한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 3, 539-560 September 2013

GrafEq를 활용한 디자인 활동에서 나타나는 수학영재아의 사고특성분석

이지원[1)]·신재홍[2)]·이수진[3)]

본 연구의 목적은 고등학교 수학영재 학생들이 GrafEq를 활용한 디자인 활동을 하는 과정에서 나타나는 사고의 특성 알아보고자 함이다. 사전조사를 통해 GrafEq를 사용해 본 경험이 없고, 디자인 활동에 필요한 부등식의 영역을 학습한 과학 고등학교 학생 8명을 선발하여, 2인 1조로 4개의 팀으로 나누어 각각 6차시에 걸쳐 실험을 실시하였다. 연구 결과, 논리적 사고 및 수학적 추상화, 직관적 구조적 통찰, 유연한 사고, 발산적 사고 및 독창성, 패턴의 일반화 및 귀납적 추론과 같은 특성들이 나타났으며, 이를 통해 GrafEq에서의 디자인 활동은 학생들에게 다양한 사고를 자극함으로써 학생들의 인지적인 발달을 촉진시키는데 효과적임을 알 수 있었다.

주요용어 : GrafEq, 수학영재, 사고특성, 도구발생

Ⅰ. 서론

정보화 시대에서 고급 두뇌의 양성은 국가의 경쟁력과 직결되기에 국가적인 차원에서 영재 발굴과 교육에 힘쓰고 있다. 2007년 제 2차 영재교육계획이 시행되면서 영재교육 대상자는 점차 확대되어 가고 있으며, 영재교육에 대한 프로그램 개발에 대한 중요성을 강조하고 그에 따라 다양한 프로그램을 개발·보급하고 있다. 영재 교육 역시 학생들의 잠재력을 충분히 발휘하고, 개개인의 능력에 적합한 교육을 하기 위해서는 우선 그들의 특성을 잘 파악하는 것이 중요한데, 그러한 목적을 달성하기 위한 영재교육 프로그램을 개발하기 위해서는 영재 학생들이 문제해결 과정에서 어떤 특성을 갖고 있는지에 대한 연구도 선결되어야 할 중요한 주제이다(김지원, 2003). 수학영재 학생들은 과제의 특성에 따라서 반응의 양상이 다르게 나타나므로 수학 영재교육 대상 학생의 수준과 능력에 맞게 다양한 유형의 과제를 개발하여 제시할 필요가 있다. 과제가 영재 수준에 비해 어려우면 평소에 자연스럽게 드러나는 사고가 경직되어 영재의 특성이 드러나기가 어렵고, 반대로 쉬우면 복합적인 사고가 드러나지 않기 때문에 영재의 특성을 분석하기가 어렵다. 하지만 영재의 수준은 개개인마다 다르기 때문에 교사가 영재 수준에 맞는 과제를 제시하기 쉽지 않고, 또한 해결방법이 정형

1) 광덕고등학교 (neptune9633@naver.com)
2) 한국교원대학교 (jhshin@knue.ac.kr)
3) 한국교원대학교 (sjlee@knue.ac.kr), 교신저자

화되어 있으면 사고가 다양하게 뻗어나가기에는 어려운 점이 있다(김은혜, 박만구, 2011).

한편 대수식을 익히고 학습하는데 있어 적절한 소프트웨어의 활용은 매우 효과적이다. 일반적으로 교육공학 도구의 활용은 추상적인 수학적 개념을 구체적인 사고와 연결시킬 수 있는 장을 제공하여 형식화된 기호 체계에 대한 대수적 표현을 의미 있게 이해할 수 있게 해주며(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2011), 수학 영재학생들에게도 능동적인 탐구활동을 조장하고 수학적인 개념의 확장이나 사고의 확산에 긍정적인 역할을 함으로서 수학적 창의성을 계발하는데 도움을 줄 수 있다(이헌수, 2011). 그 중에서도 GrafEq는 조작에 의한 결과가 학생에게 곧바로 시각화되어 즉각적인 피드백이 가능한 수학교육용 프로그램으로, 다양한 형식의 그래프와 부등식의 영역을 표현할 수 있는 융통성을 가진 프로그램이다. 특히, GrafEq는 소프트웨어를 통한 디자인 활동을 하는 데 적합한 도구로 수학영재아들이 능동적 활동을 하는 데 도움을 주는데, 여기서 디자인 활동이란 주어진 그림이나 그리고 싶은 그림을 완성하는데 활용할 수 있는 다양한 방법, 즉 다양한 종류의 그래프와 변형 방식 등을 비교·분석한 후 최적의 방법으로 원하는 작품을 완성하는 창의적인 활동을 의미한다. 이러한 디자인 활동은 미국 수학 교사 협의회 (NCTM, 2000)가 강조한 '연결성'의 측면과 맥을 같이 하는 것으로 대수, 기하 등의 수학적 내용간의 내적 연결성뿐만 아니라, 수학이 디자인과 융합되는 외적 연결성을 활용한 활동은 학생들의 종합적인 사고를 요구하고, 수학을 통합된 전체로서 바라보도록 하여 실생활에서 수학의 관련성과 유용성을 인식하도록 한다. 하지만, 수학과 다른 학문과의 연결로 디자인을 사용한 기존 연구(김화경, 2006; 김남희, 2004)를 살펴보면 수학의 언어적 특성과 수학의 심미성, 실용성을 활용하여 디자인을 하는 것이 목적이었고, 학생들의 사고과정에 대한 분석은 거의 이루어지지 않았다. 따라서 본 연구에서는 수학영재 학생들이 GrafEq를 활용한 디자인 활동을 하면서 나타나는 사고특성을 깊이 탐구하고자, 과학 고등학교 학생 8명을 선발, 4개의 팀으로 구성하여 각각 6차시에 걸쳐 사례연구를 실시하였다. 본 연구를 통해 GrafEq 디자인 활동을 통한 수학영재 학생들의 수학적 능력 신장의 가능성을 탐구하고, 더 나아가 수학영재를 위한 교육과정, 교수·학습 자료 및 교육프로그램 개발에 시사점을 줄 수 있을 것이라 기대된다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학영재아의 사고특성

수학영재교육연구의 선구자 중 한 명이라 할 수 있는 Krutetskii(1976)는 수학영재아의 수학적 능력에 관한 13년간에 걸친 연구에서 수학적 사고 과정을 정보 수집, 정보 처리, 정보 파지의 세 가지 과정으로 구분하였고, 각 과정에 속하는 수학적 능력을 조사하였다. 연구결과에서 수학영재아는 사고의 유연성, 문제해결과정에서의 힘과 인내력, 수학적 추론의 가역성 및 사고 과정의 신속함과 자유로운 재구성 등의 특성이 나타났다(김지원, 2003, 재인용). 김홍원, 김명숙, 송상헌(1996)의 연구에 의하면 수학영재는 수학적 사고 능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경 지식을 지니고 있다고 하였으며, 그 중에 수학적 사고능력은 수학적 문제를 이해하고, 기본적으로 요구되는 사고 능력으로 정의하고, 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화 능력, 수학적 추상화 능력, 일반화 적용 능력과 추론 능력, 반성

적 사고 능력으로 분류하여 측정하였다. 수학적 과제집착력은 일정 시간 동안 끈기 있게 수학 문제에 몰두하는 능력이며 수학에 대한 흥미와 태도, 인내심, 지속성, 집중성, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기-신뢰감 등과 관련을 맺는 능력이며, 수학적 창의성은 수학적 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 의미하고 유창성, 융통성, 독창성, 정교성으로 나누어진다. 배경지식은 수학문제를 해결하는데 필요한 수학적 지식과 다른 영역의 지식을 의미한다. 한편, 수학 영재 행동특성에 관한 국내외의 연구를 조사한 연구에서는 수학영재의 수학적 능력과 행동 특성을 일반적인 수학정신 능력, 수학적 능력, 정보수집과 처리 능력, 수학과 연결성, 과제집착력, 의사소통능력, 독립성의 7가지로 나누어 분류하여 분석하기도 하였으며(황동주, 2005), 홍진곤과 강은주(2009)의 연구에서는 중학교 영재 학생과 일반 학생을 대상으로 사고구술법을 통해 수학 영재의 사고 특성을 분석하기도 하였다.

2. 디자인 활동을 통한 수학교육

타 학문과의 통합 교육에 대한 필요성을 살펴보면, 인식론적 측면, 심리적 측면, 사회적 측면에서 살펴볼 수 있는데, 인식론적 측면에서 볼 때, 교과나 지식의 상호 관련성을 강조해야 할 필요성, 인식주체의 반성적 사고의 토대를 넓히기 위한 필요성, 앎의 효율성과 경제성의 측면에서의 필요성이 강조된다. 또한 수학 교과 내용과 미술 교과의 심미적인 측면이 통합된 프로그램은 학생들의 전인적인 발달에 긍정적인 영향을 미친다는 점에서 심리적 측면의 필요성을, 급속도로 변화하는 사회에서 직면하게 되는 여러 가지 문제들을 해결하는 방법은 통합된 다차원적인 지식이 필요하다는 점에서 사회적 측면에서의 필요성을 강조할 수 것이다(장인옥, 2010). 타 학문과의 통합 방법에 관하여 Drake(1993)는 한 교과를 중심으로 학습 내용을 보다 풍부하게 하고 학생들의 관심이나 주변 생활과 연관시킬 수 있도록 다른 교과를 포함시킬 것을 주장하였는데, Drake가 제안한 디자인 활동을 통한 수학교육은 수학을 중심으로 디자인을 연계시킴으로서 학생들이 흥미를 느낄 수 있고 인식론적, 심리적, 사회적 측면에서 중요하다고 주장하였다 (장인옥, 2010에서 재인용). 디자인 활동을 통해 수학적 연결성을 강조한 학습 활동은 학생들이 표상하는 능력의 발달로 수학적 사고 변화에서의 긍정적 효과가 높아지고, 학생들의 표상은 수학적으로 정교해짐에 따라 다양해지고 그 표상들을 생산적으로 사용하는 방법을 알게 된다. 또한 시각적으로 표상하고 논리적 사고, 비판적 사고를 통해 공통적인 요소를 찾아 종합하여 분석하는 과정에서 통합적 사고를 기를 수 있으며(권오남, 정선아, 2012), 특히 대수식을 활용한 디자인 활동은 기하학적 대수적 개념을 이해하는 차원을 넘어 다양한 창의적인 활동과 여러 가지의 지식을 통합적으로 적용 발전시킬 수 있는 기회를 제공하는 역동적인 학습을 가능하게 한다고 할 수 있다. 특히, GrafEq는 중・고등학교는 물론 대학교 Calculus 과정의 모든 관계식(방정식과 부등식 포함)의 그래프를 쉽게 그릴 수 있는 프로그램으로 일차함수, 다항함수, 이차곡선, 삼각함수, 지수함수, 절댓값을 포함하는 관계식 등을 포함하고 있다. GrafEq를 활용하면 여러 함수의 그래프를 동시에 시각화하여 이해할 수 있으므로 함수의 다양한 성질을 이해하는 데 도움이 될 뿐만 아니라 부등식의 영역을 색칠해 주는 기능을 활용하여 다양한 탐구학습을 가능하게 해 준다. 김남희 (2005b)는 또한 7~9단계 단계의 교과서 분석을 바탕으로 한 수학디자인 활동이 예비수학교사들로 하여금 각 단계 수학 학습내용을 계통에 따라 분석하고 이해하는 데 도움이 되었음을 보여주었고, 결론적으로 GrafEq 프로그램은 초·중등 학생들의 수학학습 뿐만 아니

라 이들을 가르쳐야할 예비수학교사들에게도 의미 있는 문제해결 경험을 제공하고 더 나아가 학교수학의 내용을 통합적으로 이해하게 하는 학습 환경을 제공할 수 있음을 보여주었다.

3. 공학도구와 수학교육

1) 공학도구의 특성과 역할

수학적 활동 맥락에서 공학도구의 특성을 분류하기 위해 Zbiek, Heid, Blume, & Dick (2007)은 학습을 위해 기회 또는 장애물을 제공하는 방식과 관련하여 표상의 외적표현(externalized representation), 수학적 충실도(mathematical fidelity), 인지적 충실도(cognitive fidelity)로 나누어 제시하였다. 공학도구는 외적으로 표현된 표상을 통해 시각적으로 자신의 활동을 확인함으로서 인지적 갈등을 드러내는 기회를 제공한다. 공학도구는 학생의 명령에 따라 특정한 수학적 행동이나 절차를 수행하기 위해 사용자의 대리인(user agent)으로서 행동할 수 있다 (Kaput, 1992). 외적인 표상에 대해 수학적으로 의미가 있도록 행동하게 하며, 또한 학생이 선택한 행동에 명확하게 수학적으로 의미 있는 행동의 결과로 반응할 수 있다. 그리고 한 표상에 취해진 행동이 또 다른 표상에 자동적으로 반영되는 두 가지 표상사이의 역동적인 연결(hot link)이 가능하기 때문에 학생들은 즉각적으로 피드백이 가능하다. 또한 공학도구에 의해 외적으로 표현된 표상은 수학적 속성을 충실히 반영해야 한다. 수학적 속성, 관습, 행동이 얼마나 정확하게 반영되었는지의 정도를 수학적 충실도(Mathematical fidelity)의 수치라고 하는데 (Dick, 2007), Dick은 다시 수학적 충실도의 결핍이 나타날 수 있는 영역을 세 가지(연장과 수학적 언어의 차이, 수학적 구조에서의 불충분한 설명(underspecification), 이산적인 구조와 한정된 수계산 정밀성으로 인한 연속적인 현상을 표현하는데 있어서의 한계)로 나누었다. 인지적 충실도(cognitive fidelity)는 수학적 활동에 참여하는 동안 학습자의 사고과정이나 전략 선택을 도구가 얼마나 충실하게 반영하는가에 대한 정도로 사용자의 사고에 따라 도구로 외적표현을 했을 때 그 둘 사이의 일치정도를 반영하는 것이다. 한편 공학도구는 증폭자(amplifier)와 재조직자(reorganizer)의 역할을 모두 잠재적으로 가지고 있는데, 증폭자로서의 역할은 학생들이 개념이나 원리를 폭넓게 이해하고 더 빠르게 당면 과제를 수행할 수 있도록 돕는 것이고, 재조직자로서의 역할은 수학적 지식에 대한 인식 및 학습내용 자체의 변화를 초래하여, 교육과정의 근본 속성과 배열을 변화시키는 것이다 (Pea, 1987, Drijvers, Kieran, & Mariotti, 2010, 재인용).

2) 학습자와 공학도구의 관계

Lagrange, Artigue, Laborde, & Trouche(2001)는 활동과 지식을 구성하는 데 있어서 연장(tool)의 영향력을 대상(perception)과 개념화(conceptualization)사이의 변증법적인 관계 속에서 발생 · 발전하는 것으로 보았다. 이러한 공학의 도구적 접근은 인공물(artifact) 또는 연장(tool)과, 도구(instrument)를 구별하는데, 인공물 또는 연장은 사용자와 관련이 없는 즉 사용되기 전의 객관적 상태와 관련이 있는 반면, 도구는 사용자에 의한 연장의 정신적 구성과 관련 있다. 도구는 복잡한 도구발생 속에서 연장으로부터 만들어지고, 수학적 활동과 사고를

형성한다. 도구적 접근의 핵심은 연장이나 인공물 '그 자체'가 자동적으로 매개적인 도구(instrument)가 되는 것은 아니라는 것이다. 연장은 자동적으로 사용자의 매개자 역할을 하지 않으며, 사용자는 연장의 능력을 이해하고 연장와의 관계를 발전시키는 것이 필요하다(Zbiek et al., 2007). Artigue(2002)는 개인적, 사회적인 관점에서 도구의 발달에 주목했고 도구는 연장과 인지적 스킴의 합인 혼합된 전체라고 했다. 또한 도구는 수학적 지식의 인지나 구성에서 중재 역할을 강조하며, 수학적 지식, 학습자, 도구와의 상호작용과 관계가 깊다(김부윤, 이지성, 2008, 재인용).

Trouche(2003)는 도구를 학습자가 주어진 연장으로부터 도구발생(instrumental genesis)이라는 긴 과정을 통해 만들어 낸 결과물로 보았는데, 도구발생(instrumental genesis)이란 연장 사용을 수학적으로 의미 있게 사용하는 방법으로 발달하는 과정, 즉 연장을 도구가 되게 하는 과정이다. 수학교육에서 도구발생의 핵심은 공학의 수학 구현 메커니즘을 이해하고 학습자가 자신의 목적을 위해 그것을 사용할 수 있는 것이다(Zbiek et al., 2007). 도구발생은 시간을 요하는 복잡한 과정이며, 지식을 구성하는 과정에서 학습자와 연장과의 상호 변환에 관련되고, 연장은 과제를 해결할 수 있도록 도와주면서 중재를 담당하는데, 이때 연장이나 인공물의 사용가능성이 어떻게 유용하고 의미심장한 도구의 발달을 이끄는가는 주요 관심사가 된다.

Guin & Trouche(1999)는 공학도구를 사용하는 데 있어 학생들의 행동방식(work method)을 5가지로 분류하였는데, 무작위 행동방식(random work method), 기계적 행동방식(mechanical work method), 풍부한 행동방식(resourceful work method), 이성적 행동방식(rational work method), 이론적인 행동방식(theoretical work method)으로 나누었다. 학생들의 행동방식은 하나로 나타나지 않고 도구장착 과정동안 자주 나타난다. 무작위 행동방식은 아무런 분석 없이 숫자를 임의적으로 집어넣어 그림에 맞는 형태를 찾는 방식이다. 시행착오가 많고 결과에 대한 증명은 없다. 예를 들면 회피성 전략(avoidance strategies), 정보에 대한 분석 없이 휙 지나가는 잽핑(zapping) 등의 행동이 나타난다. 기계적 행동방식은 근원적인 수학적 구조를 확인하기 보다는 다양한 예를 통한 규칙을 찾는 방식으로 주로 조사를 통해 이루어진다. 풍부한 행동방식은 다양한 자료를 통해 자신의 생각과 소프트웨어의 결과가 일관성을 가지도록 관찰하고 분석하는 방식으로 주로 비교를 통해 이루어진다. 이성적 행동방식은 소프트웨어를 거의 사용하지 않고 주로 지필환경(종이와 펜)에 의존하는 행동방식이다. 이론적 행동방식은 조사나 비교보다는 주로 해석을 통해 이해하는 방식이다. 이론적 행동방식은 공학도구나 펜보다는 주로 자신의 지식에 의존하여 추정을 통해 결론을 내린다(Zbiek et al., 2007, 재인용). 이러한 도구적 접근은 학생과 기술공학적 환경 사이의 상호작용을 탐구할 수 있는 이론적 틀을 제공한다고 할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 결과보다는 활동과정에서 드러나는 현상을 깊이 탐구하는데 초점을 맞추고 있

으므로, 사례연구를 연구방법으로 채택하고, 필요한 가장 많은 정보를 얻어 의도한 연구주제에 관련한 주요한 현상들을 발견하고 이해하며 통찰력을 얻을 수 있는 의도적인 표본 선정(Merriam, 1998)에 의해 연구 대상을 선정하였다. GrafEq를 활용한 디자인 활동에서 나타나는 수학영재아의 사고 특성과 도구발생의 차이를 분석하는 연구의 목적을 고려하여, 여러 과학 고등학교 학생들을 대상으로 연구에 참여하고자 하는 희망자 가운데 사전조사를 통해, GrafEq를 사용해 보거나 대수식을 이용해 디자인을 해 본 경험이 없고, 디자인 활동에서 필요한 부등식의 영역을 학습한 8명을 연구 대상으로 최종 선발하였다. 선발된 과학 고등학교 학생들은 영재교육을 받는 학생들로서 소정의 치열한 다단계 선발과정을 거쳤기 때문에 수학영재아로 보아도 무리가 없을 것으로 판단했다. 또한, 수학영재아들의 활발한 의사소통과 디자인에 맞는 대수식을 찾는 활동이 효율적으로 이루어지게 하기 위해 2인 1조를 이루어 4개의 팀으로 실험을 실시하였다. 조를 구성하는 데에는 여러 가지 기준들(친분관계, 배경지식, 유사성 등)이 있지만, 수학영재아들의 활발한 의사소통은 친분도과 관련(조영창, 2012)있으므로 본 연구에서는 예비조사를 통해 친분관계와 배경지식을 고려해서 팀을 결정했다. 또한 대수식을 이용한 디자인 활동을 해야 하기 때문에 대수식을 얼마나 알고 있는지가 중요한 요인이 되는데, 학습 진도만 점검하는 것만으로는 학생들의 대수식에 대한 지식 정도를 정확하게 알지 못하기 때문에 사전검사를 통해 대수식의 활용에 대한 관련 수학지식을 확인하였다. 참여 학생 8명 모두 수학-수학1-수학2-적분과 통계-기하와 벡터의 순으로 배우고 있었다. 2팀과 3팀은 같은 과학 고등학교 학생이었고 같은 학년이지만 1팀과 4팀은 다른 과학 고등학교 학생이었다. 2팀과 3팀은 배운 정도가 비슷하고 수학 점수의 차가 서로 크지 않았다.

2. 연구 설계 및 과제

디자인 활동은 50분을 1차시로 하여 총 6차시로 계획되었다. 본 연구를 위한 예비실험으로 2012년 7월 초 과학 고등학교 학생 중 2명을 대상으로 디자인 활동을 실시하였고, 이를 통해 연구 대상의 수준에 맞도록 과제를 수정・보완하였다. 본 실험은 과학 고등학교 학생들을 대상으로 7월 말에 시작하여 약 2주에 걸쳐 실험을 실시하였는데, 각 조별로 노트북을 이용하여 실험이 진행되었으며 2차시까지 공통과제를 수행하고 3차시부터 공동으로 하나의 주제를 정하고 디자인을 상호 협동적으로 만드는 활동인 창작과제를 진행하였다 (<표 Ⅲ-1> 참고). 본 논문의 주 저자가 디자인 활동을 진행하는 교사로 참여하였으나, GrafEq의 사용법 정도만 간단하게 언급하고 참여 학생들에게 필요한 수학적 지식을 간단하게 설명하는 등의 개입의 정도를 최소화 하였다. 따라서 구성이 완성되어야 과제가 끝나고 그 다음 과제가 진행되는 활동 방식으로 인해 실제 차시별로 소요된 시간은 팀별로 달랐으며, 특히 창작과제를 할 때는 과제집착력과 난이도에 따라 소요 시간에 큰 차이가 있었다.

<표 Ⅲ-1> 활동단계

단계	활동과정
도입	1차시 초반에 전체적인 과정에 대한 개요를 설명하고 GrafEq에 대한 사용법을 개략적으로 설명한다.
공통 과제	1차시 중반부터 2차시까지 소집단별로 협동하여 GrafEq을 통해 필요한 그래프를 설계하여 대수식을 활용하여 주어진 과제인 ‘나비’, ‘금연’, ‘태극기’를 그린다.
창작 과제	3~6차시에 소집단별로 주제를 정하고 어떤 디자인을, 어떤 그래프로 그릴 것인지 정하고, GrafEq를 통해 필요한 그래프를 설계하여 디자인을 구성해 나가면서 대수식을 수정・보완한다.

공통과제인 나비(김남희, 2005a)는 직선의 방정식과 원의 방정식을 활용해 간단하게 디자인할 수 있다. 처음에는 방정식을 이용해서 디자인을 하지만 부등식의 필요성을 느끼고 부등식의 개념을 이해하면서 작품을 완성할 수 있다. 두 번째 공통과제인 금연(김남희, 박경미, 2008)은 범위에만 주의하면 쉽게 그릴 수 있는 과제로, 담배 연기 모양을 삼각함수의 역함수로 그려야 하므로 삼각함수의 역함수의 진폭과 주기를 변화시키는 과정에서 새로운 수학 지식을 얻을 수 있으며, ‘담배’를 그릴 때 범위를 지정해야 하므로 이 과정에서 다양한 시도와 방법을 유도할 수 있다. 마지막 공통과제인 태극기(김남희, 박경미, 2008)에서는 원의 방정식이나 삼각함수를 이용해 태극 문양을 그릴 수 있지만, 태극 문양을 이룬 원의 적절한 기울기를 찾는 작업과 함수식을 설정하는 것에 수학지식이 필요하다. 네 가지 괘를 그릴 때에도 다양한 방법을 시도될 수 있으며, 다양한 대수식을 구성할 수 있다 ([그림 III-1] 참고).

[그림 III-1] 공통 과제 (나비, 금연, 태극기)

창작 과제활동은 GrafEq를 학생들이 비교적 자유자재로 다룰 줄 알게 된 뒤, 수학 디자인을 학생들이 스스로 구성하는 활동이다. GrafEq에서 수식으로 그래프를 표현하여 자신만의 디자인을 구성하는 활동은 중・고등학교에서 배운 수학의 내용을 종합적으로 다루어 볼 수 있는 학습의 기회를 제공할 수 있다. 단순히 수식을 익혀서 기억하고, 문제에 적합한 해를 구하는 학습에서 더 나아가 스스로 필요한 수식을 찾아서 적절히 표현하고, 결과에 의한 피

드백을 통해 처음의 수식을 수정해 나가면서 문제해결의 적합한 수식을 구성하는 활동은 학생들에게 흥미로운 작업 이상의 의미를 갖는다. 이러한 활동에서는 수학교육에서 강조하는 수학적 연결성, 의사소통, 문제해결, 추론에 관한 수학적 능력이 신장될 수 있는 학습의 기회가 제공된다(김남희, 2005a). 학생들은 스스로 디자인 작품을 구상하는 것을 대부분 어려워하지만 자신들의 수준에 맞게 그림을 조절하고 관계식을 찾아가면서 필요한 새로운 지식과 기술을 능동적으로 탐색하고 습득하게 된다. 또한 자기주도적인 학습을 선호하면서 도전 과제에 집착하는 성향을 지닌 영재 학생들의 정의적인 요소와 부합하게 된다.

3. 자료 수집 및 분석

컴퓨터상에서 이루어지는 학생들의 활동은 Camtasia studio 7을 이용하여 녹화되었고, 학생들 간의 상호 작용 과정에서 드러나는 사고방식 및 표현들을 분석하기 위해 별도의 비디오 녹화를 통해 자료가 수집되었다. 본 연구에서는 홍진곤과 강은주(2009)의 연구에서 개발된 분석틀을 중심으로 하되, Krutetskii(1976), 김홍원 외(1996), 황동주(2005)의 연구를 참고하고 수정하여 자료 분석을 위한 분석틀로 마련하였고, 구체적인 분석틀은 다음과 같다.

<표 III-2 > 수학 영재아의 사고특성 분석틀

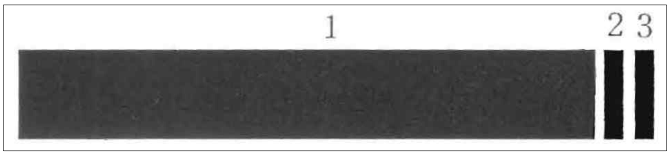
구분	특징
논리적 사고 및 수학적 추상화	수학적 개념, 과정의 해를 언어적으로 잘 표현하고 대수적 조작을 수행하는 능력, 즉 복잡한 문자식을 변형하고, 변수의 분리와 조절의 형식적 조작, 추상적 사고력을 수행하는 능력
직관적, 구조적 통찰	주어진 정보들 사이의 관계나 구조의 핵심을 직감적으로 파악해 내며, 해결의 결정적 단서를 순간적으로 떠오르게 하는 사고이며, 번뜩이는 통찰력의 경험, 새로운 자료의 빠른 파악, 자료를 체계화하는 능력
유연한 사고	패턴화된 정형화된 해법에서 벗어나 자기 제한을 극복하여 하나의 정신 조작에서 또 다른 정신 조작으로의 쉽고도 자유로운 전환을 하는 사고
발산적 사고 및 독창성	문제 해결의 목표가 해답의 산출에 있지 않고 다양하고 독창적인 또는 심지어 엉뚱한 아이디어를 제안하는 사고
패턴의 일반화 및 귀납적 추론	어떤 문제를 해결하고자 하나 그 해결 방법을 몰라서 해결이 불가능할 때, 특수한 사례들로부터 추상적 일반 법칙을 도출하는 추론이며 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화, 패턴의 차이와 유사성을 쉽게 파악하는 능력

Ⅳ. 디자인 활동에서 나타나는 수학영재아의 사고특성

1. 논리적 사고 및 수학적 추상화

논리적인 사고능력과 패턴과 사고의 추상화는 수학 영재들이 보여주는 두드러진 사고특성이라 할 수 있다. GrafEq 환경에서는 관계식을 여러 개의 조건식으로 구성할 수 있고, 조건식의 관계를 통해 식의 효율적 선택과 표현형식의 완성도를 높일 수 있으므로, 조건식 사이의 관계에 대한 GrafEq 사용자의 논리적 사고가 요구된다. 본 연구에서 수학영재아들은 디자인에 맞는 관계식을 찾는 과정에서 각각의 그림에 맞는 관계식만을 찾는 것이 아니라 좀 더 핵심적인 아이디어에 집중하여 그림의 관계성을 생각하고 관계식을 간략하게 찾으려고 시도하는 면을 보였다. 다양한 수학적 지식을 생각해 보고 전체와 핵심, 패턴과의 관계를 파악하여 보다 단순하고 합리적인 관계식을 찾으려고 노력하였고, 관계식을 줄이는 과정에서 수식들 사이의 관계를 논리적으로 파악하고 대수적 조작을 수행하는 수학적 추상화가 나타났다.

GrafEq를 실행하면 자동으로 수식 창이 나타나는데 수식 창은 관계식에 대한 대수적 표현을 입력하는 곳이다. 조건식을 추가할 때는 Tab 키를 사용하고, Enter 키를 누르면, 관계식을 이루는 조건식들을 모두 만족하는 그래프가 그려진다. [그래프] 메뉴에 있는 새 관계식을 선택하면 수식 창을 추가할 수도 있다. 관계식을 줄이는 데 집합기호와 if는 유용하다. 집합기호와 if는 합집합 개념으로 여러 가지 식을 한꺼번에 표현하고 싶을 때 주로 사용한다. 특히 if를 이용하면 구간별로 나누어진 그래프를 그릴 수 있기 때문에 관계식의 수를 줄일 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] 금연과제의 '담배'

다음 발췌문은 3팀이 if를 사용하여 금연과제의 '담배'인 [그림 Ⅳ-1]을 그리는 과정의 일부이다.

발췌문1 : 금연과제의 '담배'-3팀[4]
-7<x<7;[5]-1<y<1 (I)
-7<x<7;-0.7<y<0.7 (I)
-7<x<5;-0.5<y<0.5;5.6<x<6; 6.5<x<7 (D)
3A : 왜 그러지? 아, and 관계이지? [막대기 세 개를]6) 한꺼번에 그릴 수 없나?

---

4) 이후 발췌문에서 'I(identify)'는 학생들이 관계식을 완성한 후 Enter를 쳐서 의도했던 바대로 그림을 확인함을 의미하며, 'D(disappear)'는 화면에 그림이 나타나지 않는 경우, 'E(error)'는 원래 의도했던 그림이 아닌 다른 그림이 나타남을 의미한다.
5) 실제로 GrafEq에서는' ;' 대신에 Tab키를 쳐서 조건식을 추가한다.
6) ( )안의 표현은 연구참여자의 행위에 대한 기술이며, [ ]안의 표현은 연구자 관점에서 맥락에 맞게

3B : 집합을 이용하는 건 어때?
a<x<b;-0.5<y<0.5;(a,b)={(-7,5),(5.5,6),(6.5,7)} (E, 표기 오류)
3A : 이렇게는 못 쓰나?
3B : 그거는 인식하지 못하는 것 같아. 아까 봤던 if로 써 보자.
-0.5<y<0.5;a<x<{5 if a=-7 (E, 괄호 오류)
-0.5<y<0.5;a<x<{5 if a=-7 ;a={-7,5.5,6.5} (E)
-0.5<y<0.5;a<x<{5 if a=-7, 6 if a=5.5 , 7 if a=6.5 ;a={-7, 5.5, 6.5} (E)
3B : 괄호를 닫아야 하는 것 같아.
-0.5<y<0.5;a<x<{5 if a=-7, 6 if a=5.5 , 7 if a=6.5}; a={-7, 5.5, 6.5} (I)
-0.5<y<0.5;a<x<{6 if a=-7, 6.5 if a=6.25 , 7 if a=6.75}; a={-7,5. 6.25, 6.75} (I)

우선 가장 왼쪽에 있는 직사각형의 크기를 수정하였고, 세 개의 관계식으로 쓰지 않고 식을 단축하기 위해 다양한 시도를 하였는데, Tab키 명령어로 연결된 조건식을 합집합 개념으로 생각하여 시도했지만 곧 오류의 원인을 깨닫고 다른 방법을 시도했다. 지필환경에서 쓸 수 있는 형식의 문자와 집합기호를 배열해서 나타내려고 했지만, GrafEq에서 인식하지 못하는 명령이므로 if문을 이용하여 관계식을 완성했다. 즉, 3개의 그림이 합집합이라는 개념을 깨닫고 if를 이용하여 문자를 활용한 대수적 조작을 수행한 것이다. 도구 활용은 연관 있는 키를 찾아내고 선택하는 단계, 연장을 자신의 손에 맞게 조절하는 개별화 단계, 그리고 종종 기획자가 의도하지 않은 방향으로 진행되기도 하는 연장의 변형 단계로 나눌 수 있는데, 3팀은 자신에 맞게 조절하는 개별화 과정을 거친 것이라고 할 수 있다. 4팀 역시 금연과제의 '담배'를 그리기 위해 if를 사용했지만 가우스 함수를 이용해서 논리적 사고를 통해 수식을 더욱 정교화 했다. 4팀은 if를 사용해 관계식을 찾은 후에도 그 역시도 길다고 생각하여 더 줄일 방법을 생각해 보았고 결국 가우스 함수를 떠올릴 수 있었다. 이는 관계식에서 사용한 수가 일정한 간격으로 0.5씩 떨어져 있어 나머지가 일정함을 이용하여 식을 구성할 생각을 떠올린 것이다. 간격이 다른 1번 그림은 그대로 두고 2, 3번의 그림을 동시에 그리려고 시도했으나, 시각적으로 오류를 확인한 후, 논리적 사고를 통한 대수적 조작을 통하여 검은색이 나타나는 부분은 정수를 뺀 나머지가 0.5보다 큰 구간임을 인지하고 관계식을 완성하였다.

한편, 1팀은 다른 팀과 달리 부등식을 이용해 식을 간략화하고 '담배'를 그렸다.

<u>발췌문2 : 금연과제의 '담배'- 1팀</u>
-1<y<1 (I)
…중략…
-0.7<y<0.7;-8<x<7;7.3<x<7.6 (D)
1A : 아, 공통범위니까
-0.7<y<0.7;-8<x<7 or
1A : or는 안 먹히나?
1B : 부등식을 이용해 볼까?
-0.7<y<0.7;(x+8)(x-8)<0 (I)

해석, 보충한 것이다.

…중략…
-0.7<y<0.7;(x+8)(x-8)<0;(x-7)(x-7.3)<0 (I)
1B : 왼쪽 범위도 필요해.
-0.7<y<0.7;(x+8)(x-8)<0;(x-7)(x-7.3)(x-7.6)<0 (I)
1A : 되네. 근데 범위를 오른쪽으로 더 당겨야겠다.
-0.7<y<0.7;(x+8)(x-8)<0;(x-7)(x-7.2)(x-7.5)(x-7.7)<0 (E, 부등호 오류)
1B : 왜 이러지? 아... (손가락으로 사차함수를 그려보며) 밑이 아니라 위야.
-0.7<y<0.7;(x+8)(x-8)<0;(x-7)(x-7.2)(x-7.5)(x-7.7)>0 (I)
1B : 깔끔하다. 근데 여기 부분도 더 줄일 수 있겠다.
y^2<0.7^2;x^2<8^2;(x-7)(x-7.2)(x-7.5)(x-7.7)>0 (I)
1A : 재밌는데.

1팀 학생들은 [그림 Ⅳ-1]의 가장 왼쪽 직사각형(1번)의 관계식을 찾았고 2번 그림도 같은 관계식 안에 쓸 수 있다고 판단하여 시도해보다가 조건식들의 관계가 교집합관계임을 깨닫고 합집합이 될 수 있는 기호를 찾았다. 부등식을 이용하는 새로운 전략을 생각하고 간단한 식을 이용해 확인해 본 뒤, 그것을 비계로 하여 논리적인 사고를 통해 부등식을 확대시켜 디자인을 완성했다. if를 이용하는 것은 논리적인 사고를 통해 범위를 분리시켜 생각해보면 되지만 부등식을 이용하는 것은 부등식의 이해뿐만이 아니라 부등식의 영역을 고려하여 교집합을 찾아야 하기 때문에 쉽지 않다. 하지만 1팀은 GrafEq를 이용해 간단한 부등식을 시각적으로 확인해 보고 그러한 부등식을 활용해 그림을 완성시킴으로서 부등식의 여러 가능성을 확인하고 흥미를 느꼈다. 또한 완성된 식을 전개하여 식을 간단히 하려는 모습이 나타났고, 교집합과 합집합의 개념을 논리적으로 이해하고 태극기나 창작 과제에서도 '담배'와 비슷한 모양을 if를 사용하기보다는 다른 방법을 이용하여 [그림 Ⅳ-2]와 같이 간단하게 표현하려고 했다.

	$-\frac{5}{8}x-3<y\leftarrow\frac{5}{8}x+3;\frac{8}{5}x+n<y<\frac{8}{5}x+n+2;(n-18)(n-22)(n-26)=0$
	$2<y<a(1-\mathrm{cos}t);x+6.5=a(t-\mathrm{sin}t);a=2;0<t<t\pi;n<x<n+1;(n+3)(n+1)(n-1)=0$

[그림 Ⅳ-2] 태극기 과제의 '건'과 창작 과제의 '럭비공의 무늬'

2. 직관적, 구조적 통찰

직관적 통찰은 문제해결 과정에서 분석・종합과 같은 논리적 추론 방법을 따르지 않고 문제에 주어진 정보나 조건만으로 문제해결의 단서나 해결 방법 또는 그 결과를 즉각적으로 떠올릴 수 있는 사고를 의미한다. 번뜩이는 통찰력의 경험, 새로운 자료의 빠른 파악, 자료를 체계화하는 능력 등을 들 수 있다. GrafEq를 다룰 때 무엇보다도 중요한 것이 관계식의 입력순서이다. 관계식에 따라 그래프가 그려지는 순서가 정해지고, 나중에 그린 그래프가 처음 그린 그래프를 덮는 방식이므로 어떤 것을 먼저 그리느냐에 따라 그림이 완전 달라질 수

있다. 따라서 필요한 수식만을 혹은 적절한 순서를 미리 상상해야 하는 직관적, 구조적 통찰이 요구된다.

2팀의 경우 태극기의 태극문양을 그릴 때, 그림이 덮일 수 있다는 것을 정확하게 인지하지 못하고 태극문양에 맞는 모든 관계식을 찾으려고 노력했다. 하지만 순서대로 그릴 수 있다는 것을 정확히 인지한 순간 식을 간략화 했다.

발췌문3 : 태극기과제의 '태극문양'-2팀

2A : (태극 문양에 대각선을 그리며) 대각선을 중심으로 그려진 것인데.

2B : 일단 x축 중심으로 원을 그려보고, 나중에 회전을 생각해 보자.

2A : (원을 쪼개서 그린 뒤 수치를 적어서 계산을 시작하고, 학생들은 계산한 식을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 정리한다.)

큰 원	$x^2+y^2=4$	
왼쪽 작은 원의 아래쪽	$(x+1)^2+y^2=1$ $y=-\sqrt{1-(x+1)^2}=-\sqrt{-x^2-2x}$	
오른쪽 작은 원의 위쪽	$(x-1)^2+y^2=1$ $y=\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{-x^2+2x}$	
태극문양의 위쪽의 테두리	$y<\sqrt{4-x^2}$, $y>-\sqrt{-x^2-2x}$, $y>\sqrt{-x^2+2x}$	
태극문양의 아래쪽의 테두리	$y>-\sqrt{4-x^2}$, $y<-\sqrt{-x^2-2x}$, $y<\sqrt{-x^2+2x}$	

[그림 Ⅳ-3] 지필환경에서 시도한 식

[$x^2+y^2=4$에 대하여] y<sqrt[7](4-x^2);y>-sqrt(-x^2-2x);y>sqrt(-x^2+2x) (D)

2A : 등호를 붙이면 어떨까?

2B : 안되지. 겹치는 게 없네.

2A : 식을 따로 따로 해야겠네.

y<sqrt(4-x^2) (I)

y<sqrt(4-x^2);y>0 (I)

[$y=-\sqrt{1-(x+1)^2}=-\sqrt{-x^2-2x}$ 에 대하여] y>-sqrt(-x^2-2x) I

2B : 아! 맞다. 겹쳐지는 거지.

2A : 식을 많이 쓸 필요가 없네. 원 모양을 그리고 그 안에 원을 넣는 거야.

…(중략)…

2B : 회전할 필요가 없어. 45도 각도로 해서 작은 원을 넣으면 되는 거야.

2A : 그래!! 밑에 (반원)두 개씩, 위에 (작은 원) 두 개 그리면 되겠네.

7) sqrt는 제곱근을 의미한다.

	1(빨)	큰 반원	x^2+y^2<4
	2(파)	큰 반원	x^2+y^2<4;x+y<0
	3(빨)	작은 원	(x+1/sqrt(2))^2+(y-1/sqrt2)^2<1
	4(파)	작은 원	(x-1/sqrt(2))^2+(y+1/sqrt2)^2<1

[그림 Ⅳ-4] 태극기과제의 ‘태극 문양’의 관계식

2팀은 태극 문양에 맞는 모든 관계식을 찾기 위해 우선 태극문양 테두리를 위한 식을 찾았고, 그것들을 하나하나 관계식 창에 입력하는 과정에서 Tab의 의미가 교집합인 것을 인지하여 식을 분리해 3개의 관계식으로 쓰려고 했다. 하지만 두 번째 작은 원을 그리면서 먼저 그려진 것이 나중에 그려진 것에 의해 덮인 것을 보고 GrafEq가 그려진 순서대로 덮인다는 성질을 기억해 내고는 굳이 모든 식을 찾을 필요가 없음을 깨달았고, 식을 수정하여 회전하지 않고 대각선에 대칭이 되도록 원을 그려 식을 찾아냈다. 이 과정을 통해 처음에 많고 복잡했던 식이 간단하고 쉬운 식으로 [그림 Ⅳ-4]와 같이 정리되었는데 학생들은 이에 대해 매우 만족해했다.

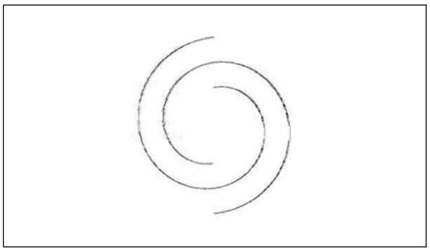
3. 유연한 사고

1) 직교좌표와 극좌표의 변환

유연한 사고는 수학적 능력의 중요한 구성 요인으로 정형화된 해법에서 벗어나 자기 제한을 극복하는 사고 과정이며 전형적인 사고로부터의 탈피 능력이다. GrafEq에서는 수식 창에 관계식을 넣고 Enter 키를 치면 새 보기화면 만들기 창이 뜨는데, 이 창은 새로 만들어질 보기 화면에 대해 여러 가지 설정을 하기 위한 화면이다. 옵션에서 그래프의 형태(직교좌표나 극좌표)와 변수의 한계값 등을 입력할 수 있다. 직교좌표계에서는 기본적으로 변수가 x와 y로 설정되고, 극좌표에서는 r과 θ로 설정된다. 관계식에 그 이외의 문자가 쓰인 경우, 각각의 [팝업] 메뉴를 클릭하면 그 문자들이 나타나며 거기에서 선택한 문자가 정의역 또는 공역의 변수(즉, 독립변수나 종속변수)가 된다. 여기서 GrafEq의 특징은 한 관계식을 직교좌표나 극좌표에서 모두 그릴 수 있다는 것이다. 즉, 직교좌표와 극좌표가 한 평면에 공존한다.

<u>발췌문4 : 창작과제의 ‘나이테’-3팀</u>
3A : 여기 나이테를 그려보자.
r = θ
3A : 이게 뭐야? 극좌표?
3B : 응. 수업시간에 봤었거든. 그런데 정확하게는 잘 몰라. 찾아보자.
…(여러 숫자를 넣어보면서 탐구해 보다가 인터넷을 통해 관련 지식을 좀 더 알아본 뒤 식을 결정한다.)…
r=θ; -7pi/2<θ<-3pi/2 (I)
3B : 이걸 줄이고 평행이동 시키면 돼.

3A : 어떻게 해야 하지? 일단 크기를 줄여야 해.
10r= θ; -7pi/2< θ<-3pi/2 (I)
…(중략)…
3A : 평행이동 시키려면 r밖에 없어
10(r-6)= θ; -7pi/2< θ<-3pi/2 (E)
3B : 세타를 평행이동 시킬까?
…(중략)…


[그림 Ⅳ-5] 창작과제의 '나이테'

3A : 알았어. r을 $\sqrt{x^2+y^2}$ 으로 바꾸는 거야.
10sqrt(x^2+y^2)= θ;-7pi/2< θ<-3pi/2 I(D, θ값이 양수여야 함)
3A : 세타를 어떻게 표시하지? x, y로 바꿔야 하는데. (잠시 고민)아! tan이용하자.
10sqrt(x^2+y^2)=a;-7pi/2<-a<-3pi/2;tana=y/x I
…(중략)…
-7.9sqrt((x+0.5)^2+(y+8.5)^2)=a;tana=(y+8.5)/(x+0.5);-7pi/2<a<-3pi/2 I

3팀은 '나이테' 모양을 그리기 위해 수업시간에 본 적이 있는 극좌표에서 나오는 아르키메데스의 나선 모양을 이용하려고 시도를 했다. 이는 GrafEq가 같은 평면 위에 좌표평면과 극좌표를 함께 그릴 수 있는 환경을 제공하기 때문에 가능한 시도였다. 또한 극좌표를 이용하려 했지만 평행이동을 하기에 용이하지 않음을 깨닫고, 다시 좌표평면에서의 식으로 전환하고자 r을 $\sqrt{x^2+y^2}$로, θ를 $\tan a = \frac{y}{x}$로 이용해서 재정의 하였다. 이 때, a는 θ를 표현하기 위한 매개변수이다. 학생들에게는 아르키메데스의 나선 모양이 매우 생소하였으므로, 처음에는 특별한 의도 없이 이런저런 시도를 해보는 무작위 행동방식(random work method)이 일어났다. 하지만 시간이 지나자 평행이동을 시키기 위해 패턴을 찾아보려는 기계적 행동방식으로 이어졌다. 정리하면, 학생들은 r이나 θ를 이용한 극좌표를 통해 그래프를 그리면서 평행이동을 시도했지만 오류가 발생하자 극좌표를 직교좌표로 변환하고 식을 수정하는 유연한 사고가 나타났다. 정형화된 해법에서 벗어나 자기 제한을 극복하는 사고 과정이 나타남으로서 3팀은 극좌표계에서 그린 그림을 평행이동을 시킬 수 있었고 이로 인해 더욱 다양한 그림을 표현할 수 있게 되었다 ([그림 IV-5] 참고).

2) 문자의 다양한 사용

변수는 다양한 문맥에서 서로 다른 여러 가지 양상으로 나타나는 다면적인 개념이다. 변수는 $4x+2=6$에서의 x와 같이 방정식의 해를 나타내는 자리지기(placeholder)인 미지수(unknown), $y=ax$에서 a와 같이 아직 정해져 있지 않은 상수를 나타내는 부정소(indeterminate), $a+b=b+a$에서의 a, b와 같이 일반화의 표현을 위해 사용된 문자(generalizer), 함수식에서의 독립변수, 종속변수, 매개변수(parameter), 연산변수 등 다양한 측면을 지닌 개념이다 (김남희 외, 2011). 본 연구에서 수학영재아들은 문자를 하나의 용도로만 사용하지 않고 다양하게 사용함으로서 유연한 사고가 나타났다. 특히 부정소와 매개변수로서 사용이 두드러지게 나타났는데, 학생들은 문자를 정해지지 않은 상수인 부정소로 활용하면서 다양한 수를 넣어보는 경험적 추론[8]을 통해 그림에 적합한 숫자를 찾아보고 식을

간략하게 표현했다.

4팀의 경우 '셔츠 깃'을 그리기 위해 직선의 방정식을 이용하였는데, 우선 기울기를 예측하여, 지나가는 점을 보기 도구창의 줌 모드를 이용해서 읽고, 지필환경에서 y절편을 구한 뒤, ±를 이용해 한 번에 표현해 보려고 시도했다. 하지만 원래 그리려고 했던 의도와 다른 결과가 나오자 절댓값을 이용하여 오류를 수정하였고, 그 후 선을 굵게 하기 위한 방법을 생각해보면서 문자를 이용하기로 결정했다. 이는 문자를 부정소로서 사용한 것으로 아직 정해지지 않은 상수를 나타내기 위해 사용되었고 그 이후에 상수 값을 정함으로서 적절한 굵기를 가진 선이 생기게 되었다. 3팀의 경우 '라면 면발'을 표현하기 위해 삼각함수를 활용하면서 모양의 높낮이와 평행이동을 조정하기 위해 문자를 부정소로서 아직 정해지지 않은 상수를 나타내기 위해 사용한 다음, 경험적 추론을 통해 다양한 수를 대입하여 변화를 관찰하고, 원하는 위치를 결정하여 그림을 그렸다. 문자를 사용하면 한꺼번에 그래프의 변화를 관찰할 수 있기 때문에 경험적 추론을 통해 그래프 개형을 익히기 쉬운데 학생들은 GrafEq를 이용한 디자인 활동을 하면서 점차 문자의 이런 역할을 깨닫고 그림을 그리기에 용이하도록 여러 용도로 사용하였다. 또한 3팀은 회전변환 식에 각도를 0으로 놓고 회전되지 않음을 확인한 뒤, 매개변수를 이용해 등식을 분리하여 이해를 좀 더 쉽게 하면서 $y=2x$가 나올 것을 예측하고 식과 각의 변화를 쉽게 바꿀 수 있게 했다. 회전변환을 원래 식에 넣게 되면 식이 복잡해지고 오류수정에도 어려움이 따르기 때문에 a, b로 치환함으로써 간단하게 0.2sin5a<b<0.2sin5a+0.14식을 변화시켜 모양이나 굵기를 정했다. 즉, 복잡한 식을 매개변수 a, b를 사용하여 식을 간략화 하고, 관계식을 그림을 그리는 데 용이하도록 변형시킨 것이다. GrafEq에서는 각도를 라디안 단위로 인식하므로 3팀은 평소에 쓰는 육십분법[9]을 이용한 각을 라디안 단위로 바꿔서 넣어야 함에 불편함을 느껴 각도를 육십분법으로 바꾸어 쉽게 바꾸려고 시도했다. 즉, t=cpi/180을 조건식으로 추가하여 c에 육십분법 단위의 각의 크기를 입력할 수 있도록 바꾸어 보다 쉽게 사용할 수 있도록 대수식을 변화시켰다. 3팀 학생들은 회전변환을 자신이 원하는 대로 쉽게 할 수 있도록 관계식을 변형하는데 성공한 것에 뿌듯함을 표현하였고, 그 이후에도 학생들은 굳이 회전변환을 쓰지 않아도 되는 '젓가락'을 그릴 때도 회전변환을 이용해 그림을 그리기도 하였다. 문자는 식을 간단하게 만들기도 하고, 범위를 조정할 때나 식을 쉽게 이해할 때 유용했다. 문자를 다양한 용도를 사용하는 과정에서 유연한 사고가 드러난 것이다.

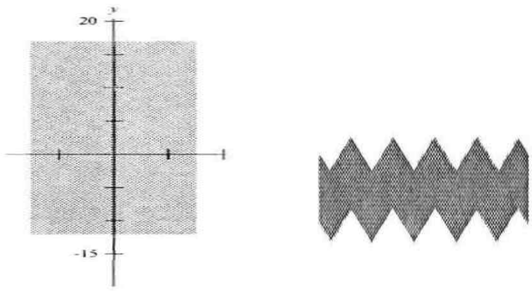
4. 발산적 사고 및 독창성

발산적 사고는 문제 해결의 목표가 해답의 산출에 있지 않고 다양하고 독창적인 아이디어를 제안하는 사고의 일종이다. GrafEq는 수식표현이 자유롭고 팩토리얼(!), 두 개 이상의 인수를 갖고 각각 최솟값, 최댓값을 구해주는 min, max 등 다양한 함수를 입력할 수 있다. 이런 다양한 수학적 표현이 가능한 환경에서 수학영재아들은 다양한 수식을 사용하여 자신만의 엉뚱한 발상을 표현하는 발산적 사고 및 독창성이 나타났다. 창작과제의 '직사각형'을 그

8) 본 논문에서 '경험적 추론'이란 어떤 명제의 정당성을 예를 근거로 주장하는 경험적 정당화의 일종으로 정의한다.

9) 육십분법은 원주를 360등분하여 각 호에 대한 중심각을 1도(°), 1°의 1/60을 1분(′), 1′의 1/60을 1초(″)로 정의하여 각을 나타내는 방법이다.

리기 위해 ([그림 Ⅳ-6] 참고), 1팀은 절댓값이나 부등식이 아닌 다른 식을 써보려고 노력했다. 그로 인해 max와 min의 의미에 대해 생각해 보게 되고 특이한 식에 대해 만족감을 보였다. 참여 학생들은 대체적으로 표현을 할 때 누구나 생각할 수 있는 간단한 식보다는 자신만의 표현을 가지는 것을 선호했다. min, max는 그 의미를 알고 있는 수식이기 때문에 자신이 알고 있는 지식과 GrafEq를 통해 나타나는 그래프를 비교하면서 관계식을 찾아가는 풍부한 행동 방식이 나타났다.



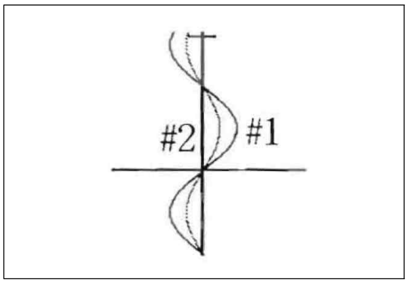
[그림 Ⅳ-6] 창작과제의 '직사각형'과 '입 속'

또한 GrafEq가 제공하는 특이한 함수 중에 삼각함수와 연관된 함수들이 있는데, 그 중 정사각함수는 정사각형에 기반을 두고 있는 것으로 삼각함수의 끝에 'q'가 덧붙여져 있는 sinq, cosq, tanq, cscq, secq, cotq의 형태이고, 마름모함수는 마름모에 기반을 두고 있는 것으로 끝에 'd'가 덧붙여져 있는 것으로 sind, cosd, tand, cscd, secd, cotd가 있다. 1팀 학생들은 창작과제의 '입 속'([그림 Ⅳ-6] 참고)을 그리기 위해 여러 가지 함수를 그려보면서 그 중 y=sindx을 이용해 그리기로 결정하고, 문자를 이용해 범위를 확대시켜 그림을 완성했다. 학생들은 y=sindx가 어떤 원리로 만들어진 것인지에 대해서는 정확히 인지하지는 못했지만 변하는 패턴을 토대로 자신들이 원하는 위치에 그래프를 그렸다. 학생들은 직선의 방정식을 이용하지 않고 다른 방법으로 그린 것에 뿌듯함을 표현했다.

5. 패턴의 일반화 및 귀납적 추론

귀납적 추론은 특수한 사례들로부터 추상적 일반 법칙을 도출하는 추론이다. 수학적 패턴과 관계를 찾는 능력, 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화, 패턴의 차이와 유사성을 쉽게 파악할 수 있는 것 등이 해당된다. GrafEq는 입력한 수식을 시각화함으로서 그래프 표현에서 여러 가지 요소들을 수정해 보면서 식의 변화에 따른 그래프의 다양한 변화를 쉽게 관찰할 수 있는 환경을 제공한다. 참여 학생들은 그래프의 시각적 변화를 단순한 관찰로만 그치지 않고 그 변화 사이의 차이점과 유사점을 비교하면서 일반적인 원리를 추론하려고 노력했다. 즉, 한 개 또는 몇 개의 그래프에 대한 지각적인 사실을 근거로 결론을 도출한 것이다. 이러한 추론 방식은 기본이 되는 값을 입력해서 나타나는 그림을 자신들이 원하는 그림에 알맞은 수를 찾는데 활용하면서 주로 나타났다.

<u>발췌문5: 금연과제의 '연기'-4팀</u>
[그림 Ⅳ-7] #1에 대하여
1 y=arcsin[10]x (I)
4B : 관계식을 추가해서 비교해보자
[그림 Ⅳ-7] #2에 대하여
2 y=arcsin2x (I)
4A : 진폭이 줄어드네.
3 y=arcsin2(x+1) (I)
y=3arcsin2(x+1) (I)
4 4A : 진폭을 늘린 다음에 주기를 줄여야 하는데 역함수라서 반대인 거 아니야?
4B : 그런가? 한 번 해보자. 폭을 더 늘려야 하니까
5 y=1/2arcsin1/2(x+1) (I)
4B : 그렇구나. 조금 폭을 줄이자.
y=1/2arcsin1/1.3(x-4);1.5<y<6 (I)



[그림 Ⅳ-7] arcsin의 그래프

4팀은 y=arcsinx의 뜻은 알지만 진폭이나 주기의 변화를 정확히 알지 못했기 때문에 두 개의 관계식을 서로 비교하는 아이디어를 생각해 내었고, 한 번에 그 차이를 알아봄으로써 많은 시행착오를 겪지 않고 y=arcsinx의 진폭과 주기가 y=sinx와 반대라는 것을 경험적 추론을 통해 알아냈다. 즉 y=m(arcsin(nx))에서 m이 커질수록 주기가 커지고, n이 커질수록 진폭이 줄어든다는 사실을 알아낸 것이다. 그 후에 자신들이 원하는 모양을 만들기 위해 진폭과 주기를 자유자재로 변화시켰다. 1팀의 경우 창작과제의 '손'을 그리기 위해 타원을 활용하기로 결정했지만, 타원을 정확하게 배우지 않았기 때문에 GrafEq를 통해 경험적 추론을 하고 자신들이 원하는 대로 크기나 모양을 변화시킬 수 있었다. 회전변환의 식을 수업시간에 개략적으로 본 것을 기억해 내고, 인터넷을 통해 식을 찾아본 뒤, 찾은 행렬식을 매개변수를 이용해 치환을 하고 GrafEq를 통해 회전이 되는지 확인했다. GrafEq를 활용해 시각적으로 자신이 생각한 것과 어느 정도 일치하는지를 끊임없이 확인함으로서 패턴의 차이와 유사성을 쉽게 파악했다. 참여 학생들은 생소한 식을 자신의 지식만으로 잘 다루기 어렵기 때문에 처음에는 무작위 행동방식이 나타났지만 관찰과 분석을 기반으로 자신의 지식과 결합하여 그림에 적합한 수식을 찾는 풍부한 행동방식이 나타났다. 정확하게 알지 못하는 새로운 식을 다룰 때 패턴의 일반화를 통해 기준을 정하려는 귀납적 추론이 나타난 것이다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구의 목적은 GrafEq를 활용한 디자인 활동에서 나타나는 수학영재아들의 사고특성을 살펴보는 것이다. 이를 위해 디자인 활동에 필요한 부등식의 영역을 학습한 과학고 학생 8명을 대상으로, GrafEq를 활용한 디자인 활동에서 참여하면서 일관성 있게 드러나는 사고

10) GrafEq에서는 삼각함수 앞에 'Arc'를 붙이면 역함수가 되고, 'arc'를 붙이면 확장된 역함수가 된다.

특성을 분석하고자 하였다. 요약하면, GrafEq의 기본적인 사용법을 익혀서 간단한 디자인 작품을 만들어 보는 단계부터 학습되지 않은 식을 이용해 자신들만의 작품을 만드는 단계까지의 활동이 이루어지는 동안 수학영재아들의 다양한 사고특성이 드러났다. GrafEq에서는 조건식들과 관계식들 간의 관계를 통해 식을 줄일 수 있으므로 조건식이나 관계식들 간의 관계를 명확히 하고 대수적 조작을 능숙하게 수행하는 논리적 사고 및 수학적 추상화가 나타났다. 또한 그림이 그려진 순서대로 덮어지는 프로그램의 특성을 인지하여, 그리는 순서까지 고려하면서 필요한 수식들을 찾아내는 과정에서 직관적, 구조적 통찰이 나타났으며, 직교좌표와 극좌표를 한 평면에 동시에 나타낼 수 있는 기능을 이용하여, 극좌표계에서 그린 극방정식 그래프를 평행이동을 위해 직교좌표계로 변환하여 활용하는 유연한 사고가 나타났다. 또한 문자를 한 가지 용도로만 사용하지 않고 여러 용도로 사용하고, 관계식 순서를 재배치하는 것에 불편함을 느끼고 범위를 지정하여 순서의 오류를 극복하는 유연한 사고가 나타났다. 수식표현이 자유롭고 다양한 함수를 입력할 수 있음을 적극적으로 활용한 수학영재아들은 다양한 수식을 사용하고 엉뚱한 발상을 하는 등 발산적 사고 및 독창성이 나타났다. 마지막으로, 입력한 수식을 시각화함으로서 단순한 관찰에서 그치지 않고 그 변화 사이의 차이점과 유사점을 고려하면서 일반적인 원리를 추론하는 패턴의 일반화 및 귀납적 추론도 나타났다. GrafEq에서의 디자인 활동은 학생들에게 다양한 사고를 자극함으로서 이러한 활동이 학생들의 인지적인 발달을 촉진시키는데 효과적임을 알 수 있다.

또 한 가지 주목할 것은 전체적으로 다양한 사고 특성들이 드러나긴 했지만, 수학 지식이나 수준이 비슷한 두 팀(2팀, 3팀)에서 수학적 활동이 매우 다른 양상으로 전개되었다는 점이다. 이것은 연구 설계 및 대상자 선정과정에서는 예상하지 못했던 부분으로, 공학도구 활용 시 연장의 특성도 중요하지만, 공학도구를 활용하는 사용자 즉 학습자의 특성 역시 학습 활동에 매우 중요한 역할을 한다는 이전 연구를 뒷받침하는 증거라 할 수 있다. 2팀은 미시적 시각에서 정교하게 그림을 그려 나가면서 과제를 수행하려고 한 반면, 3팀은 거시적 시각에서 식의 관계에 초점을 맞추어 구조적 파악을 통해 그림을 그려나갔다. 또한 2팀은 지필환경에 의존한 분석적 사고가 두드러지게 나타난 반면, 3팀은 GrafEq에 의존한 시각적 사고가 두드러지게 나타났다[11].

본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, GrafEq에서는 디자인 활동을 위해 사용할 수 있는 다양한 방법(수식 및 기능)을 제공하므로, 비슷한 그림이라도 각 학생 혹은 각 팀마다 다양한 사용방식과 산출물을 도출해 냈다. 이는 앞서 요약한 바와 같이 수학영재들의 여러 가지 특성을 발현시키는 데 도움이 됨과 더불어 특히 하나의 식에 초점을 맞추어 생각하지 않고 다양하고 독창적인 식을 찾으려는 경향이 있는 영재의 발산적 사고 및 독창성의 발달에 도움이 될 수 있음을 시사하는 것이다. 둘째, 정확히 알지 못하는 종류의 식을 다루면서 관찰과 분석을 통한 패턴의 일반화 및 귀납적 추론이 나타남에 따라, 수학영재아들은 가지고 있는 수학적 지식 혹은 지필환경에서 이미 계산된 식을 확인하고 실현해 보는 단순한 증폭자(amplifier)로써의 공학도구 활용이 아니라, 지식의 재조직자(reorganizer)로써 GrafEq 프로그램을 활용했음을 확인할 수 있었다. 특히 GrafEq를 활용한 디자인 활동에서는 식의 종류도 중요하지만 식의 변화에 대해 정확히 아는 것이 중요하다. 식의 변화를 관찰하는 활동을 통해 기하와 벡터의 일차변환에 관한 학습이 이루어 질 수 있

11) 학습자 특성에 따른 공학도구 다양한 활용에 대한 자세한 논의는 본 논문의 범위를 벗어나므로 생략한다.

고, 삼각함수에서 진폭과 주기를 관찰함에 있어 x나 y축 방향으로 확대나 축소로 연결 짓고, 더 나아가 닮음변환, 위치변화를 위해 나타난 대칭변환, 회전변환까지 연결 지을 수 있다. 학생들은 이미 평행이동, 대칭이동 개념을 알고 있었기 때문에 행렬에 대한 개념을 적절히 도입했다면 GrafEq를 통해 여러 가지 변환을 경험해보고 변환의 중요성을 인지할 수 있었을 거라 여겨진다. 셋째, 영재학생들이라 하더라도 일반 학생들과 마찬가지로 분석적 방식에 의존한 해석기하에 치중하기 보다는 기하와 대수가 연계된 수업의 강화가 필요함을 알 수 있었다. 2팀과 같은 경우 엄밀성에 치우쳐 미시적 시각에서 그리려고 노력한 결과 자유로운 사고가 닫히는 모습을 보였다. 또한 분석적 사고를 통해 해석기하에서 중시하는 계산과정은 익숙하게 처리했지만, 기울기의 느낌, 거리 개념, 곡선의 구부러진 정도에 대한 기하적 감각이 부족했다. 기하와 대수의 연계 수업을 통해 영재아들이 단순한 식의 나열과 기계적인 계산에서 벗어나 식의 의미와 그래프를 느낄 수 있는 기회를 제공해야 하겠다.

마지막으로, 본 연구에서의 디자인 활동은 GrafEq의 사용법 정도만 간단하게 언급하고 수학 영재가 요구하는 수학적 지식을 간단하게 설명하는 등 교사의 역할이 거의 없는 활동이었다. 공학도구의 활용에서 교사의 도구의 조직화(instrumental orchestration)[12)]활동 역시 강조되고 있는 추세이므로, 교사의 역할을 상세하게 탐구할 수 있는 후속연구를 제안한다. 또한 활동 소재나 수학적 주제에 있어서도 GrafEq가 제공하는 다양한 형태의 함수와 기능을 고려할 때 본 연구에서 공통과제로 제시된 것 이외에도 곡선의 활용이나 mod, gcd, 팩토리얼 등의 개념을 포함한 과제의 추가적인 개발 및 이에 대한 수학영재아들의 활동에 대한 연구가 필요하다 하겠다.

참고문헌

권오남, 정선아(2012). 대수식과 디자인의 연결과정에서의 영재학생들의 수학적 사고 과정 분석, 한국수학교육학회지 수학교육, 제51권 1호, 47-61.

김남희(2004). 중등수학 탐구를 위한 예비수학교사의 수학프로그램(GrafEq)활용 사례, 한국수학교육학회지 수학교육, 제43권 2호, 177-186.

김남희(2005a). 수학디자인, 그리고 생활의 발견. 서울: 수학사랑.

김남희(2005b). 예비수학교사교육에서의 공학적 도구 활용 사례 연구 - 7~9단계 수학수업과 연계된 교수·학습보조자료 개발을 중심으로, 학교수학, 제7권4호, 337-352

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(2011). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사

김남희, 박경미(2008). 수학교육에서의 컴퓨터 활용. 서울: 경문사.

김부윤, 이지성(2008). Instrument로서의 테크놀로지와 수학 학습 패러다임의 변화, 한국수학교육학회지 수학교육, 제47권3호, 261-271.

김은혜, 박만구(2011). 개방형 문제해결 전략 및 행동 특성 분석, 한국초등수학교육학회지, 제15권1호, 19-38.

김지원(2003). 한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구. 경인교육대학교 석사학

12) '도구의 조직화'란 교사가 학생들의 도구발생을 돕는 데 목표를 두고 조직하는 다양한 장치 및 행위를 말한다 (Trouche, 2003).

위논문.
김홍원, 김명숙, 송상헌(1996). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ)- 기초 연구편. 서울: 한국교육개발원.
김화경(2006). 수학교육에서 컴퓨터 환경에서 지니는 유창성의 의미, 한국학교수학회논문집, 제9권2호, 229-248.
이헌수(2011). 테크놀로지를 활용한 수학영재교육. 전남대학교 박사학위논문.
장인옥(2010). LOGO를 이용한 프로젝트 학습에서 나타난 초등 수학영재 학생들의 전략적 사고와 교사의 역할. 한국교원대학교 박사학위논문.
조영창(2012). GSP를 활용한 기하문제해결과정에서 나타나는 수학 영재아의 행동과 사고의 특성분석: 히로타카 기하문제를 중심으로. 한국교원대학교 석사학위논문.
홍진곤, 강은주(2009). 사고구술법을 이용한 수학 영재의 사고 특성 분석, 대한수학교육학회지 수학교육, 제19권4호, 565-584.
황동주(2005). 수학영재 판별의 타당도 향상을 위한 수학 창의성 및 문제 해결력 검사개발과 채점방법에 관한 연구. 단국대학교 박사학위논문.
Artigue, M.(2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 245-274.
Dick, T.(2007). Keeping the faith: Fidelity in technological tools for mathematics education. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses, cases, and perspectives. Vol. 2: Cases and perspectives* (pp. 333-339). Greenwich, CT: Information Age.
Drake, S. M.(1993). *Planning integrated curriculum: The call to adventure.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.A.(2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles, J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.
Guin, D., & Trouche, L.(1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
Kaput, J.(1992). Technology and mathematics education. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
Krutetskii, V. A.(1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* (J. Teller, Trans. J. Kilpatrick, I. Wirszup, eds). Chicago: University of Chicago Press.
Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L.(2001). A meta study on IC technologies in education. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1,* (pp. 111 - 122). Utrecht: Freudenthal Institute.
Merriam(1998). *Qualitative research and case study applications in education.* CA: Jossey-Bass. 강윤수 외 8인 공역(2005). 정성연구방법론과 사례연구. 서울: 교우사.
National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pea, R. D.(1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89-122). Hilldale, NJ: Erlbaum.

Trouche, L.(2003). From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with Coumputers, 15,* 783-800.

Zbiek R.M., Heid M.K., Blume G.W., & Dick T.P.(2007). Research on technology in mathematics education, A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age.

An analysis of characteristics of mathematically gifted high school students' thinking in design activities using GrafEq

Lee, Ji Won[13]·Shin, Jaehong[14]·Lee, Soo Jin[15]

Abstract

The purpose of this study was to investigate characteristics of mathematically gifted high school students' thinking in design activities using GrafEq. Eight mathematically gifted high school students, who already learned graphs of functions and inequalities necessary for design activities, were selected to work in pairs in our experiment. Results indicate that logical thinking and mathematical abstraction, intuitive and structural insights, flexible thinking, divergent thinking and originality, generalization and inductive reasoning emerged in the design activities. Nonetheless, fine-grained analysis of their mathematical activities also implies that teachers for gifted students need to emphasize both geometric and algebraic aspects of mathematical subjects, especially, algebraic expressions, and the tasks for the students are to be rich enough to provide a variety of ways to simplify the expressions.

Key Words : GrafEq, Mathematically Gifted Students, Characteristics of Mathematical Thinking, Instrumental Genesis

Received August 5, 2013
Revised September 23, 2013
Accepted September 26, 2013

13) Kwangdeuk High School (neptune9633@naver.com)
14) Korea National University of Education (jhshin@knue.ac.kr)
15) Korea National University of Education (sjlee@knue.ac.kr), Corresponding author