한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 3, 499-518, September 2013

예비 중등 교사들의 무리수에 대한 이해[1)]

이선비[2)]

학생들이 학습하는데 교사의 역할은 중요하다. 교사는 학생들에게 수학 개념을 가르치고, 학생들이 수학적 사고력을 향상시킬 수 있도록 도움을 주어야 하기 때문이다. 이 연구의 목적은 무리수 정의와 무리수 연산에 대한 예비 중등 교사들이 갖고 있는 이해는 어떠하며, 어떠한 차원으로 이해가 이루어지고 있는지 파악하는 것이다. 예비교사들의 무리수에 대한 이해를 분석하기 위해 Skemp(1976)의 연구와 Tirosh et al.(1998)의 연구를 참고하여 '형식적 차원', '직관적 차원', '알고리즘적 차원', '도구적 차원'으로 분석틀을 구성하였다. 사범대학과 교육대학원 5곳에서 65명의 예비교사들을 대상으로 무리수 정의와 연산과 관련한 설문을 실시하였다. 분석 결과 예비교사들은 무리수 정의에 대해 대체적으로 올바른 지식을 갖고 있었으나, 그러지 못한 예비교사들도 몇 명 있었다. 무리수 연산(덧셈)에 대해서 예비교사들은 많은 잘못된 이해가 이루어지고 있었다. 이들은 주로 직관적 차원으로의 이해나 도구적 차원으로의 이해가 이루어지고 있었다.

주요용어: 이해, 무리수, 예비 중등 교사

Ⅰ. 서론

이 연구는 중등 예비교사들의 무리수 개념 이해에 관한 것이다. 현재 7차 개정 교육과정에서는 무리수를 중학교 3학년 1학기 첫 단원에서 소개하고 있고, 그 이후 학년에서는 인수분해, 지수, 로그, 극한, 미분, 적분 등 수학교과 전반에 걸쳐 자주 등장하고 있다. 그러나 초등학교 때부터 계속해서 다루어 오던 유리수 개념과는 다르게 중학교 3학년이 되어 처음으로 배우는 무리수는 유리수에서 실수로 확장되어 가는 과정에 있어서 학생들에게 어려운 개념이다. 뿐만 아니라 무리수는 실생활에서 거의 이용되고 있지 않고 직관적으로 이해하기도 힘들어 학생들이 학습하는데 큰 어려움이 되고 있다(노민숙, 2002; 이영란·이경화, 2006). 이러한 이유 때문인지 학생들이 무리수와 제곱근에 대한 개념을 어떻게 이해하고 있는지, 또한 학생들이 무리수에 대해 어떠한 오개념을 갖고 있는지에 대한 연구들이 그 동안 지속적으로 이루어져 왔다(박윤희·박달원·정인철, 2004; 김부윤·이지성, 2008).

이들 연구(박윤희 외, 2004; 김부윤·이지성, 2008)에서는 학생들이 무리수를 곧 무한소수와 동일하게 인식하고 있으며, 제곱근의 개념을 정의적으로 이해하고 경험에 의한 근사값 계산

1) 이 연구는 2011년 교육과학기술부의 재원으로 한국 연구재단의 지원을 받아 수행된 것임 (NRF-2011-B00216).
2) 서강대학교 교육대학원, 상문고등학교 (sunbi1013@naver.com)

을 통해 알게 되는 것이 아니라, 제곱근 자체의 근삿값을 암기하여 학습하고 있음이 드러났다. 이러한 방식은 학생들의 제곱근 개념에 대한 유의미한 학습을 저해할 수 있다. 이러한 학생들의 제곱근과 무리수 개념 이해에 대한 어려움은 무리수와 유리수의 사칙 연산을 정확히 알지 못하는 문제점으로도 나타났다(박윤희 외, 2004). 이러한 연구들을 바탕으로 어떻게 하면 학생들에게 무리수 개념을 잘 이해시키고 가르칠 수 있을 것인가에 대한 연구도 이루어 졌다(이영란·이경화, 2006; 김부윤·정영우, 2008). 주로 무리수는 정수의 비로 표현할 수 없다는 통약불가능성(incommensurability)에 기반을 둔 지도법과, 학생들 스스로가 무리수의 존재성을 깨닫고, 무리수의 특성을 파악할 수 있도록 하는 직관적 이해에 기반을 둔 지도법이 소개되었다.

이처럼 우리나라에서 이루어진 무리수 관련 연구들은 학교에서 학생들에게 무리수에 대한 개념을 어떻게 가르치는 것이 효과적인지에 대한 무리수 지도법에 대한 연구들이다. 학생들이 무리수 개념을 잘 이해하고 활용할 수 있도록 교사가 지도하는 것은 중요하다. 이와 더불어 가까운 미래에 학생들을 가르치게 될 예비교사의 역할도 중요할 것이다. 교사는 학생들의 이해를 목표로 수학을 가르치는 것을 최우선으로 해야 한다. 무엇보다 학생들을 가르치기 이전에 교사 혹은 예비교사들의 수학개념에 대한 확실한 이해가 뒷받침되어야 할 것이다. 교사 혹은 예비교사들의 수학개념에 대한 지식과 이해가 수업에서, 그리고 학생들의 학습에 직·간접적으로 영향을 미칠 것이기 때문이다. 하지만 정작 학생들을 가르치게 될 예비교사들의 무리수 개념 이해가 어느 정도 인지에 대한 연구는 거의 이루어져 있지 않다. 무엇보다 교사는 학생들에게 새로운 지식을 가르쳐 주고, 학생들의 수학적 사고를 확장시켜주는 역할을 해야 한다. 아무리 교사가 학생들이 어떻게 이해하는지를 알고 있고, 무리수에 대한 효과적인 특정 지도법을 알고 있다 하더라도 교사들의 무리수에 대한 개념 이해가 제대로 되어 있지 않다면 학생들이 무리수를 이해하는데 있어서도 어려움과 오개념이 계속해서 발생하게 될 것이다. 그렇기 때문에 앞으로 교사들에 대한 무리수 개념 이해에 관심을 기울일 필요가 있을 것이다.

이미 외국에서는 수학교사들의 무리수 개념에 대한 연구가 이루어지고 있다. Sirotic & Zazkis(2007)은 중등예비교사들을 대상으로 무리수 개념을 형식적 차원(formal dimension), 직관적 차원(intuitive dimension) 그리고 알고리즘 차원(algorithmic dimension) 중 어느 차원으로 이해하고 있는지에 대해 연구하였다. 어떠한 개념을 이해하는 가장 이상적인 이해방식은 언급한 세 가지 차원의 상호작용으로 개념을 이해하는 것이다(Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1998). 그러나 Sirotic & Zazkis(2007)의 연구결과 예비교사들은 무리수 개념을 편협적인 차원으로 이해하고 있었으며, 세 가지 차원의 상호작용으로 이해하고 있는 예비교사들은 거의 나타나지 않았다. 이 연구를 통해서 예비교사들이 나중에 실제 교단에서 학생들을 가르칠 때 과연 무리수 개념을 잘 가르칠 수 있을까 하는 의문이 생기게 되었다. 이러한 궁금증을 해결하기 위해서 Sirotic & Zazkis (2007)의 연구와 같이 우리나라에서 예비교사들의 무리수 개념 이해 정도를 파악하는 것이 필요할 것이라 판단했다.

이에 따라 이 연구는 무리수의 정의, 무리수 연산에 대한 영역에서 예비교사들은 어떤 이해(understanding)를 갖고 있으며, 각각의 영역에서의 이해가 어떠한 차원으로 이루어지고 있는지 살펴볼 것이다. 따라서 예비교사들의 무리수에 대한 개념에 대한 지식과 이해 상태를 파악하는 것을 목적으로 한다.

이 연구에서 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 무리수 정의, 무리수 연산에 대해 예비교사들이 갖고 있는 이해(understanding)는

어떠한가?

둘째, 무리수의 연산에 대해 예비교사들이 갖고 있는 이해는 어떠한 지식의 차원으로 이루어지고 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 예비교사의 무리수 개념 이해에 관한 연구

학생들을 대상으로 무리수 개념을 어떻게 이해하고 있는지, 또는 무리수 학습에 있어서 발생하는 오개념이 무엇인지 조사한 연구는 그 동안 많이 이루어져 왔다(박윤희 외, 2004; 김부윤·이지성, 2008; 김부윤·정영우, 2008). 하지만 장차 교단에서 학생들을 가르치게 될 예비교사 및 현직 교사들을 대상으로 한 연구는 그리 활발하게 이루어 지지 않고 있다. 그러나 예비교사의 무리수 개념 이해에 대한 몇몇의 선행연구는 학생들과 같이 무리수 개념 이해 측면에서 많은 부족함이 있음을 보여주고 있다.

Fischbein, Jehiam, & Cohen(1995)의 연구는 9학년 학생 30명과 10학년 학생 32명, 그리고 예비교사 29명을 대상으로 무리수의 정의를 어떻게 인식하고 있으며, 무리수 개념을 직관적으로 어떻게 이해하고 있는지에 대해 이루어 졌다. 연구 결과 무리수의 정의적 측면에서 예비교사들은 무리수, 유리수 그리고 실수의 개념에 대해 정확하게 설명하지 못하였으며 무리수 개념을 어떻게 직관적으로 이해하고 있는지에 대해서도 '무한이 반복되는 소수를 말한다' 등과 같이 무리수의 특징을 단편적으로만 설명하였으며, 이는 학생들이 무리수를 이해하고 있는 방법과 크게 다르지 않은 것으로 나타났다.

Peled & Hershkovitz(1999)의 연구결과는 Fischbein et al.(1995)의 연구결과와 다르게 나타났다. Peled et al.(1999)의 연구에서는 총 70명의 예비교사들을 대상으로 유리수, 무리수의 정의에 대해 어떻게 알고 있는지 조사하였다. 연구 결과 대다수의 예비교사들이 유리수와 무리수의 정의를 정확하게 알고 있는 것으로 나타났다. 또한 Fischbein et al.(1995)의 연구에서 예비교사들은 무리수 개념을 어떻게 직관적으로 이해하고 있는지에 대한 부분을 Peled et al.(1999)의 연구에서는 좀 더 구체적으로 접근했다. 어떤 실수를 서로 다른 표현방법으로 나타내었을 때 예비교사들은 이를 각각 어떻게 이해하고 인식하는지에 대해 조사한 것이다. 그 결과 예비교사들은 같은 수, 즉 0.333……과 $\frac{1}{3}$을 각각 무리수와 유리수로 인식하였다. 예비교사들이 바르게 알고 있는 유리수와 무리수 정의와는 상관없이 표현하는 방법에 따라 무리수와 유리수를 구분하는 오류를 범하고 있었다.

이 밖에도 동일한 수를 표현하는 방법에 따라 예비교사들이 수를 어떻게(무리수 또는 유리수) 인식하는지에 대한 연구들이 이루어 졌다. Zazkis & Sirotic(2004, 2010)와 Zazkis(2005)의 연구에서는 약 46명의 예비교사들을 대상으로 $\frac{53}{83}$을 소수로 나타내었을 경우와 분수 그 차체로 나타내었을 경우 등 다양한 방법으로 나타내고 이들 각각을 어떠한 수로 인식하는지 알아보았다. 그 결과 같은 수를 나타내고 있음에도 불구하고 소수로 나타내는 과정에서 나누기 초반에 순환마디가 쉽게 나타나지 않자 이를 무리수로 인식하였다. 반

면 분수 형태로 주어졌을 때는 유리수라고 인식하였다. 즉, 형식적으로 알고 있는 정의를 정확히 알고 있다고는 하나 이것이 실질적으로 수를 구분할 때는 그러한 개념이 전혀 연관되지 않음을 시사하고 있는 것이다. 이는 앞서 언급했던 Peled et al.(1999)와 같은 결과이다.

이러한 무리수 개념과 표현법 사이의 이해 불일치성에 대한 연구를 바탕으로 Sirotic & Zazkis(2007)은 교사의 개념 이해 방식을 형식적 차원, 직관적 차원, 알고리즘적 차원으로 분류하여 무리수 개념을 어떻게 이해하고 있는지에 대해 조사하였다. 46명의 예비교사들을 대상으로 무리수 개념을 크게 유리수 집합과 무리수 집합의 크기(sizes), 유리수와 무리수의 조밀성(fit together), 무리수 연산(operations) 부분으로 나누어 어떠한 차원으로 무리수 개념들을 이해하고 있는지 연구하였다. 그 결과 예비교사들은 무리수 집합의 크기(sizes) 개념에 대해 주로 직관적 차원에서 이해하고 있는 것으로 나타났으며, 유리수와 무리수의 조밀성과 무리수 연산에 대한 개념은 형식적 차원과 알고리즘 차원으로 각각 이해하고 있는 것으로 조사되었다. 즉, 크게 무리수에 대한 개념이라고 하나 세부 영역에서 각각 이해하고 있는 차원이 서로 달랐으며, 이들 차원이 서로 긴밀한 연관성이 이루어지고 있지 않음이 나타났다.

이러한 선행연구들을 바탕으로 이 연구에서는 Sirotic et al.(2007)과 같이 우리나라 예비교사들은 무리수 개념을 어떻게 이해하고 있는지에 대해 조사하였다. 이 연구에서는 무리수에 대한 많은 영역들 중, 무리수의 정의와 무리수 연산(operations)영역에 대한 예비교사들의 이해를 형식적, 직관적, 알고리즘적, 도구적 차원으로 분류하여 어떠한 이해가 이루어지고 있는지 알아볼 것이다.

2. 지식의 차원(dimensions of knowledge)

예비교사의 무리수 개념에 대한 수학적 지식 및 이해 상태를 파악하려는 이 연구의 목적에 따라 Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson(1998)이 제안한 분석틀(framework)과 Skemp(1976)의 연구에서 사용된 분석틀을 바탕으로 재구성 하였다.

Tirosh et al.(1998)에서는 어떠한 개념에 대한 지식과 이해를 '형식적 차원', '직관적 차원', '알고리즘적 차원'으로 분류하고 있었다. Tirosh et al.(1998)의 연구의 분석틀에는 학습자가 어떠한 개념을 이해하는 방법이 단순 암기에 의한 경우는 포함되지 않았다. 본 연구의 연구자는 예비교사들이 무리수 개념을 이해할 때에 Tirosh et al.(1998)의 세 가지 분석기준으로 분류될 수 없는 단순 암기에 의한 이해도 이루어 질 것이라 판단하였다. 이 때문에 Skemp(1976)의 연구에서 사용된 '도구적 이해'를 Tirosh et al.(1998)의 분석틀에 추가시켜 본 연구의 분석틀을 구성하였다. 여기서 도구적 이해는 학습자가 수학 개념을 이해할 때, 교과서에 나와 있는 정리나 정의를 그대로 암기하여 언급한 경우를 의미한다. 따라서 이 연구에서는 Tirosh et al.(1998)의 분석틀에 '도구적 차원(instrumental dimension)'을 추가하여 이해 방식에 대한 분석틀을 구성 하였다. 이렇게 재구성된 분석 틀을 사용하기에 앞서 이 연구에서는 예비교사의 수학적 지식에 대한 이해가 반드시 형식적 차원, 직관적 차원, 알고리즘적 차원 그리고 도구적 차원에 속한다고 가정한다.

다음의 제시된 내용은 Tirosh et al.(1998)가 제안한 세 가지 이해의 차원(dimensions of knowledge)과 Skemp(1976)의 연구에서 언급된 이해의 네 가지 종류 중 도구적 차원을 추가한 이 연구의 분석틀에 대한 구체적인 내용이다.

1) 형식적 차원(formal dimension)

형식적 차원은 어떠한 수학 개념을 증명이나 정리, 정의에 의해 이해하는 것을 의미한다. 즉, 학습자에게 문제가 주어졌을 때 학습자가 문제 해결에 필요한 개념이 포함된 정리나 정의를 이용하는 것이다. 예를 들어 유리수 집합과 무리수 집합의 원소의 개수를 비교할 때, 유리수는 가산 무한집합이고 무리수는 비가산(uncountable) 무한집합이므로 무리수 집합의 원소가 더 많다고 언급하는 것을 들 수 있다. 이는 위수(the set cardinality)를 이용하여 이해하고 있기 때문에 형식적 차원에 속하게 된다.

2) 직관적 차원(intuitive dimension)

직관적 차원은 학습자가 직관에 의해 어떠한 수학 개념을 이해하는 것을 의미한다. 즉, 수학적 본질(entities)에 대한 학습자 자신의 믿음이나 생각을 바탕으로 이해하는 것이다. Beth & Piaget(1961)의 연구에서 직관(intuition)은 오직 형식적이지 않은 생각을 의미하는 것이라고 언급했다. 이런 직관적 차원의 이해는 학습자가 직접적(directly)이고, 자기 확신적(self-evidence), 그리고 무비판적으로 지식을 이해하는 경향이 있다. 이러한 이유로 구체적인 예를 이용하여 수학 개념을 이해하는 것도 직관적 차원에 속한다. 하나 이상의 유한개의 예를 통하여 개념이나 정리를 일반화시켜 생각하는 과정에서 학습자의 믿음, 생각이 반영되기 때문이다. 또한 이러한 과정에서 무비판적인 개념 학습이 일어나게 된다. 직관적 차원의 지식의 예로는 학습자가 '전체는 부분보다 크다', '두 점을 연결하는 가장 짧은 선은 직선이다.', '모든 수는 successor를 갖는다.' 등을 들 수 있다(Fischbein & Aviv, 1983).

3) 알고리즘적 차원(algorithmic dimension)

알고리즘적 차원은 학습자가 어떤 개념을 이해하는데 있어서 가장 자연스러운 과정이다. 즉, 학습자가 어떠한 특정 수학 영역에 대한 개념을 이해하는 방법으로 규칙이나 규정을 이용하는 것을 의미한다. 또한 알고리즘적 차원에는 학습자가 다양한 표준(standard) 연산들에 포함된 연속적인 과정들을 설명할 수 있는 능력도 포함된다. 알고리즘적 차원의 예는 '모든 유리수에 $\sqrt{2}$나 $\sqrt{3}$을 합하면 무리수가 되므로, 무리수 집합의 원소의 개수는 적어도 유리수 집합의 원소의 두 배 이상이 될 수 있다. 따라서 무리수 집합의 원소의 개수가 유리수 집합의 원소의 개수보다 많다'고 이해하는 것을 들 수 있다.

4) 도구적 차원(Instrumental dimension)

도구적 차원은 학습자가 적당히 규칙이나 지식을 기억하고 있으나 '왜 그렇게 되는가'를 알지 못한 채 적절히 기억된 능력을 문제풀이에 적용하여 이해하는 것을 의미한다. 학습자가 자신의 풀이에 대한 이유를 논리적으로 설명할 수 없는 경우를 포함한다.

이상의 네 가지 지식의 차원은 위와 같이 따로 정의했다고 하여 각자가 모두 분리 된 것은 아니다. 특히 형식적, 직관적, 알고리즘적 차원은 모두가 서로 긴밀하게 연관되어 있다.

또한 어떠한 개념이든지 이들 세 가지 차원으로의 이해가 일관성 있게 뒷받침이 되어야 비로소 그 개념에 대해 완벽히 이해하고 학습하였다고 할 수 있다(Tirosh et al., 1998).

따라서 이 연구에서는 무리수의 정의, 무리수 연산 개념에 대해 예비교사들은 어떠한 이해를 갖고 있으며, 그러한 예비교사들의 이해는 어떠한 지식의 차원으로 이루어지고 있는지에 대해 알아보았다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

미래의 교사가 될 예비교사들의 무리수 개념에 대한 이해 상태를 파악하는 것이 의미 있을 것이라 판단하여 예비교사들을 연구 대상을 선정하였다. 특히 예비교사들 중에서도 사범대학 및 교육대학원 수학교육과에 재학 중이며 교직자격증 취득예정자인 학생 총 65명을 대상으로 하였다. 이 때 연구대상을 예비교사로 정하였으므로 수거된 설문지 중 교육대학원에 재학 중이나 현직 교사들은 설문에서 제외하였다. 구체적인 연구대상자들은 연구자의 접근성 편의를 위해 연구자가 소속되어 있는 교육대학원과 연구자의 지인들이 재학 중인 4년제 A대학교 사범대학, B대학교의 교육대학원, C대학교 교육대학원, D대학교 교육대학원, 그리고 E대학교 교육대학원의 학생들로 선정하였다. 연구에 참여한 예비교사들이 소속된 사범대학 및 교육대학원은 모두 서울에 위치해 있다. 학교당 구체적인 연구 참여 인원은 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 연구대상

인원·비율 / 소속 학교	인원(명)	비율(%)
A대학교 사범대학	1	1.5
B대학교 교육대학원	6	9.3
C대학교 교육대학원	12	18.5
D대학교 교육대학원	1	1.5
E대학교 교육대학원	44	67.7
무응답	1	1.5
총	65	100.0

2. 연구도구

이 연구는 예비교사들이 무리수 정의, 무리수의 연산에 대해 어떠한 이해를 갖고 있으며, 그러한 예비교사들의 이해는 어떠한 지식의 차원으로 이루어지고 있는지 살펴보기 위한 연구도구로 문항지를 이용하였다. Sirotic & Zazkis(2007)이 예비교사들의 무리수 개념에 대한

지식의 차원을 분석하기 위해 이용하였던 설문지를 재구성하였다. 설문지는 크게 두 부분으로 구분되었다. 예비교사들의 배경을 묻는 부분과 무리수 개념을 묻는 부분으로 구성되었으며, 무리수 개념에 대한 부분은 무리수 정의, 무리수 연산에 대한 문항이 포함되었다. 특히 무리수 연산에 대한 문항은 하위 문항이 구성되어 있어 총 3문항으로 이루어 졌다. 구성된 설문지의 오류와 타당성을 검증받기 위해 수학과 교수님 1인을 통하여 점검하고, 수학교육과에 재학 중인 예비교사 2인에게 예비검사를 실시하고, 각각의 문항에 대한 의견을 받아 수정하였다. 또한 예비검사에 참여한 예비교사 2인은 본 검사에서 제외하였다. 설문을 실시하기 전 예비교사들에게 본 설문지의 주제(무리수 개념)에 대해 사전 예고 없이 설문이 이루어졌다. 이는 연구자가 예비교사라면 당연히 무리수에 대한 정의 및 연산에 대한 기초적인 지식과 이해가 기본적으로 이루어져 있다고 판단했기 때문이다. 설문 시간은 제한을 두지 않았으나, 설문에 답하는데 예비교사들은 대략 1시간미만의 시간이 소요되었다.

3. 자료분석

사범대와 교육대학원 총 5 곳에서 65명의 예비교사들을 대상으로 설문을 실시하고 수거된 설문지를 엑셀파일을 이용해 정리하였다. 그 후 각 문항 별로 정답과 오답의 빈도수를 조사하였다. 특히 무리수의 정의를 묻는 문항 1번에 대해서는 한명의 예비교사가 무리수의 정의에 대해 여러 가지 답변을 한 경우들이 있었다. 이러한 응답은 복수응답으로 처리하여 빈도수를 조사하였다. 이 때, 그렇게 응답한 이유에 대해 설명하도록 하지는 않았다. 문항에서 무리수의 정의 자체를 물어보고 있기 때문에 그 이유에 대해 설명하도록 하는 것이 무의미하다고 판단했기 때문이다. 따라서 무리수 정의 영역에 속하는 예비교사들의 설문 응답은 지식의 차원으로 따로 분류하지 않았다. 무리수의 연산에 대한 각 문항에서 그렇게 답한 이유를 설명하도록 하는 내용에 대해서는 모든 참여자들의 설문내용을 읽고, 지식의 차원(dimensions of knowledge)으로 분류하였다. 각 문항들의 이유를 지식의 차원(dimensions of knowledge)에 속한 세부적인 차원으로 구분하기 위하여 형식적 차원(formal dimensions), 직관적 차원(intuitive dimensions), 알고리즘적 차원(algorithmic dimensions), 도구적 차원(instrumental dimension), 각각의 차원에 해당하는 대표적인 답변이나 단어를 선정하여 코드북(code book)을 만들었다. 그리고 연구 참여자들이 작성한 응답을 이에 해당하는 차원으로 분류하였다. 각 문항별로 비슷한 응답들의 공통점을 찾고, 이와는 반대로 차이점을 조사하였다. 뿐만 아니라 이러한 과정을 통해 예비교사들의 무리수 개념에 대한 옳지 않은 개념에 대해서도 조사하였다.

Ⅳ. 연구 결과

예비교사들의 무리수에 대한 개념에 대한 이해와 그러한 이해가 이루어지고 있는 차원을 파악하는 것이 이 연구의 목적이다. 이에 따라 무리수의 개념을 크게 두 부분, 즉 무리수의 정의, 무리수의 연산(덧셈, 곱셈)영역으로 나누어 문항지를 제작하였다. 사범대학과 교육대학원 수학교육과에 재학 중인 65명의 예비교사를 대상으로 설문을 실시하였다. 수거된 문항지를 바탕으로 각각의 문항별로 예비교사들이 응답한 답에 대한 정답과 오답을 분류하여 빈도

수를 조사하였으며 세부 빈도수는 <표 2>과 같다. 다음으로 무리수 개념에 대해 갖고 있는 이해와 지식의 차원을 분류하였다. 연구 결과 무리수 개념에 대해 올바른 이해가 이루어지고 있는 예비교사들도 있었지만 잘못된 이해를 하고 있는 예비교사들도 다수 있었다. 또한 무리수 개념에 대해 예비교사들 각각이 이해하고 있는 차원이 다양하게 분포하고 있는 것으로 조사되었다. 그러나 예비교사 개개인들에게 이루어지고 있는 이해의 차원은 서로 긴밀하게 연관되지 못하고, 특정차원으로의 이해만 이루어지고 있었다.

문항지에 포함된 각각의 무리수 개념에 대한 예비교사들의 설문결과에 대해 구체적으로 제시하도록 하겠다.

<표 2> 문항지에 대한 정답 및 오답 빈도수

영역	문제	정답	오답(기타)	무응답	총
Ⅰ. 무리수의 정의 (복수응답가능)	1	73 (92.4%)	6 (7.6%)	0 (0.0%)	79 (100%)
Ⅱ. 무리수 연산	2-(1)	28 (43.1%)	36 (55.4)	1 (1.5%)	65 (100%)
	2-(2)	59 (90.7%)	6 (9.3%)	0 (0.0%)	65 (100%)

1. 무리수 정의

문항지 제일 첫 번째 영역인 ‘Ⅰ. 무리수의 정의’에서 ‘무리수의 정의를 알고 있는 대로 적으시오’라는 물음에 <표 3>과 같은 응답이 언급되었다.

<표 3> 문항 1에 대한 응답(복수응답가능)

응답 \ 인원·비율	인원(명)	비율(%)
유리수가 아닌 수 (분수로 나타낼 수 없는 수)	54	68.3
순환하지 않는 무한소수	19	24.1
기타	6	7.6
총	79	100

주관식 문항이기 때문에 무리수의 정의에 대해 한명의 예비교사가 여러 가지 답변을 한 경우도 있었으며, 이러한 응답은 복수응답으로 처리하였다. 68.3%(54명)의 예비교사들이 무리수 정의를 ‘유리수가 아닌 수, 즉 분수로 나타낼 수 없는 수’라고 올바르게 답변하였다. 다음으로 24.1%(19명)이 무리수는 ‘순환하지 않는 무한소수’를 말한다고 답변하였다. 약 92%에 해당하는 연구 참여자들이 무리수의 정의를 올바르게 알고 있었다. 이들 중 무리수의 정의를 ‘유리수가 아닌 수, 즉 분수로 나타낼 수 없는 수’와 ‘순환하지 않는 무한소수’ 둘 다

언급한 예비교사는 11명 이었으며 나머지 51명은 둘 중 한가지로 무리수를 정의 하였다.
이 밖에 예비교사들이 언급한 무리수 정의에 대한 기타 응답들은 [그림 1]에서 제시한다.
설문에 참여한 예비교사들의 약 90%가 무리수의 정의를 제대로 파악하고 있었다. 하지만 [그림 1]에서 언급된 6가지의 기타 의견을 통해 몇몇의 예비교사들은 무리수의 정의를 정확히 알고 있지 못하고 있음을 알 수 있다.

- $\sqrt{\ }$ 을 사용하지 않고 특정한 수로 표현하지 못하는 수.
- 자연수로 분할한 단위분수($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$)를 기준으로 표현할 수 없는 수.
- 임의의 수 a가 임의의 수 b의 제곱수로 표현되지 않을 때 a을 무리수라고 함, 즉 임의의 유리수 a, b에 대하여 $a = b^2$이 될 수 없는 a을 의미 함.
- 이치에 맞지 않는 수.
- $x^2 = 2$를 만족하는 x가 유리수에 존재하지 않아 이러한 x을 타나내기 위해 만들어진 수.
- 순허수나 허수부로 표현되는 수.

[그림 1] 문항 1에 대한 예비교사들의 기타 응답

우선, '$\sqrt{\ }$ 을 사용하지 않고 특정한 수로 표현하지 못하는 수'는 무리수의 수학적 정의가 아니다. 단지 무리수를 나타낼 수 있는 방법들 중 하나에 불과하다. 무리수를 나타낼 수 있는 방법에는 '$\sqrt{\ }$'를 사용하는 것도 있다. 하지만 이는 일부분 일 뿐이다. '$\sqrt{\ }$'를 이용하여 나타낼 수 없는 무리수가 무수히 더 많기 때문이다. '임의의 수 a가 임의의 수 b의 제곱수로 표현되지 않을 때 a을 무리수라고 함, 즉 임의의 유리수 a, b에 대하여 $a = b^2$이 될 수 없는 a을 의미 함'을 살펴보면 '임의의 유리수 a, b에 대하여 $a = b^2$이 될 수 없는 a을 의미 함'에서 a를 무리수라고 언급하고 있다. 그러나 전체조건에서 이미 a와 b을 유리수에서 뽑았으므로 다시a을 무리수라고 한다는 것은 모순이다. 즉 이와 같이 언급한 예비교사 스스로의 무리수 정의에 대한 지식이 명확하게 정리되어 있지 못한 것이다.
또한, '이치에 맞지 않는 수'라는 응답에 대해서는 무리수(無理數)의 한자 뜻을 그대로 해석한 것으로 수학에서의 무리수와는 다른 의미를 갖는다. 수학에서 무리수(無理數)의 '리(理)'는 'ratio'의 뜻을 갖기 때문이다. 따라서 이는 적절한 정의가 될 수 없다. 다음으로 무리수의 정의를 '$x^2 = 2$을 만족하는 x가 유리수에 존재하지 않아 이러한 x을 나타내기 위해 만들어진 수'라고 언급한 예비교사도 있었다. 이 예비교사는 또 다른 무리수의 정의로 '유리수가 아닌 수'라고도 올바르게 답하였다. 올바른 무리수의 정의를 알고 있었지만, 한편으로는 무리수를 정의하기 위한 다른 방법으로 '$x^2 = 2$을 만족시키는 x을 타나내기 위해 만들어진 수'고 언급하였듯 하나의 무리수 예를 통해 편협하게 무리수를 인식하고 있음을 알 수 있었다. 이는 학교현장에서 학생들이 무리수를 생각하면 $\sqrt{2}$만을 생각해 내는 원인이 될 수 있다.
마지막 기타 답변으로는 '순허수나 허수부로 표현되는 수'를 들 수 있다. 이 답변을 한 예

비교사는 무리수의 정의를 '유리수가 아닌 수'와 '순허수나 허수부로 표현되는 수'라고 복수 응답을 하였다. 즉, 무리수와 복소수 개념을 혼동하고 있는 예비교사도 조사되었다.

2. 무리수의 연산

무리수의 연산에 대한 예비교사들의 이해를 살펴보기 위한 영역 'Ⅱ. 무리수 연산'은 총 두 개의 문항으로 이루어져 있으며 이 문항들은 Sirotic et al.(2007)에 제시된 문항을 참고하였다. 무리수의 연산은 중학교 3학년 교과과정뿐만 아니라 고등학교 수학교과과정에서도 전반적으로 다루어지고 있다(교육과학기술부, 2011a). 이 때문에 장차 교사가 될 예비교사들이 무리수의 연산에 대해 어떠한 이해를 갖고 있고, 어떠한 지식의 차원으로 이해하고 있는지 알아볼 필요가 있다. 따라서 예비교사들의 무리수 연산에 대한 이해와 지식의 차원을 알아보기 위해 예비교사들에게 문항 2-(1)에서는 무리수의 합에 대한 명제, 문항 2-(2)에서는 무리수의 곱에 대한 명제를 제시하고 각각 참·거짓을 판별하도록 한 후 그렇게 생각한 이유에 대해 설명하도록 하였다.

<표 4>에서 제시한 것과 같이 문항 2-(1)에서 제시된 명제 '임의의 두 양의 무리수들의 합이 항상 무리수이다.'가 '거짓'이라고 응답한 예비교사는 43.1%(28명)이었으며, '참'이라고 응답한 예비교사는 55.4%(36명)이었다. 이 밖에 참·거짓을 판별하지 않은 예비교사도 1.5%(1명)있다. 또한 문항 2-(2)의 명제 '임의의 서로 다른 두 무리수들의 곱은 항상 무리수이다.'에 대해서 '거짓'이라고 응답한 예비교사는 90.7%(59명), '참'이라고 응답한 예비교사는 9.3%(6명)이었다.

<표 4> 문항2-(1), 문항 2-(2)에 대한 응답

문항	거짓(명) (%)	참(명) (%)	무응답(명) (%)	총 (%)
(1) 무리수 + 무리수 = (항상) 무리수	28 (43.1%)	36 (55.4%)	1 (1.5%)	65 (100%)
(2) 무리수 × 무리수 = (항상) 무리수	59 (90.7%)	6 (9.3%)	0 (0%)	65 (100%)

문항 2-(1)과 문항 2-(2)에서 제시된 두 명제 모두 '거짓'인 명제이다. 문항 2-(1)의 무리수의 합에 대한 명제에 대해서는 정답률에 비해 오답률이 더 높게 나타났고, 문항 2-(2)의 무리수의 곱에 대한 명제에 대해서는 정답률이 높게 나타났다. 특히 예비교사들은 문항 2-(1)과 2-(2)에서 자신의 답에 대한 이유를 언급할 때 주로 반례를 통한 증명을 이용하였다. 즉, 예비교사들은 무리수 연산에 대한 개념을 이해할 때 증명을 이용하여 이해하는 형식적 차원으로의 이해를 하고 있었다. 이 밖에도 직관적 차원, 도구적 차원으로의 이해가 이루어지고 있는 예비교사들도 조사되었다. 반면 알고리즘 차원으로의 이해가 이루어지고 있는 예비교사는 나타나지 않았다.

1) ‘거짓’이라고 응답한 예비교사들의 지식의 차원

무리수 연산에 대한 영역의 문항 2-(1)과 2-(2)에서 서로 상반된 정답률이 나왔다. 무리수의 합에 대한 문항 2-(1)에서 정답을 맞힌 예비교사는 절반도 채 되지 않는 반면, 무리수의 곱에 대한 문항 2-(2)에서는 약 90%의 예비교사들이 정답을 맞혔다. 이들은 무리수 연산에 대해 형식적 차원과 도구적 차원으로 이해하고 있었다. 각 차원에 속하는 구체적인 빈도수에 대해서는 <표 5>에서 제시한다.

예비교사들이 제시한 반례를 모두 제시하지는 않았지만 [그림 2]에 나타난 것과 같이 형식적 차원에 속한 예비교사들은 자신의 답에 대한 이유로 ‘$\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})=3$’, ‘$(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=6$’와 같은 반례를 들어 설명하였다. 즉, 이와 같이 명제가 옳지 않다는 것을 반례를 통해 이해하고 있는 것이다. 이에 해당하는 예비교사들은 무리수의 연산에 대한 지식의 차원이 형식적 차원에 속한다. 문항 2-(1)에서 ‘거짓’이라고 응답한 예비교사들 28명 중 24명이 형식적 차원으로 이해하고 있었다. 또한 문항 2-(2)에서는 ‘거짓’이라고 응답한 예비교사들 59명 중 44명이 형식적 차원으로 무리수의 연산을 이해하고 있었다.

그에 반해 아무런 이유 언급 없이 답만을 언급한 경우도 문항 2-(1)에서 1명, 문항 2-(2)에서 2명 있었다. 이들은 ‘왜 그렇게 되는지’를 알지 못한 채 적절히 기억된 능력을 이용하여 답을 맞힌 것이며, 이에 해당하는 예비교사들은 무리수 연산에 대한 지식의 차원이 도구적 차원에 해당한다. 다음으로 기타에 해당하는 예비교사들은 문항에 언급된 명제들의 조건을 제대로 파악하지 못하여 올바르지 않은 이유를 언급한 경우이므로 지식의 차원을 구분하지 않았다. 예를 들어 문항 2-(1)에서 ‘임의의 두 양의 무리수들의 합’을 인지하지 못하고 반례로 ‘$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$’를 들어 ‘거짓’임을 증명한 경우이다. 또한 문항 2-(2)에서는 ‘임의의 서로 다른 두 무리수들의 곱’을 인지하지 못하고 반례로 ‘$\sqrt{3}, \sqrt{3}$’을 들어 ‘거짓’임을 증명한 경우이다.

<표 5> 문항2-(1)과 문항2-(2)에서 ‘거짓’이라고 응답한 예비교사들의 지식의 차원

문항	거짓 (명) (%)	형식적 차원 (명) (%)	도구적 차원 (명) (%)	기타 (명) (%)
(1) 무리수 + 무리수 = (항상) 무리수	28 (43.1%)	24 (37.1%)	1 (1.5%)	3 (4.5%)
(2) 무리수 × 무리수 = (항상) 무리수	59 (90.7%)	44 (67.7%)	2 (3.0%)	13 (20.0%)

- 반례) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4$, 4는 무리수가 아니다.
- 반례) $A=\sqrt{2}$, $B=3-\sqrt{2}$
  A와 B는 각각 무리수이지만 A+B=3으로 유리수이다.
- $(5-\sqrt{3})+\sqrt{3}=5$
- $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, 1은 무리수가 아니다.
- $\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$
- $\pi, \dfrac{1}{\pi}$은 무리수이다. 그러나 $\pi\times\dfrac{1}{\pi}=1$이다.

[그림 2] 문항2-(1)과 문항2-(2)에 대한 형식적 차원의 이해

2)참'이라고 응답한 예비교사들의 지식의 차원

무리수의 합에 대한 문항 2-(1)과 무리수의 곱에 대한 문항 2-(2)에 대해 각각 55.4%(36명), 9.3%(6명)의 오답률을 보였다. 특히 무리수의 합에 대한 명제의 참·거짓을 묻는 문항 2-(1)의 오답률은 설문에 참여한 예비교사들의 절반을 넘는 수치이다. 이에 속하는 예비교사들이 언급한 무리수 연산에 대한 응답들은 형식적 차원으로의 이해와 직관적 차원의 이해, 도구적 차원으로의 이해를 통한 것들이었다. 각 차원에 속하는 구체적인 빈도수에 대해서는 <표 6>에서 제시한다. 특히 문항 2-(1)의 명제 '임의의 두 양의 무리수들의 합은 항상 무리수 이다.'에서 '참'이라고 응답한 36명의 예비교사들 중 23명이 자신의 생각이나 믿음을 바탕으로 한 직관적 차원의 이해를 하고 있었다. 나머지 12명의 예비교사들은 문항 2-(1)의 명제가 '참'인 이유를 '모르겠다.', '몰라요.'라고 응답하였거나 이유를 적지 않았으며, 이들은 암기가 바탕이 된 도구적 차원의 이해를 하고 있었다. 문항 2-(2)의 명제 '임의의 서로 다른 두 무리수의 곱은 항상 무리수 이다.'에서 '참'이라고 응답한 6명의 예비교사들 중 1명만이 형식적 차원으로 이해하고 있었고, 나머지 5명의 예비교사들은 도구적 차원으로 이해하고 있었다.

예비교사들이 문항 2-(1)과 문항 2-(2)에서 '참'이라고 응답한 것에 대해 그렇게 생각한 이유는 [그림 3]과 [그림 4]와 같다. 특히 [그림 3]에 제시된 형식적 차원의 이해에 속한 예비교사는 '모순'을 이용하여 명제 '무리수의 곱은 항상 무리수이다.'를 증명하였지만, 증명하는 과정에서 논리적인 오류가 있음을 알 수 있다. [그림 4]에 제시된 예비교사들의 응답들은 직관적 차원으로의 이해가 이루어진 것들이며, 이 응답들은 무리수의 연산에 대한 많은 잘못된 응답들 이다.

언급된 이유들 중 '직관적으로 생각했을 때 순환하지 않는 소수로 합한다면 양의 무리수들의 합과 곱은 언제나 무리수 이다.', '순환하지 않는 소수는 더해도 순환하지 않을 듯하다.' 그리고 '무한소수의 합은 항상 무한소수가 된다.'를 살펴보면 예비교사들은 무리수 그 자체를 하나의 수로 인식하는 것이 아니라 무리수를 순환하지 않는 무한 소수로 다시 표현하여 생각하고 있었다. 뿐만 아니라 '$\dfrac{q}{p}$꼴로 나타낼 수 없는 두 수의 합이 $\dfrac{b}{a}$(유리수)꼴이 될 수 없을 것 같다. (p, a는 0이 아닌 정수, b, q는 정 수)', '양의 통약불가능한(incommensurable) 수의 합은 여전히 통약불가능하므로 무리수이다.'를 통해 서는 예비교사들이 무리수를 분수

로 표현할 수 없는 수라고 다시 표현하여 인식하고 있음을 알 수 있다. '양의 무리수들의 합이므로 유리수가 되는 경우가 없다.' 그리고 '임의의 양의 무리수를 모아놓은 집합은 덧셈에 대하여 닫힌 집합이다.'고도 언급한 예비교사들도 있었다.

<표 6> 문항2-(1)과 문항2-(2)에서 '참'이라고 응답한 예비교사들의 지식의 차원

문항	참 (명) (%)	형식적 차원 (명) (%)	직관적 차원 (명) (%)	도구적 차원 (명) (%)	기타 (명) (%)
(1) 무리수 + 무리수 = (항상) 무리수	36 (55.4%)	0 (0%)	24 (36.9%)	12 (18.5%)	0 (0%)
(2) 무리수 × 무리수 = (항상) 무리수	6 (9.3%)	1 (1.5%)	0 (0%)	5 (7.8%)	0 (0%)

- a, b를 무리수, c를 유리수라고 하자. $(a>0, b>0, a\neq 0)$ $a+b=c$라 하면 $(a+b)^2=c^2$, $a^2+b^2+2ab=c^2$, $ab=\dfrac{(c^2-a^2-b^2)}{2}$ 이다. 이때, 우변은 유리수이나 좌변은 무리수 이므로 모순이다.

[그림 3] 문항2-(1)에 대한 형식적 차원의 이해

- 직관적으로 생각했을 때 순환하지 않는 소수로 합한다면 무리수들의 양의 합과 곱은 언제나 무리수 이다.
- 순환하지 않는 소수는 더해도 순환하지 않을 듯하다.
- $\dfrac{q}{p}$꼴로 나타낼 수 없는 두 수의 합이 $\dfrac{b}{a}$(유리수)꼴이 될 수 없을 것 같다. (p, a는 0이 아닌 정수, b, q는 정수)
- 양의 무리수들의 합이므로 유리수가 되는 경우가 없다.
- 양의 통약불가능한 수의 합은 여전히 통약 불가능하므로 무리수이다.
- 무한소수의 합은 항상 무한소수가 된다.
- 임의의 양의 무리수를 모아놓은 집합은 덧셈에 대하여 닫힌 집합이다.
- a, b를 무리수, c를 유리수라고 하자. $(a>0, b>0, a\neq 0)$ $a+b=c$라 하면 $(a+b)^2=c^2$, $a^2+b^2+2ab=c^2$, $ab=\dfrac{(c^2-a^2-b^2)}{2}$ 이다. 이때, 우변은 유리수이나 좌변은 무리수 이므로 모순이다.

[그림 4] 문항2-(1)과 문항2-(2)에 대한 직관적 차원의 이해

이들의 공통점은 명확한 정리나 증명, 논리 없이 오로지 자신의 믿음이나 생각을 바탕으로 무리수 연산에 대한 성질들을 이해하고 있다는 것이다. 이러한 이유 때문인지 예비교사들은 무리수 연산에 대한 옳지 않거나 논리성이 부족한 지식을 갖고 있었다.

Ⅴ. 결론 및 논의

이 연구는 예비교사들이 무리수의 정의, 무리수 연산에 대해 어떠한 이해를 갖고 있으며, 이러한 이해는 어떠한 지식의 차원으로 이루어지고 있는지에 대해 조사한 것이다. 교사양성기관인 사범대학과 교육대학원 총 5곳에서 65명의 예비교사들을 대상으로 문항지를 배포 및 수거하여 예비교사들의 무리수에 대한 이해와 지식의 차원을 조사하였다.

연구를 통해 무리수의 정의, 무리수 연산 영역에서 예비교사들이 갖고 있는 이해와 그러한 이해가 어떠한 지식의 차원으로 이루어지고 있는지 알 수 있었다. 뿐만 아니라 무리수 개념에 대해 예비교사들이 갖고 있는 지식 오류와 지식의 차원을 알 수 있었다. 예비교사들은 무리수 연산의 영역의 개념들을 다양한 지식의 차원으로 이해하고 있지 못하고 있었다. 문항지에서 정답을 맞힌 예비교사들의 이해 방식은 주로 형식적 차원, 직관적 차원, 도구적 차원중 한 가지 차원으로의 이해가 이루어지고 있었다. 알고리즘적 차원에 속한 이해 방식은 단 하나였다.

형식적 차원 이외에 직관적 차원으로의 이해가 바탕이 된 응답들은 옳지 않거나 논리성이 부족한 것들이었다. 따라서 이러한 응답들을 통해 예비교사들이 무리수 개념에 대해 갖고 있는 부족한 지식과 이해 정도를 알 수 있었다.

무리수의 정의 영역에 대해서는 대다수의 예비교사들이 올바른 지식을 갖고 있었다. 이는 연구에 참여한 예비교사들이 무리수 정의에 대해 제대로 대답하지 못했던 Fischbein et al.(1995)의 연구결과와 상반된다. 이와는 반대로 70명의 예비교사들을 대상으로 무리수의 정의에 대해 어떻게 알고 있는지 조사했을 때 다수의 예비교사들이 옳은 정의를 알고 있음을 조사한 Peled et al.(1999)의 연구와 비슷한 결과이다. 적은 수이긴 하지만 무리수의 정의에 대해 옳지 않은 지식을 갖고 있는 예비교사들도 있었다. 이들은 무리수를 '$\sqrt{\ }$를 사용하지 않고는 특정한 수로 표현하지 못하는 수', '이치에 맞지 않는 수', 혹은 '순허수나 허수부로 표현되는 수' 등 이라고 언급하였다. 이를 통해 몇몇의 예비교사들이 무리수의 수학적 정의를 정확히 파악하지 못하고 있으며, 심지어 복소수 개념과 혼동하고 있음을 알 수 있었다. 이러한 예비교사들의 무리수 정의에 관한 잘못된 이해는 박윤희 외(2004), 김부윤 외(2008)의 연구에서 조사된 학생들의 무리수에 관한 잘못된 이해와 매우 흡사하다.

무리수 연산에 대한 영역에서 이 연구에 참여한 예비교사들은 무리수 연산에 대한 개념을 주로 형식적 차원이나 직관적 차원으로 이해하고 있었다. 이는 무리수 연산에 대해서 주로 알고리즘적 차원으로 이해하고 있다고 언급한 Sirotic et al.(2007)의 연구결과와는 상반된 결과이다. 본 연구 결과에서 나타났듯이 문항 2-(1)과 문항 2-(2)에 제시된 명제가 '거짓'이라고 생각한 이유에 대해 대다수의 예비교사들이 '반례'를 이용하여 설명하였다. 그러나 문항 2-(1)의 덧셈에 대한 무리수 연산에 대한 명제에서는 43.1%의 낮은 정답률을 보였다. 그 이유는 '무리수는 덧셈 연산에 대해 닫혀있다'는 예비교사 자신의 생각이나 믿음이 바탕이 된 직관적 차원으로의 이해가 이루어지고 있었기 때문이다.

끝으로 이 연구의 결과에서 나타난 공통적인 부분을 정리 하자면, 주로 무리수 개념을 형식적 차원으로 이해하고 있는 예비교사들은 올바른 답을 언급하였다. 그러나 직관적 차원으로 이해하고 있는 예비교사들은 각기 다른 자신의 생각과 믿음이 바탕이 된 이해가 이루어지고 있어 여러 가지 옳지 않은 지식을 갖고 있음을 알 수 있었다. Tirosh et al.(1998)는 직관적 차원으로의 이해 역시 어떠한 수학적 개념을 완벽하게 이해하는데 반드시 필요한 요소라고 언급하였다. 그러나 연구 결과 직관적 차원으로의 이해가 이루어지고 있는 예비교사들은 대다수가 논리성이 부족하고, 옳지 않은 지식을 갖고 있었다. 이는 형식적 차원과 알고리즘적 차원으로의 이해가 뒷받침되지 못한 채 오직 직관적 차원으로의 이해만이 이루어지고 있기 때문이라 추측된다. 이 밖에 각각의 문항에서 정답을 맞혔지만 지식의 차원이 '도구적 차원'에 속하는 예비교사들은 각각의 개념에 대해 완벽하게 이해하고 있다고 할 수 없을 것이다. 왜 그러한 답이 나오는지에 대해 스스로가 이유를 설명할 수 없기 때문이다. 연구에 참여한 대다수의 예비교사들은 무리수 개념들을 직관적 차원에서 이해하고 있었다. 이러한 예비교사들의 형식적 차원과 알고리즘 차원으로의 이해의 부족은 무리수 개념을 확실하게 이해하는데 부정적인 영향을 미칠 것이다.

무리수 개념은 수학을 학습하는데 있어 중요한 영역이다. 학생들은 무리수를 배움으로서 수 체계를 실수 범위까지 확장시킬 수 있으며, 학생들이 무리수와 이와 관련된 개념 및 성질 등을 학습하는 것은 수학을 배우는데 있어 매우 필수적이기 때문이다(노민숙, 2002; 이영란 외, 2006; Sirotic et al., 2007). 그러나 연구 결과 예비교사들 조차도 무리수 관련 개념에 대해 완벽하지 않은 지식과 이해가 이루어지고 있음을 알 수 있었다. 이러한 교사의 잘못된 지식과 이해는 무엇보다 학생들 가르치는데 부정적인 영향을 미치게 될 것이다(Dooran, Verschaffel, & Onghena, 2002; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Sirotic & Zazkis, 2007). 중학교 3학년 때 처음으로 학습하는 무리수에 대해 학생들은 어려움을 느끼며, 많은 오개념을 갖고 있다(박윤희 외, 2004; 김부윤 외, 2008). 이러한 원인 중 하나는 예비교사들을 대상으로 한 이변 연구에서 조사되었듯이 교사들의 무리수에 대한 확실한 지식과 이해가 이루어지지 않았기 때문일 것이라 생각된다.

2009개정 교육과정에서는 교사들이 수업에서 학생들에게 의미 있는 발문을 하도록 요구하고 있다. 또한 학생들이 문제를 해결할 때에 기본적인 개념, 원리, 법칙, 기능을 이용할 수 있도록 도움을 줄 것을 권고하고 있다. 하지만 이 연구의 결과를 보았을 때, 2009개정 교육과정에서 언급하고 있는 교수·학습 방법을 예비교사들이 시행하고 만족시키기에는 어려움이 있어 보인다. 이 연구의 연구 결과에서 보였듯이 현장에 나아갈 예비교사들 조차 무리수 정의, 연산영역에서 잘못된 이해가 이루어지고 있기 때문이다.

앞서도 언급했듯이 Tirosh et al.(1998)는 도구적 차원을 제외한 형식적 차원, 직관적 차원 그리고 알고리즘적 차원으로의 이해가 일관성 있게 뒷받침 되어야 비로소 어떠한 수학 개념에 대해 확실하게 이해하고 학습하였다고 할 수 있다고 한다. 또한 교사가 수학 개념에 대해 다양한 차원으로의 이해가 뒷받침이 되어야 다양한 방법이나 전략으로 학생들에게 수학 개념을 융통성 있게 가르쳐 학습자의 이해를 원활하게 이끌 수 있다(Dooran et al., 2002). 그러나 연구 결과에서 예비교사들은 각각의 무리수 개념에 대해 편향된 지식의 차원을 갖고 있는 것을 알 수 있었다. 이는 분명 예비교사들이 미래에 학교 현장에 나아가서 학생들의 학습에 부정적인 영향을 미치게 될 것이다.

교사의 수학개념에 대한 지식은 질 좋은 수업, 교과서와 교사용 지도서의 효과적인 사용, 그리고 학생들의 학습에 직·간접적인 영향을 미친다. 따라서 교사의 수학개념에 대한 정확

한 지식과 다양한 차원(형식적 차원, 직관적 차원, 알고리즘적 차원)으로의 이해는 학생들에게 수학 개념을 가르치고 학생들의 이해를 돕기 위한 필수적인 요소일 것이다. 이 연구를 통해 조사된 예비교사들에 대한 상태는 비단 무리수 개념에만 국한되어 있지 않다고 생각한다. 따라서 이번 연구 결과가 현재 예비교사들에게 미래의 수학교사로서 스스로를 다시 돌아볼 수 있는 기회를 제공할 것이라 기대한다. 예비교사로서의 사명감을 가지고 본인의 수학적 지식에 대해 다시 한 번 점검하고 다져야 할 필요가 있을 것이다. 또한 보다 실력 있는 교사를 양성할 수 있도록 교사교육 프로그램도 변화해야 할 것이다. 교원임용고시만을 목적으로 하는 교사 양성기관이 아닌 예비수학교사로서 학생들에게 실력 있는 교사를 배출하기 위한 노력이 필요하다.

참고 문헌

교육과학기술부(2011a). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8].

교육과학기술부(2011b). 중학교 교육과정. 교육과학기술부 고지 제2011-361호 [별책 3].

김부윤·이지성(2008). 제곱근 개념에 대한 학생들의 이해와 정당화 유형. 중등교육연구, 56(2), 447-464.

김부윤·정영우(2008). 중학교에서의 무리수 지도에 관하여. 한국수학사학회지, 21(1), 139-156.

노민숙(2002). 제곱근과 무리수 개념의 이해 실태 분석에 관한 연구. 한국교원대학교대학원 석사학위논문.

이영란·이경화(2006). Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례. 대한 수학교육 학회지 수학교육학 연구, 16(4), 297-312.

박윤희·박달원·정인철(2004). 중학교 수학에서 무리수 개념에 관한 학습자의 이해 연구. 한국학교수학회논문집, 7(2), 99-116.

Boston, M. D., & Smith, M. S.(2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Educations, 40*(2), 119-156.

Dooran, W. V., Verschaffel, L., & Onghena, P.(2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Educations, 33*(5), 319-351.

Fischbein, E., & Aviv, T.(1983). Intuition and analytical thinking in mathematics education. *Zentralblatt fu r Didaktik der Mathematik, 15*(2), 68-74.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D.(1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 29-44.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L.(2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Nicol, C. C., & Crespo, S. M(2006). Learning to teach with mathematics textbooks: how preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 331-355.

Peled, I., & Hershkovitz, S.(1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39-46.

Sirotic, N., & Zazkis, R.(2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studied in Mathematics, 65*, 49-76.

Skemp, R.(1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M., & Silver, E. A.(2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. NewYork: Teachers College Press.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., & Wilson, J.(1998).'Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers', Retrieved June 5th,2003 from the World Wide Web: http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Zazkis, R., & Sirotic, N.(2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. *Proceedings of Psychology of Mathematics Education Conference, 28*(4), 497-504.

Zazkis, R., & Sirotic, N.(2010). Representing and defining irrational numbers: exposing the missing link. *Conference Board of the Mathematical Sciences issues in mathematics education, 16*, 1-27.

Zazkis, R.(2005). Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 207-218.

Preservice secondary matheamtics teachers′ understanding of irrational numbers[3)]

Sunbi Lee[4)]

Abstract

The purpose of this study is to examine the preservice secondary mathematics teachers understanding and dimensions of knowledge about definition of irrational numbers and irrational numbers and operations. I adopted a framework consisting of formal dimensions, intuitive numbers, algorithmic dimentions suggested by Tirosh et al.(1998) by adding instrumental dimension for his study.

I surveyed 65 preservice secondary mathematics teachers who are in bachelor program and post-bachelor program for teacher certificate by using a questionnaire suggested by Sirotic and Zazkis(2007). s

The results of this study suggest that 83.1% of the participants gave correct answers in definitions of irrational numbers. 43% of the preservice secondary teachers gave correct answers in adding with irrational numbers. Also 91% of the preservice teachers gave correct answers in multiplying irrational numbers. The preservice teachers appeared to understand irrational numbers and operations at formal dimension. More than half of the preservice teachers gave incorrect answers in adding irrational numbers and a few participants gave incorrect in multiplying irrational numbers. The preservice teachers seemed to understand irrational numbers and operations at intuitive or instrumental dimension. The results also suggest that the preservice secondary mathematics teachers have incorrect understanding about irrational numbers.

Key Words : Understanding, Irrational Numbers, Preservice Secondary Mathematics Teachers

Received July 7, 2013
Revised September 23, 2013
Accepted September 26, 2013

3) This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government (NRF-2011-B00216).

4) Sogang University Graduate School of Education, SangMoon High school (sunbi1013@naver.com)

부록

예비 중등 교사들의 무리수에 대한 이해 문항지

<설문참여자로서의 서약>

※ 다음의 내용을 충분히 숙지하신 후, 아래에 서명해 주십시오.

- 나는 이 연구에 대한 설명을 읽고, 정보를 얻었습니다.
- 나는 문항에 대해 충분히 생각해보고 답을 할 것이며, 문항에 대하여 연구 자에게 질문할 수 있습니다.
- 나는 내가 이 연구에 참여함으로써 발생하는 모든 정보가 비밀로 유지되기를 원하며, 개인정보가 이 연구 어디에도 나타나지 않기를 원합니다.
- 나는 이 연구에서 나와 관련된 정보에 대하여 언제든지 확인 할 수 있고, 필요한 경우 연구자에게 삭제를 요청할 수 있습니다.
- 나는 이 설문조사에 자발적으로 참여했으며, 기꺼이 각 문항의 응답 이유를 설명할 수 있습니다.
- 이 설문조사에 솔직하게, 성실하게 참여하겠습니다.

위 내용을 읽었으며, 위 내용에 동의 합니다.

설문날짜	설문참여자성명	설문참여자서명

※다음을 작성하고 해당되는 번호에 'O' 표시해 주십시오.

1. 이름: ________ 2.성별: ① 남 ( ) ② 여 ( )
3.나이: ______ 4. 소속 학교: ________ 학교
5. 등록학기: ① 1학기 ( ) ② 2학기 ( ) ③ 3학기 ( )
④ 4학기 ( ) ⑤ 5학기 ( )
6. 학부전공: ________ 전공 7.학부 졸업 년도: ______ 년도
8. 학원 • 개인과외 경험이 있습니까? ① 예 ( ) ② 아니오 ( )
9. 8번 문항에서 ①에 답하였다면 경력은 어느 정도입니까?
① 1년 미만 ② 5년 미만 ③ 10년 미만 ④ 10년 이상

[Ⅰ. 무리수의 정의]

1. 선생님께서 알고 계시는 '무리수(irrational numbers)'란 무엇입니까?

[Ⅱ. 무리수 연산]

2. 다음 명제의 참•거짓을 판별하고, 그렇게 생각한 이유를 설명해 주십시오.

(1) 임의의 두 양의 무리수들의 합은 항상 무리수 이다. (   )

*이유:

(2) 임의의 서로 다른 두 무리수들의 곱은 항상 무리수 이다. (   )

*이유: