한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 3, 583-600, September 2013

무리지수에 대한 교사들의 인식과 오류[1)]

이헌수[2)] · 김영철[3)] · 박영용[4)]

본 연구에서는 무리지수에 대한 현직교사들의 인식과 오류에 대해 조사하기 위하여 K 광역시 관내에 있는 중·고등학교에 재직하고 있는 수학 교사를 대상으로 선정하여 무리지수에 대한 인식과 오류에 대하여 조사하였다. 또한, 무리지수에 대한 현직교사와 예비교사의 인식의 차이를 분석하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 현직교사의 정답률은 문제의 유형에 따라 다르게 나타났다. 둘째, 현직교사들은 논리적으로 판단하기 보다는 직관에 의존하여 판단하였다. 셋째, 현직교사들의 판단의 근거는 밑의 형태보다는 지수의 형태에 의존하여 판단하였다.

주요용어 : 지수법칙의 확장, 무리 지수를 갖는 수, 현직교사, 예비교사, PCK

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

고등학교 학생들은 지수법칙의 확장과 관련하여 정수 지수에서 유리수 지수로 확장을 했을 때 정수에서 유리수 지수로 확장되는 과정을 어려워한다(김정탁, 2009). 그러나 고등학교 교과서에서 지수법칙을 실수로 확장할 때 간단히 $3^{\sqrt{2}}$ 의 예를 들어 설명하고 직관적으로 성립함을 받아들이도록 강요하고 있다. 대부분의 교과서에는 계산기 등을 이용하여 3^1, $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3^{1.414}$, $3^{1.4142}$ 값을 구한 뒤, 이 수들이 일정한 수 $3^{\sqrt{2}}$ 에 가까워진다고 설명하고 있다. 임의의 무리수 x 에 대하여 a^x 을 정의할 수 있으므로 지수를 실수의 범위까지 확장할 수 있다고 기술하면서 학생들에게 지수를 실수로 확장할 때도 지수법칙이 성립함을 직관적으로 받아들이도록 하고 있지만 학생들은 교과과정상 아직 수열의 극한을 학습하지 않아 수열의 극한을 이용하여

---

1) 본 논문은 2012학년도 목포대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음
2) 목포대학교 수학교육과 (leehs@mokpo.ac.kr)
3) 목포대학교 수학교육과 (yckim@mokpo.ac.kr)
4) 목포대학교 수학교육과 (yypark@mokpo.ac.kr), 교신저자

정의한 예에 대해 직관적으로 받아들이기에 다소 무리가 따를 수 있다(이헌수 · 박형빈 · 배강수, 2011). 또한, 교과서에 $2^{\sqrt{2}}$, $유리수^{무리수}$, $무리수^{무리수}$의 값이 유리수인지 무리수인지에 대한 자세한 설명이 없어 학생들은 이 값들이 유리수인지 또는 무리수인지 많은 궁금증을 가지고 있다(이헌수 외, 2011). 이와 관련된 학생들의 질문에 대부분의 교사들은 학생들의 질문에 대하여 알고는 있지만 교과과정 밖의 문제라던가, 교과과정상 이해하기 어려워서 대학가서 배운다하고 하거나 혹은 교사 자신도 그 질문에 대한 명확한 답을 몰라 답변을 회피하곤 한다. 이는 이러한 문제들이 학부 수준 이상의 지식을 요구하는 문제들로 지수법칙의 확장을 대수학이나 해석학 분야에서 다루고 있지만 이와 관련된 문제들을 직접 언급하는 경우가 매우 드물기 때문에 나타나는 현상이라고 생각된다.

한 나라의 교육을 논의할 때 정치, 사회, 문화 등 사회 전반과 관련하여 논의되어야 하겠지만 무엇보다도 실제 교육 현장에서 가장 직접적으로 중요한 역할을 차지하는 교사의 문제가 초점이 되기 때문에 교사의 질이 가장 중요하다(신현용, 2003). 교사는 기본적으로 교직에 대한 인성, 가르치는 교과에 대한 전문적인 지식, 학습자에 대해 이해, 수업 능력과 평가 능력, 학생지도와 학급관리 능력 등이 있어야 한다. 그러나 교사에게 무엇보다도 필요한 능력은 교육현장에서 학생들을 가르칠 때 필요한 담당교과에 대한 전문적인 지식이다(이헌수 외, 2011). Hill, Sleep, Lewis와 Ball(2007)은 교사에게 필요한 지식을 '공통 내용 지식(common content knowledge: CCK)', '특수 내용 지식(specialized content knowledge: SCK)', '내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students: KCS)', '내용과 교수에 대한 지식(knowledge of content and teaching: KCT)'의 네 가지로 구분하였는데 공통내용지식(CCK)은 학습자에게 가르칠 수학을 의미하며, 특수내용지식(SCK)은 학습자에게 직접 가르치지는 않지만 교사가 이해하고 숙지해야 할 수학지식을 의미한다. 학생들이 궁금해 하는 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, $유리수^{무리수}$, $무리수^{무리수}$의 값과 관련한 내용은 교사에게 필요한 지식 중 특수내용지식(SCK)과 관련된 지식이라고 할 수 있다.

지수법칙에 관련된 최근 연구들은 살펴보면, 김노연(2008)과 전우권(2007)은 지수와 관련된 내용을 중심으로 우리나라 교과서와 외국의 교과서를 비교하였고, 성태숙(2010)은 2007 개정 수학과 교육과정의 지수법칙에 관한 중학교와 고등학교 과정의 지도 내용을 분석하였다. 박지현(2007)은 영(0)에 관한 인식과 오류에 관한 연구에서 중학교 영재학생과 예비교사들을 대상으로 0^0에 대한 인식과 오류에 관해 연구하였고, 김동화와 홍우철(2010)은 0^0과 관련된 자료를 토대로 역사적 수학적 분석을 통하여 0^0이 부정형임을 명확히 하고, 현직교사와 수학교육과 학생들을 대상으로 0^0에 대한 교수 실태를 파악하여 0^0에 대한 효과적인 지도방안에 대하여 연구하였다. 이헌수 외(2011)는 지수법칙의 확장에 대한 학생들의 궁금증의 원인을 찾기 위하여 지수법칙의 확장 단원에 대한 고등학교 수학Ⅰ 교과서를 분석하여 지수법칙의 확장에 대한 학생들의 궁금증의 원인과 지수법칙의 실수로의 확장에서 학생들이 자주 많이 갖는 의문인 $2^{\sqrt{2}}$의 값, $유리수^{무리수}$, $무리수^{무리수}$의 값 등과 같은 무리 지수에 대한 예비교사들의 인식과 오류에 대하여 연구하였다. 그러나 지수법칙의 확장과 관련하여 예비교사들의 인식에 대한 연구는 있지만 현직교사들의 인식과 오류와 관련된 연구가 거의 없어 이와 관련된 연구가 필요하다.

따라서 본 연구에서는 지수법칙의 확장과 관련하여 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}의 값 등과 같은 무리지수에 대한 현직교사들의 인식과 오류에 대하여 조사하고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 지수법칙의 확장과 관련하여 무리지수에 대한 현직교사들의 인식과 오류에 대해 연구하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 선정하였다.

(1) 지수법칙의 확장에서 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}의 값에 대한 현직교사들의 인식과 오류는 무엇인가?

(2) 지수법칙의 확장에서 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}의 값에 대한 예비교사와 현직교사의 인식의 차이는 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 수학과 PCK

Shulman(1986)은 교사가 수업에서 교과의 내용을 전달하는 방식은 학자와 다르다는 관점에서 교사가 갖추어야 할 지식을 교수학적 내용지식(Pedagogical Content Knowledge: PCK)이라고 정의하였고, Grossman(1990)은 Shulman의 정의를 확장하여 교사에게 필요한 지식을 일반교수학적 지식, 교과 지식, 교수학적 내용지식과 상황에 대한 지식으로 구분하였다. Hill 등(2007)은 교사에게 필요한 지식을 공통 내용 지식(CCK), 특수 내용 지식(SCK), 내용과 학생에 대한 지식(KCS), 내용과 교수에 대한 지식(KCT)으로 구분하였다.

최승현과 황혜정(2008)은 수학과 PCK 개념을 설정함에 있어서 '내용과 교수법의 화합물'이라는 관점을 가지고 교과 내용을 학생들이 잘 이해할 수 있도록 표현하고 공식화하는 논리(Shulman, 1986; 1987), 교과 내용 지식과 교수법 지식이외에 상황지식을 추가하는 논의(Grossman, 1990), 교과 내용과 함께 학생 이해, 수업 매체 및 과정을 강조한 논의(Marks, 1990), Shulman의 논의를 기초로 교과 내용 지식을 실체적 지식과 구문론적 지식으로 구분한 논의 (Smith, 1999), PCK를 단순히 내용과 교수법의 화합물이 아니라 교과 교사가 교실에서 수행하는 모든 지식과 기술, 즉 교과 수업 전문성으로 확대한 논의(Gess-Newsome, 1999) 등을 일정 부분 수용하여 [그림 1]과 같이 수학과 PCK를 정의하였다. PCK는 교과 내용, 일반 교수법 및 상황에 대한 지식과 신념 등 교사 지식을 구성하는 다른 영역들로부터의 지식이 변형된 결과이다. 이들 영역은 상호 영향을 주고받게 된다. 즉, 교사 지식을 구성하는 다른 영역들의 영향을 받아서 산출된 PCK는 역으로 이들 기초 지식 영역의 발달을 자극하게 된다. PCK를 뒷받침하는 교사 전문 지식의 영역들은 교과별로 다소 다를 수 있지만, 일반적으로 교과 내용 지식, 교수 방법에 대한 지식과 학생에 대한 지식 등이 공통으로 포함된다. 수학과 PCK는 교사가

자신의 교과지식과 교수 경험을 통하여 발전시켜 나가는 것으로, 특정한 수학 내용을 학생들이 이해할 수 있는 방식으로 가르치는 방법에 대한 지식이다. 다시 말하면, 좋은 수업을 하는 수학 교사는 수학과 교육과정과 함께 이를 구현할 수 있는 관련 자원과 기법까지도 파악하여 이를 활용하여 수업을 이끌어가며, 수업에 활용할 수 있는 다양한 수업 자원을 학생들이 학습을 유의미하게 참여할 수 있도록 제공한다. 학생들의 학습을 지원할 수 있는 이러한 자원에 대한 지식과 교과 내용에 관련된 다양한 수업 전략은 교사가 갖추어야 할 수학과 PCK 중 하나이다.

수학과 PCK

수업에에서 교사의 대화 행동, 수업자료 등으로 표상되는 PCK

⬆

수학과 PCK의 1차적 기저

1. 교사 지신의 신념을 포함한 메타 지식
2. 교사 자신의 수업에 관련한 지식
3. 교사 수업진행 상태(활동)에 대한 모니터, 평가, 관리에 대한 지식

⬆

수학과 PCK를 구성하는 기초(배경) 지식

수학과 수업 목표 (교사가 지향하는 수학 교수활동의 목표)	수학 내용 지식	수학과 교수 방법 및 평가에 대한 지식	수학 학습에 대한 학생 이해 지식	수학과 수업 상황에 대한 지식 (제공된 것)
· 수학적 내용 전달 · 수학적 사고력 신장 · 문제해결력 신장 · 수학적 유용성 인식 · 수학의 문화적 가치 및 심미성 추구	· 교육과정 내용 이해 · 수학적 개념 · 수학 내 또는 타교과와의 관계	· 특정의 학습 목표 설정 · 수학적 문제해결 전략 · 수학적 사고력 신장 방법 · 평가 목적 및 방법	· 학생 인지 수준 · 학생의 오개념 파악 · 학생의 난개념 파악	· 수업 자료 재구성
	· 수학적 가치 및 수학적 태도 · 문제해결을 위한 의사결정 · 과정적 지식	· 가치 판단 및 태도 변화 · 교사의 수업 진행 방법 · 교사의 교실행동 변화 진단	· 학생 동기 및 감정 상태 · 주요 학습 방법 · 학생의 수학 학습에 대한 신념 · 학생의 행동 변화 진단	· 학교 및 교실 분위기 · 수업 진단의 크기 및 특성 · 기자재 활용 · 시간분배

[그림 Ⅱ-1] 수학과 PCK의 정의(요소) (최승현 · 황혜정, 2008)

그러나 PCK는 주어진 교과 영역의 모든 교사들이 공유하는 동일한 단 하나의 실체가 아니며, 가르치는 맥락, 내용 및 교사 경험의 영향을 받아서 달라지는 개인 교사별로 고유한 전문성

이다(이화진 외, 2006). 다른 교과도 마찬가지지만, 수학과 PCK가 제대로 구현되고 발현되려면 무엇보다 가르치는 수학 내용에 대하여 정확한 개념적 이해를 갖추고 있어야 한다. 이러한 가르치는 영역에 대한 전문지식은 가르치는 절차, 전략 및 방법에 대한 전문성과 결합하여 수학과 내용 교수법 이라는 혼합물의 수준을 넘어 화합물을 생성해내게 된다(이화진 외, 2006). 즉, PCK는 풍부한 교수법적 지식과 내용 지식의 결합물로써 주어진 맥락에서 학생들이 특정한 수학 내용을 더 잘 이해할 수 있도록 무엇을, 어떻게 가르칠 것인지를 교사가 의도적으로 개발해낸 것이다. 수학과 PCK의 개념은 교사가 학생이 교과 내용을 이해할 수 있도록 교과를 표현하고 구성하는 방법으로, 주제를 표현하는 가장 유용한 형식, 가장 강력한 유추, 실례, 설명, 논증 등을 포함한다. 이런 의미에서 볼 때 수학과 PCK는 내용 전문가인 수학자와 수학 교사를 차별화시키는 교사 전문성의 요체에 해당하는 것으로 사회의 일반 구성원들이 수학교사가 반드시 가지고 있기를 기대하는 전문적 지식이기도 하다.

2. 지수법칙의 확장

지수법칙의 확장에서 학생들이 지수법칙의 실수로의 확장에서 $2^{\sqrt{2}}$, 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수} 등이 유리수인지 무리수인지에 대하여 궁금하여 질문을 하는 경우가 있다(이헌수 외, 2011). $2^{\sqrt{2}}$, π, e, e^{π} 은 초월수라고 밝혀졌지만 아직도 $\pi+e$, πe, π^{e} 등과 같은 많은 수들이 대수적인 수인지 초월수인지 밝혀지지 않았다. 이와 관련된 문제로 1902년 세계수학자 대회에서 Hilbert(1902)는 수학의 미해결 문제인 '$\alpha\,(\neq 1,\ \neq 0)$를 대수적 수라 하고 β를 무리수라고 할 때, α^{β} 는 초월수인가?'라는 문제를 제시하였다. 1943년 Gelfond는 Hilbert 문제를 부분적으로 해결하여 'α 가 대수적 수이고, β 가 무리수인 대수적 수이면 α^{β} 는 초월수이다.'라는 사실을 증명하였다(Courant & Robins, 1996). Gelfond 정리라고 알려져 있는 이 정리에 대한 증명은 Gelfond(1934)와 Schneider(1934)에 의해서 각각 독립적으로 증명되어 Gelfond 정리(Gelfond-Schneider 정리)로 알려져 있다. Gelfond 정리에 의해 $2^{\sqrt{2}}$ 와 e^{π} ($(-1)^{-i}=(e^{i\pi})^{-i}=e^{\pi}$)는 초월수이다. 여기서 Gelfond 정리에 의해 초월수라고 알려진 $2^{\sqrt{2}}$ 를 Gelfond-Schneider 상수, e^{π} 을 Gelfond 상수라고 하는데(Wells, 1986), 각각의 계산 값은 $2^{\sqrt{2}}=2.66514414\cdots$ 와 $e^{\pi}=23.140692632\cdots$ 로 알려져 있다.

학생들이 지수법칙의 실수로의 확장에서 많이 갖는 의문 중에서 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}등이 유리수인지 무리수인지에 대해 살펴보자. Gelfond-Schneider 상수 $2^{\sqrt{2}}$ 와 Gelfond 상수인 e^{π} 는 초월수이므로 무리수이다. 또한, 유리수^{무리수}는 Gelfond 정리로 부터 초월수라는 사실이 증명되었으므로 유리수^{무리수}는 무리수이다. 그러나 무리수^{무리수}는 유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다. 그러나 무리수^{무리수}인 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 은 무리수이다. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 유리수라고 하면 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=r$ 을 만족하는 유리수 r 이 존재한다. 이 식의 양변을 제곱하면 $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$ 즉, $2^{\sqrt{2}}=r^2$. 유리수 r 의 제곱은 유리수이므로 $2^{\sqrt{2}}$ 는 유리수가 되어 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 가 무리수라는 사실에 모순이므로 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 은 무리수이다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

현직교사들의 무리지수에 대한 인식과 오류를 조사하기 위하여 K 광역시 관내에 있는 중·고등학교에 재직하고 있는 수학 교사 51명을 연구대상자로 선정하였다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상자 기초 자료

구분		빈도(명)	백분율(%)	구분		빈도(명)	백분율(%)
학교	중학교	34	66.7	교직경력	5년 미만	24	47.1
	고등학교	17	33.3		5~10년 미만	13	25.5
성별	남	12	23.5		10~15년 미만	10	19.6
	여	39	76.5		15~20년 미만	1	2.0
연령	25~30	19	37.3		20년 이상	3	5.9
	30~35	14	27.5	고등학교 재직경력	없음	22	43.1
	35~40	8	15.7		5년 미만	14	27.5
	40~45	6	11.8		5~10년 미만	9	17.6
	45~	4	7.8		10~15년 미만	1	2.0
학력	학사	28	54.9		15년 이상	5	9.8
	석사(석사과정)	21	41.2				
	박사(박사과정)	2	3.9				

연구대상자의 성별 현황을 살펴보면 남교사가 12명, 여교사가 39명으로 구성되어 있고, 이중 20대가 19명, 30대가 22명, 40대 이상이 10명으로 구성되어 있다. 연구대상자의 교직경력별로 살펴보면, 교직경력 5년 미만이 24명, 5~10년이 13명, 10~15년이 10명, 15년 이상이 4명이고, 29명의 교사는 고등학교 재직경력이 있는 반면에 22명의 교사는 고등학교 재직경력이 없는 교사들이다. 또한, 학력별로 살펴보면 51명의 교사 중 28명은 석사 학위자이고 23명은 석사(과정) 이상의 학위를 소지하고 있다.

2. 연구 방법 및 절차

1) 연구방법

본 연구에서는 무리지수에 대한 현직교사들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 비록 고등학교 교과과정 밖이지만 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 내용으로 설문 문항을 구성한 이헌수 외(2011)의 설문문항을 이용하여 설문조사를 실시하였다. 설문 문항은 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, π^{e}, 유리수$^{\text{무리수}}$, 무리수$^{\text{무리수}}$에 대하여 ① 유리수이다. ② 무리수이다. ③ 유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다. ④ 모르겠다 중 올바른 항목을 선택하도록 하였고, 각 문제에 대하여 그와 같이 답한 이유에 대하여 자신의 생각을 간단히 기술하도록 설문지를 구성하였다.

2) 자료수집 및 분석

(1) 자료수집

지수법칙의 실수로의 확장에 대한 현직교사들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 K 광역시 관내에 있는 중등학교에 재직하고 있는 현직교사를 대상으로 설문조사를 실시하였다. 본 연구자는 연구대상자들에게 직접 설문 조사에 대한 목적과 설문 문항에 대하여 설명하였으며 설문조사는 2012년 9월부터 2012년 12월까지 4개월간 설문조사를 실시하였다.

(2). 자료분석

지수법칙의 실수로의 확장에서 현직교사들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 실시한 현직교사들의 설문 답안을 바탕으로 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 문제인 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} , 유리수^{무리수}와 무리수^{무리수}에 대한 정답률과 오류의 형태에 대하여 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 무리지수에 대한 현직교사들의 인식

1). $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 현직교사들의 인식

$2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 현직교사들의 인식을 조사하기 위하여 $2^{\sqrt{2}}$ 가 유리수인지 무리수인지 판단하라는 질문에 현직교사 51명 중 4(7.8%)명은 유리수라고 응답한 반면 40명(78.8%)은 무리수라고 응답하였다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 현직교사들의 반응

	빈도수	백분율
유리수이다.	4	7.8
무리수이다.	40	78.4
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다	1	2.0
모르겠다.	6	11.8
계	51	100

자신의 답에 대한 이유를 설명하라는 질문에 대해 대부분의 현직교사들은 자신의 답에 대해 논리적으로 설명하지 못하였고, 직관적으로 무리수라고 응답한 현직교사들이 많은 것으로 조사

되었다. 무리수라고 응답한 현직교사를 살펴보면, 무리수라고 응답한 현직교사 40명 중 23명이 직관이라고 응답하였고, 나머지 교사들은 $2^{\sqrt{2}}$ 을 유리수라 가정하고 모순을 유도하거나 로그를 이용하는 등 자신의 답에 대한 근거를 제시하려 하였으나 대부분의 현직교사들은 자신의 답에 대한 명확한 근거를 제시하지는 못하였다(<표 Ⅳ-2>).

<표 Ⅳ-2> $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 반응의 이유

반응	반응 이유
무리수	직관, $\frac{a}{b}$꼴로 나타나지 않음
	$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$, 무리수가 더 많으므로 무리수일 확률이 높다.
	무리수의 거듭제곱이라 직관적으로 무리수
	$\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수이므로
	$2^{\sqrt{2}} = 2^{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{1.414\cdots}$ 이므로
	$\sqrt{2}$가 무리수이므로(지수가 무리수) $2^{\sqrt{2}}$을 $\frac{a}{b}(a, b \in Z)$꼴로 표현할 수 없다.
	$2^{\sqrt{2}}$는 기약분수 $\frac{q}{p}$ 형태로 나타낼 수 없으므로 유리수가 아니므로 무리수
	$2^{\sqrt{2}} = \frac{q}{p}$, $\log_2 \frac{q}{p} = \sqrt{2}$, $\log_2 q - \log_2 p = \sqrt{2}$. 무리수
	귀류법. $2^{\sqrt{2}} = \frac{q}{p}$(유리수)라 가정하면 단, $(p, q) = 1$, $p, q \in N$. $2 = (\frac{q}{p})^{\sqrt{2}}$, $2^2 = ((\frac{q}{p})^{\sqrt{2}})^2 = ((\frac{q}{p})^2)^{\sqrt{2}}$, $\frac{q}{p} \nmid 2$. 모순
	유리수로 정의할 수 없는 실수라 판단된다.
	$2^{\sqrt{2}}$는 초월수임이 알려져 있다. 모든 초월수는 무리수이므로 $2^{\sqrt{2}}$는 무리수이다.
	$2^{\sqrt{2}} = \frac{n}{m}$, $2 = \frac{n^{\sqrt{2}}}{m^{\sqrt{2}}}$, $2m^{\sqrt{2}} = n^{\sqrt{2}}$, $(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} m)^{\sqrt{2}} = n^{\sqrt{2}}$, $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} m = n$, $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{n}{m}$, $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \neq 2^{\sqrt{2}}$. 따라서 $2^{\sqrt{2}}$는 무리수.
유리수	$\sqrt{2}$가 무리수이긴 하지만 2의 거듭제곱이므로 유리수
	$2^{\sqrt{2}} = 2^{2^{\frac{1}{2}}}$ 이므로 유리수

또한 유리수라고 응답한 현직교사 중 자신의 답의 근거로 지수인 $\sqrt{2}$가 무리수이긴 하지만 2의 거듭제곱이므로 유리수라고 응답한 교사도 있었다.

2) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 현직교사들의 인식

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 유리수인지 무리수인지 판단하라는 질문에 정답인 무리수라고 응답한 현직교사가 32(62.7%)명으로 가장 많았고, 모르겠다고 답한 현직교사가 13명(25.5%), 유리수라고 응답한 현직교사가 3명(5.9%)으로 조사되었다(<표 Ⅳ-3>). $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 정답률을 $2^{\sqrt{2}}$ 의 정답률과 비교하면 $2^{\sqrt{2}}$ 의 정답률보다 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률이 더 낮게 나타났음을 알 수 있다(<표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-3>).

<표 Ⅳ-3> $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 현직교사들의 인식

	빈도수	백분율
유리수이다.	3	5.9
무리수이다.	32	62.7
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	3	5.9
모르겠다.	13	25.5
계	51	100

<표 Ⅳ-4> $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 반응의 이유

반응	반응 이유
무리수	$\sqrt{2}$ 가 무리수라는 사실로 부터
	$2^{\sqrt{2}}$ 이 무리수이므로
	1에서 $2^{\sqrt{2}}$ 이 무리수라고 답함. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}$ 유리수라면 모순. 따라서 무리수
	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 이므로 무리수
	$\sqrt{2}$ 의 정의는 제곱하여 2가 되는 수이므로 지수가 2의 배수가 되어야 하는데 $\sqrt{2}$ 는 2의 배수가 아니므로 무리수
	$2\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. 유리수로 정의할 수 없는 실수라 판단된다.
유리수	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{2^{\frac{-1}{2}}}$ 이므로 유리수

자신의 답에 대한 이유를 설명하라는 질문에 대해 무리수라고 응답한 32명중 24명이 직관이라고 응답함으로써 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 조사 결과와 마찬가지로 대부분의 현직교사들은 자신의

답에 대해 논리적으로 설명하지 못하였다. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수라고 응답한 현직교사들은 밑과 지수가 무리수이므로, 밑 $\sqrt{2}$가 무리수이므로 또는 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 유리수라고 가정하고 모순을 유도하여 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수인 이유를 설명하였다.

3) e^{π} 와 π^{e} 에 대한 현직교사들의 인식

e^{π} 와 π^{e} 에 대한 현직교사들의 인식을 알아보기 위하여 e^{π} 와 π^{e} 이 각각 유리수인지 무리수인지 판단하도록 하였고 그 대답에 대한 이유를 설명하도록 하였다. e^{π} 에 대한 질문에 과반수 이상인 33명(64.7%)이 무리수라고 답한 반면에 3명의 교사는 유리수라고 답하였다(<표 Ⅳ-5>). e^{π} 에 대한 정답률을 살펴보면 이전의 질문인 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률과 비슷하게 나타남을 알 수 있는데 이는 현직교사들의 판단한 이유에 대한 '밑 e와 지수 π가 모두 무리수이므로', '초월함수이므로'라고 설명한 교사들이 있었는데 이는 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 와 마찬가지로 e^{π} 도 무리수의 무리수 지수의 형태이므로 이러한 응답을 한 결과로 판단된다.

<표 Ⅳ-5> e^{π} 에 대한 현직교사들의 인식

	빈도수	백분율
유리수이다.	3	5.9
무리수이다.	33	64.7
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	5	9.8
모르겠다.	10	19.6
계	51	100

이러한 결과는 π^{e} 에 대한 질문에서도 e^{π} 의 결과와 유사하게 나타남을 확인할 수 있다. π^{e} 가 무리수라고 응답한 현직교사는 35명(68.6%)인 반면 유리수라고 대답한 교사는 2명(3.9%)로 조사되었다(<표 Ⅳ-6>).

<표 Ⅳ-6> π^{e} 에 대한 현직교사들의 인식

	빈도수	백분율
유리수이다.	2	3.9
무리수이다.	35	68.6
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	5	9.8
모르겠다.	9	17.6
계	51	99.9

4) 유리수의 무리수 지수, 무리수의 무리수 지수에 대한 현직교사들의 오류

유리수의 무리수 지수, 무리수의 무리수 지수에 대한 현직교사들의 인식을 알아보기 위하여 유리수의 무리수 지수, 무리수의 무리수 지수가 ‘유리수이다’, ‘무리수이다’, ‘유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다’, ‘모르겠다’의 4 가지 중에서 하나를 선택하도록 하였다. 먼저 유리수의 무리수 지수에 대한 질문에 대해 무리수라고 응답한 현직교사는 28명(54.9%), 유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다고 응답한 교사는 12명(23.5%)으로 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 가 무리수라고 응답한 교사의 수 40명(78.4%)보다 많이 줄어 정답률에서 많은 차이가 있음을 알 수 있다(<표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-7>). 왜 그렇게 생각하는지에 대한 이유에 대해 무리수라고 대답한 현직교사들의 대부분은 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 에 의해서 유리수의 무리수 지수가 무리수라고 대답하였고, 무리수일 수도 있고 유리수일 수도 있다고 응답한 교사 중 그 이유에 대해 ‘$1^{\sqrt{2}}=1$은 유리수이고 $2^{\sqrt{2}}$는 무리수’라고 답한 교사가 있었는데 이는 지수법칙에서 밑이 1이 아니라는 조건을 간과한 것에서 그와 같은 오류를 범한 것으로 판단된다.

<표 Ⅳ-7> 유리수의 무리수 지수에 대한 현직교사들의 반응

	빈도수	백분율
유리수이다.	5	9.8
무리수이다.	28	54.9
유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다.	12	23.5
모르겠다.	6	11.8
계	51	100

무리수의 무리수 지수에 대한 질문에 대해 유리수라고 응답한 현직교사는 한 명도 없었고, 무리수라고 응답한 현직교사는 20명(39.2%), 그리고 정답인 유리수일수도 있고 무리수 일수도 있다고 대답한 현직교사는 19명(37.3%)로 조사되었다(<표 Ⅳ-8>).

<표 Ⅳ-8> 무리수의 무리수 지수에 대한 현직교사들의 반응

	빈도수	백분율
유리수이다.	0	0.0
무리수이다.	20	39.2
유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다.	19	37.3
모르겠다.	12	23.5
계	51	100

이를 앞의 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} 에 대한 응답률과 비교해 보면 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 무리수라고 응답한 현직교사들의 대부분은 자신의 선택에 대해 앞의 문제인 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} 에 의해서 무리수라고 답하였고, 유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다고 답한 이유에 대해 '$(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4 \in Q$, e^{π}는 무리수' 또는 '$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$인 경우가 있어 유리수일 때도 있으나 대개 무리수'라는 예를 들어 그렇게 답한 이유를 설명한 교사도 있었다.

무리지수에 대한 앞의 결과들을 종합적으로 살펴보면, $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} 에 대한 질문에 대해 현직교사들은 밑이 유리수나 무리수일 때에 무리수라고 응답한 교사들이 많았지만 밑이 무리수일 때와 유리수일 때의 정답률에서는 다소 차이가 있었다. 밑이 무리수인 경우보다 밑이 유리수인 경우에 무리수라고 응답한 교사들의 수가 많았다. 또한, 유리수의 무리수 지수나 무리수의 무리수 지수와 같은 일반화된 질문에 대해서는 밑이 유리수와 무리수일 때 무리수라고 응답한 교사의 수는 많은 차이가 있음을 알 수 있었다. 즉, 밑이 무리수인 경우 보다 유리수인 경우에 무리수라고 응답한 교사들이 더 많음을 알 수 있었다. 따라서 무리지수에 대한 질문에 현직교사들의 선택은 지수의 형태에 따라 달라짐을 알 수 있었다.

2. 무리지수에 대한 현직교사와 예비교사의 인식의 차이

무리지수에 대한 현직교사와 예비교사들의 인식의 차이에 대하여 비교하기 위하여 무리지수에 대한 현직교사들의 앞의 결과들과 이헌수 외(2011)의 무리지수에 대한 예비교사들의 인식에 대한 연구 결과를 인용하여 <표 Ⅳ-9>와 같이 정리하였다. 무리지수에 대한 현직교사와 예비교사의 정답률을 살펴보면 <표 Ⅳ-9>에서 보는 바와 같이 현직교사의 정답률이 예비교사의 정답률보다 약간 더 높은 것을 알 수 있다.

$2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 응답에서 현직교사들의 대부분이 무리수라고 응답한 반면 예비교사들의 경우 절반 정도만 무리수라 응답하였다. 그러나 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 질문의 정답률을 살펴보면 예비교사나 현직교사나 거의 비슷한 것으로 나타났다. $2^{\sqrt{2}}$ 와 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 정답률을 비교하면 현직교사의 경우 $2^{\sqrt{2}}$ 의 정답률이 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률보다 더 높게 나타난 반면 예비교사의 경우 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률이 $2^{\sqrt{2}}$ 의 정답률보다 더 높게 나타났다.

현직 교사와 예비교사들은 $2^{\sqrt{2}}$ 가 무리수인 이유에 대하여 직관적으로 무리수라고 응답한 많았고, 현직교사들은 자신의 답에 대한 근거로 $2^{\sqrt{2}}$ 을 유리수라 가정하고 모순을 유도하려는 시도가 많은 반면에 예비교사들은 로그를 이용하여 자신의 답에 대한 근거를 제시하려고 한 경우가 많았다. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수라고 응답한 예비교사들의 대부분은 밑과 지수가 무리수이므로 또는 밑 $\sqrt{2}$가 무리수이기 때문에 무리수라고 답한 것으로 나타나 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 경우 $2^{\sqrt{2}}$ 와는 달리 밑과 지수 모두 무리수이기 때문에 무리수라고 직관적으로 판단하였다(이헌수 외, 2011). 현직교사들도 예비교사들과 마찬가지로 밑과 지수가 무리수이기 때문에 무리수라고 답하거나

및 $\sqrt{2}$가 무리수이므로 무리수라고 응답한 교사들이 많았으나 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수인 이유에 대해 대부분의 예비교사들이 직관적이라고 반응한 것에 비해 현직교사들은 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 유리수라고 가정하고 모순을 유도하여 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수인 이유를 설명하려고 하였다(<표 Ⅳ-4>).

<표 Ⅳ-9> 무리지수에 대한 현직교사와 예비교사의 반응

		현직교사		예비교사	
		빈도수	백분율	빈도수	백분율
$2^{\sqrt{2}}$	유리수이다.	4	7.8	14	46.7
	무리수이다.	40	78.4	16	53.3
	유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다	1	2.0	0	0.0
	모르겠다.	6	11.8	0	0.0
	계	51	100	30	100
$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$	유리수이다.	3	5.9	5	16.1
	무리수이다.	32	62.7	19	61.3
	유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	3	5.9	3	9.7
	모르겠다.	13	25.5	4	12.9
	계	51	100	30	100
e^{π}	유리수이다.	3	5.9	0.0	0.0
	무리수이다.	33	64.7	18	60.0
	유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	5	9.8	4	13.3
	모르겠다.	10	19.6	8	26.7
	계	51	100	30	100
π^{e}	유리수이다.	2	3.9	2	6.5
	무리수이다.	35	68.6	20	64.5
	유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	5	9.8	2	6.5
	모르겠다.	9	17.6	7	22.6
	계	51	99.9	31	100.1
유리수$^{\text{무리수}}$	유리수이다.	5	9.8	9	29.0
	무리수이다.	28	54.9	12	38.7
	유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다.	12	23.5	4	12.9
	모르겠다.	6	11.8	6	19.4
	계	51	100	31	100
무리수$^{\text{무리수}}$	유리수이다.	0	0.0	0	0.0
	무리수이다.	20	39.2	16	51.6
	유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다.	19	37.3	8	25.8
	모르겠다.	12	23.5	5	16.1
	무응답	0	0.0	2	6.5
	계	51	100	31	100

현직교사와 예비교사들의 e^{π} 에 대한 정답률을 살펴보면 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률과 비슷하게 나타남을 알 수 있다. 이는 현직교사와 예비교사들의 판단한 이유에 대해 밑 e와 지수 π가 모두 무리수이므로, 초월함수이므로 또는 앞의 문제에 대한 또 다른 예에서 라는 답변에서 볼 수 있듯이 e^{π} 도 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 와 마찬가지로 무리수의 무리수 지수의 형태이므로 이러한 결과가 나온 것으로 해석할 수 있다. 이러한 결과는 π^{e} 에 대한 응답에서도 비슷하게 나타나고 있음을 알 수 있다. π^{e} 가 무리수라고 응답한 현직교사와 예비교사들의 응답률을 살펴보면 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 와 e^{π} 의 응답률과 비슷하게 나타났는데 이는 예비교사들과 마찬가지로 현직교사들도 밑과 지수의 형태에 따라 유리수인지 무리수인지 판단했음을 알 수 있다.

유리수^{무리수}와 무리수^{무리수}의 정답률을 살펴보면 예비교사의 정답률보다 현직교사의 정답률이 훨씬 더 높게 나타났고, 예비교사와 현직교사 모두 무리수^{무리수}의 정답률보다 유리수^{무리수}의 정답률이 더 높게 나타났음을 알 수 있다. 유리수^{무리수}에 대한 질문에 유리수라고 응답한 현직교사(9.8%)는 적은 반면, 유리수라고 응답한 예비교사(29.0%)는 상대적으로 많은 것으로 나타났다. 무리수^{무리수}에 대한 질문에서는 유리수라고 응답한 현직교사와 예비교사들은 전혀 없는 반면, 무리수라고 응답한 현직교사의 비율이 예비교사의 비율보다 높게 나타났음을 알 수 있다.

무리지수에 대한 예비교사와 현직교사들의 인식을 종합적으로 살펴보면, $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} 에 대한 예비교사들의 응답에서 볼 수 있듯이 밑이 유리수일 때 유리수라고 응답한 수가 많은 반면, 밑이 무리수일 때는 유리수라고 응답한 예비교사는 전혀 없거나 선택한 사람이 적었고, 무리수라고 응답한 예비교사들은 밑이 유리수나 무리수일 때 거의 비슷한 반응을 보였다. 즉, 무리지수에 대한 질문에 유리수라고 응답한 예비교사들은 밑의 형태에 의존하여 판단하였고, 무리수라고 응답한 예비교사들은 밑의 형태보다는 지수의 형태에 따라 판단하였다(이헌수 외, 2011). 현직교사들은 밑이 유리수일 때 무리수라고 응답한 수가 밑이 무리수일 때 무리수라고 응답한 수 보다 훨씬 많은 반면, 밑이 무리수일 때는 유리수라고 응답한 현직교사는 거의 없어 밑의 형태보다는 지수의 형태에 의존하여 판단하고 있는 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 즉, 무리지수에 대한 질문에 현직교사들의 판단의 근거는 밑의 형태보다는 지수의 형태에 따라 달라짐을 알 수 있었다.

또한, 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}와 같이 일반화된 질문에 대하여 현직교사와 예비교사 모두 밑이 유리수와 무리수일 때 무리수라고 응답한 교사의 수는 많은 차이가 있음을 알 수 있었다. 현직교사의 경우 밑이 유리수일 때 무리수라고 응답한 교사(54.9%)가 무리수일 때 무리수라고 응답한 교사(39.2%)보다 상대적으로 많은 반면, 예비교사의 경우 밑이 무리수일 때 무리수라고 응답한 교사(51.6%)가 무리수일 때 무리수라고 응답한 교사(38.7%)가 상대적으로 많게 나타났다. 따라서 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}와 같이 일반화된 질문에 대하여 현직교사와 예비교사 모두 밑에 의존하여 판단하는 경향을 보였으며 현직교사들은 밑이 유리수일 때 무리수로, 예비교사들은 밑이 무리수일 때 무리수로 판단하는 경향이 있음을 알 수 있었다.

V. 결 론

본 연구에서는 무리지수에 대한 현직교사들의 인식과 오류에 대해 조사하기 위하여 K 광역시 관내에 있는 중·고등학교에 재직하고 있는 수학 교사 51명을 연구대상자로 선정하여 지수법칙의 확장에서 학생들이 자주 많이 갖는 의문인 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, π^{e}, 유리수$^{\text{무리수}}$와 무리수$^{\text{무리수}}$ 등에 대한 인식과 오류에 대하여 조사하였다. 또한, 이헌수 외(2011)의 지수법칙의 확장에 대한 예비교사의 인식에 대한 연구 결과를 이용하여 무리지수에 대한 현직교사와 예비교사의 인식의 차이를 분석하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 무리지수에 대한 현직교사의 정답률은 문제의 유형에 따라 다르게 나타났다. 무리지수와 관련된 문제 중에서 비슷한 유형의 문제인 $2^{\sqrt{2}}$ 와 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 정답률은 각각 78.4%와 62.7%로 나타나 $2^{\sqrt{2}}$ 의 정답률이 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률보다 상대적으로 높게 나타났다. 또 다른 유형의 문제인 e^{π} 와 π^{e} 의 정답률은 64.7%와 9.8%로 극단적인 경향을 보인 반면에 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 와 e^{π} 의 정답률은 비슷하게 나타났다. 또한, 이 문제들의 일반화된 형태인 유리수$^{\text{무리수}}$와 무리수$^{\text{무리수}}$에 대한 정답률은 54.9%와 37.3%로 조사되어 유리수$^{\text{무리수}}$의 정답률이 무리수$^{\text{무리수}}$의 정답률 보다 훨씬 더 높게 나타났다. 현직교사들의 무리지수에 대한 정답률의 경향도 예비교사의 정답률의 경향과 마찬가지로 문제의 유형에 따라 다르게 나타났지만 약간의 차이가 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은 무리지수와 관련된 문제들에 대해 대학교육과정에서 직접 언급하는 경우가 많지 않고 또한, 연구 결과와 같이 각 질문에 대해 직관적으로 판단하는 경향이 있으므로 관련 문제의 이해도 보다는 각 문제에 대한 개인의 직관적인 능력이나 경험이 정답률에 영향을 미쳤을 것이라고 판단된다.

둘째, 현직교사들은 무리지수에 관한 문제에서 논리적으로 판단하기 보다는 직관에 의존하여 판단하였다. 현직 교사들 중 일부는 $2^{\sqrt{2}}$ 와 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수인 이유에 대하여 $2^{\sqrt{2}}$ 와 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 을 유리수라 가정하고 모순을 유도하여 무리수인 이유를 설명하려고 한 경우도 있었지만(<표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-4>), $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 문제에서 무리수라고 응답한 현직교사 40명 중 23명(57.5%)이 자신의 답에 대한 판단의 근거를 직관이라고 응답하였고, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 문제에서 무리수라고 응답한 현직교사 32명중 24명(75.0%)이 직관이라고 응답함으로써 대부분의 현직교사들은 자신의 답에 대해 논리적으로 설명하지 못하였다. 현직교사의 대부분은 무리지수에 관한 문제에서 자신의 답에 대한 근거를 논리적으로 설명하기 보다는 직관적으로 판단하는 경향이 있었다. 현직교사들이 이러한 문제들을 직관적으로 판단하는 이유는 이러한 문제들이 학부수준 이상의 지식을 요구하는 문제들로 학부과정에서 이와 관련된 문제들을 직접 언급하는 경우가 매우 드물기 때문에 나타나는 현상이라고 판단된다.

셋째, 무리지수에 대한 질문에 현직교사들의 판단의 근거는 밑의 형태보다는 지수의 형태에 따라 달라짐을 알 수 있었다. $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, π^{e} 에 대한 현직교사들의 응답에서 밑이 유리수일 때 무리수라고 응답한 현직교사가 밑이 무리수일 때 무리수라고 응답한 현직교사보다 훨

씬 많은 반면, 밑이 무리수일 때는 유리수라고 응답한 현직교사는 거의 없어 밑의 형태보다는 지수의 형태에 의존하여 판단하고 있는 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다.

넷째, 모든 문항에서 현직교사의 정답률이 예비교사의 정답률보다 상대적으로 높게 나타났다. 이는 수학과 PCK와 관련되어 나타나는 현상으로 판단되어진다. PCK는 주어진 교과 영역의 모든 교사들이 공유하는 동일한 단 하나의 실체가 아니라 가르치는 맥락, 내용 및 교사 경험의 영향을 받아서 달라지는 개인 교사별로 고유한 전문성이며 교사가 자신의 교과지식과 교수 경험을 통하여 발전시켜 나가는 지식이다(이화진 외, 2006). 수학과 PCK는 교사가 자신의 교과지식과 교수 경험을 통하여 발전시켜 나가는 것으로 특정한 수학 내용을 학생들이 이해할 수 있는 방식으로 가르치는 방법에 대한 지식이다. 현직교사들은 고등학교 교과서에서 지수법칙의 확장과 관련된 단원을 지도할 때 $2^{\sqrt{2}}$ 또는 $3^{\sqrt{2}}$ 의 예를 들어 설명하면서 지수법칙을 실수로 확장할 수 있다고 지도하고 있다. 이와 같이 지수법칙의 확장에 대한 교수 경험을 통해 형성된 현직교사들의 PCK로 인하여 현직교사의 정답률이 예비교사의 정답률보다 상대적으로 높게 나타난 것으로 판단되어진다.

이와 같은 연구 결과로부터 다음과 같이 제언을 하고자 한다. 교과서나 교사용 지도서의 지수법칙에서 실수 지수로의 확장과 관련된 단원에서 유리수$^{\text{무리수}}$와 무리수$^{\text{무리수}}$가 유리수인지 무리수인지에 대한 언급과 함께 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, π^{e} 등의 예를 첨가할 필요가 있다. 또한, 사범대학에서 교사교육이나 현직교사의 재교육을 실시할 때 무리지수와 관련된 문제들의 증명이 학부수준 이상의 지식을 요구하는 부분들이 있으므로 지수법칙과 관련된 배경지식으로 증명이 없이 예를 들어 설명하거나, 이와 같은 무리지수에 대한 문제들의 직관적인 판단의 허점을 이용하여 추론에 대한 연역적 증명의 필요성을 언급할 때 교수자료로 활용할 수 있다.

참고 문헌

김노연(2008). 지수에 대한 한국과 미국의 수학 교과서 비교 연구. 건국대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

김동화 · 홍우철(2010). 고등학교 수학에서 0^0의 지도 방안. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(2), 283-300.

김정탁(2009). '수학적 사고'의 장으로서의 지수-로그. 아주대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

박지현(2007). 중학교 영재학생과 예비교사의 영(0)에 관한 인식과 오류. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 46(4), 357-369.

성태숙(2010). 중등학교 교육과정에서의 지수법칙 지도방안. 부산대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

신현용(2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(4), 431-452.

이헌수・박형빈・배강수(2011). 무리 지수를 갖는 수에 대한 예비교사들의 인식과 오류. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(2), 323-339.

이화진・오은순・송현정・전효선・강대현・권점례・곽영순・진의남・유정애・이경언・양윤정・이병천・이미숙・김명화・오상철・홍선주(2006). 수업컨설팅 지원 프로그램 및 교과별 내용 교수법(PCK) 개발 연구. 한국교육과정평가원 연구보고 RRI 2006-1.

전우권(2007). 한국과 일본의 수학교과서 비교 연구 : 지수와 관련된 개념을 중심으로. 성균관대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

최승현・황혜정(2008). 수학과 내용 교수 지식(PCK)의 의미 및 분석틀 개발에 관한 연구. 한국학교수학회논문집, 11(4), 569-593.

Courant, R., & Robbins, H.(1996). What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods(2nd Ed). New York: Oxford University Press.

Gelfond, A. O.(1934). Sur le septieme Probleme de D. Hilbert. Comptes Rendus Acad. Sci. URSS Moscou. 2, 1-6.

Gess-Newsome, J.(1999). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. In J. Gess-Newsome, & N. G. Lederman(Eds), Examining pedagogical content knowledge (pp.3-17). Dordrecht : Kluwer.

Grossman, P. L.(1990). The Making of a Teacher: Teacher Knowledge and Teacher Education. Teachers College Press.

Hilbert, D.(1902). Mathematical Problems. Bull. Amer. Math. Soc. 8. 437-479. Hilbert, D. Reprinted in 2000. Bull. Amer. Math. Soc. 37, 407-436.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L.(2007). Assessing teachers′ mathematical knowledge. In F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning(pp.111-155). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Marks, R. 1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. Journal of teacher education, 41(3), 3-11.

Schneider, T.(1934). Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. J. reineangew. Math. 172, 65-69.

Shulman, L.(1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15, 4-14.

Shulman, L.(1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Smith, D. C.(1999). Changing our teaching: The role of pedagogical content knowledge in elementary science. In J. Gess-Newsome, & N. G. Lederman(Eds), Examining pedagogical content knowledge. Norwell, MA: Kluwer Academic Publisher.

Wells, D.(1986). The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Middlesex, England: Penguin Books.

A study on the in-service teacher's recognition and fallacy for irrational exponent[5]

Lee, Heon Soo[6] · Kim, Young Cheol[7] · Park, Yeong Yong[8]

Abstract

In this paper, we study the recognition and fallacy of would-be in-service teachers about numbers with irrational exponent. We chose 51 secondary school teachers who are teaching mathematics in K metropolitan city and investigate their recognition and fallacy about the cases of irrational exponents of a positive rational and irrational exponents of a positive irrational number at the expansion of exponential law. We found following facts. First, in-service teacher's a percentage of correct answers differ depending on the type of numbers with irrational exponent. Second, in-service teachers decide their answer depending on intuition rather than logic. Third, in-service teachers decide their answer depending on exponential rather than base.

Key Words : Expansion of Exponential Law, A Number with Irrational Exponent, In-service Teacher, Pre-service Teacher, PCK

Received August 26, 2013
Revised September 23, 2013
Accepted September 26, 2013

---

5) This paper was supported by Research Funds of Mokpo National University in 2012
6) Dept. of Math. Education, Mokpo National University (leehs@mokpo.ac.kr)
7) Dept. of Math. Education, Mokpo National University (yckim@mokpo.ac.kr)
8) Dept. of Math. Education, Mokpo National University (yypark@mokpo.ac.kr), Corresponding Author