，较少运用代数变换的技巧，因此，不容易洞悉他们所设计的算法的数学本 质，由此便很难抽象、归纳出更加一般的程序算法。与此同时，中国传统的数学家，绝大部分都是带着直接为历法服务的功利性的目的来设计算法的，因此，他们的数学创造，常常是有局限的、适可而止的。这一点，中算家的内插法是一个典型的事例：对于中国古代历法家来说，从使用功能的角度看，基于几何图形构造的分段二次内插法（刘焯，600），或三次内插法（郭守敬，1280），不仅是合理的，而且是充分的。很难，也似乎没有必 要，在此基础上做出新的创造。

与之形成鲜明对比的是，和算家通常都是比较纯粹的数学家，因此，他们的研究较少急功近利的、实用主义的桎梏，导致他们在探索中国传统数学问题的处理方法时，更加关注解决这些问题的算法的数学本质，从而将现实问题抽象为更为一般的数学问题。例如：

对于内插法，关孝和深刻地认识到，通过给定的 n 个插值点 $x = x_k$，就可以确定如下形 式的多项式插值函数：

$$y(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$$

这就是内插法的本质。

将现实问题，抽象为数学问题，是近代科学的一个极为重要的标志。和算家在现实中提取问题，并能超越具体问题的束缚，是和算家在继承中算传统时，能够做出更多深刻 的、创造性的数学成就的主要原因，这也是和算对中国数学传统的最为重要的创新。

作为一个纯粹的数学家，秦九韶在《数书九章》中所设计的中国剩余定理和大衍求一术，都成功地超越了实际问题的限制。可惜，这样的中国数学家并不多见。

吴文俊先生认为，在数学历史的长河中，应该存在着两种交互出现的数学潮流，其一为公理化的逻辑演绎体系，其二为机械化的程序算法体系。后者的典型代表，就是中国传统数学。对于数学史来说，以算法为特征的中国古典数学，是否可以得到深刻而全面的发展，并在适当时机成为数学发展的主流，是一个引人关注的问题。[17]

和算中的许多问题，来源于中国传统的数学与数理天文学，比较17 世纪以来中日

两国数学家在数学领域的继承与创新，是非常有趣的题目。

中国古代数学，在14 世纪以后，基本上停止了发展。在17 世纪(明末清初) 西方科学第一次传入中国的时候，一些数学家开始树立复兴传统数学的旗帜。但是，从清代数学家的表现来看，在继承并发扬中国数学传统方面，似乎并不成功，我们很少看到清代的数学家在机械化算法的设计方面，取得令人赞叹的成就。

与此同时，日本明治之前的数学(和算)，继承了中国古代数学的传统，并且有深刻的发展和创新。和算家的数学实践证明，中国传统数学的思想方法，在代数变换技巧的辅助下，可以在很大程度上，发展出一套完美的机械化的程序算法体系。只要将合适的现实问题，转化为合适的数学问题，机械化的程序算法体系是可以大有作为的。

吴文俊先生自己在数学机械化方面的工作，是现代数学家继承中国传统数学的一次实践。不过，我们确实希望在没有广泛经受西方近代数学侵淫的文化中，可以找到中国传统数学获得继承和发展的实例。

如果说，在人类数学文明的历史上，以机械化算法为特色的数学思想，确曾主导过数学的潮流，并在计算机的时代，有可能再度成为数学家关注的焦点，那么，和算家的数学活动，作为中国数学传统得以延续和发展的一个珍贵的化石，或许可以算是我们必须认真对待和算研究的一个重要的理由。

参考文献

1. The Japan Academy ed., *A History of Japanese Mathematics before Meiji Period*, vol. 2, Tokyo: Linchuan Bookstore, 1979, 148–154. 日本学士院编,「明治前日本数学史(2)」, 东京：临川书店, 1979, 148–154.
2. Feng Lisheng, “On the Structural Principle of the 3-power Interpolation in Shoushi Calendar in View of Seki’s Leicai zhaocha fa”, *Studies in the History of Natural Sciences*, 20(2) (2001), 132–142. 冯立升, “从关孝和的累裁招差法看《授时历》平立定三差法之原”, 自然科学史研究 20(2) (2001), 132–142.
3. Xu Zelin, “Jananese Mathemticians’Inheritance and Development to the Methord of Interpolation in Old China”, Li Di ed., *Studies in the History of Mathematics*, vol. 7, Hohhot, Inner Mongolia University Press, 2001, 124–133. 徐泽林. 和算家对招差法的继承与发展, 李迪, 数学史研究 第七辑, 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 2001, 124–133.
4. China Bookstore ed., *Collected Monographs on Astronomy*, *Music and Calendars from the Dynastic Histories*, vol. 10, Beijing: China Bookstore, 1976, 3595–3620. 中华书局编,「历代天文律历等志汇编(10)」, 北京: 中华书局, 1976, 3595–3620.
5. Huang Zongxi, A Study on the Shoushi Calendar, 1923. (清) 黄宗羲,「授时历故」, 嘉业堂从书本, 1923.
6. Li Yan, *A Study on Interpolations of Chinese Mathematicians*, Beijing: Science Press, 1957, 62–73. 李俨,「中算家的内插法研究」, 北京: 科学出版社, 1957, 62–73.

7. Qian Baocong, *A History of Chinese Mathematics*, Beijing: Science Press, 1964, 189–197. 钱宝琮,「中国数学史」, 北京 : 科学出版社, 1964, 189–197.
8. Qu Anjing, Ji Zhigang & Wang Rongbin, *Explorations on Chinese Mathematical Astronomy*, Xian: Northwest University Press, 1994, 185–200, 309–321. 曲安京, 纪志刚, 王荣彬,「中国古代数理天文学探析」, 西安: 西北大学出版社, 1994, 185–200, 309–321.
9. Qu Anjing, "The Cubic Interpolation in Chinese Mathematical Astronomy", *Studies in the History of Natural Sciences* 15(2) (1996), 131–143. 曲安京, "中国古代历法中的三次内插法", 自然科学史研究 15(2) (1996), 131–143.
10. Huang Ding, *An Outline of a Glimpse of Astronomical Achievements*, vol. 12, Taipei: Photocopy of Laogu Cutural Campany, 1984, 163. (清) 黄鼎,「天文大成管窥辑要(卷12)」, 云林阁刊本, 1653(顺治十年), 台北: 老古文化事业公司影印本, 1984, 163.
11. Hirayama, et al. ed., *Complete Works of Seki Takakazu—General Algorithms*, Osaka: Osaka Education Book Publishing House, 1974, 273–282. 平山諦等编, 関孝和全集 括要算法, 大阪 : 大阪教育图书株式会社, 1974, 273–282.
12. Hirayama, et al. ed., Complete Works of Seki Takakazu—Collected Books by Seki, Osaka: Osaka Education Book Publishing House, 1974, 423–464. 平山諦等编,「関孝和全集　関訂書」, 大阪: 大阪教育图书株式会社, 1974, 423–464.
13. Yoshio Mikami, "Seki Takakazu's Achievements, and Comparison and Relationship with the Algorithm of China and Yanbe of Keihan Area", *Japan Journal* (20)1933, 554–555. 三上義夫, "関孝和の業績と京坂の山家並びに支那の算法との関係及び比較", 東洋学報 20 (1933), 554–555.
14. Tsuchikura, et al. ed., *Invitation to History of Mathematics in East Asia—Collected Works of Fujiwara Matsusaburo on the History of Mathematics*, Sendai: Tohoku University Publishing House, 2007, 57–72. 土倉保等编,「東洋数学史への招待 藤原松三郎数学史論文集」仙台: 東北大学出版会, 2007, 57–72.
15. Takenouchi Osamu, "The Tuoji Methord in Seki's General Algorithm vol.1, 1583, Study of the History of Mathematics", vol. 1546, Kyoto: RIMS of Kyoto University, 2007, 157–162. 竹之内修, "関孝和《括要算法…卷元》垛積術", 数理解析研究所講究録 1546, 京都: 京 都大学数理解析研究所, 2007, 157–162.
16. Ogawa Tsukane, "The Bernoulli Numbers Discovered by Seki Takakazu", 1583, *Study of the History of Mathematics*, vol. 1583, Kyoto: RIMS of Kyoto University, 2008, 1–18. 小川束, "関孝和によるベルヌーィ数の發見", 数理解析研究所講究録(1583), 京都: 京都 大学数理解析研究所, 2008, 1–18.
17. Wu Wentsun, *Mathematics Mechanization*, Beijing: Science Press & Dorrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, 1–66.