한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 4, 841-862, December 2013

‘기하와 벡터’ 교육과정의 벡터와 내적 개념 분석[1)]

신보미[2)]

이 연구는 2007 개정 교육과정의 ‘기하와 벡터’ 교과에서 다루어지는 벡터와 내적 개념을 분석하여 그 특징을 기술함으로써 벡터와 내적 개념 지도의 교수학적 시사점을 얻는데 목적을 두었다. 이를 위해 ‘기하와 벡터’ 교육과정에서 다루어지는 벡터와 내적 개념 분석을 위한 세부 관점을 Tall(2002a; Tall, 2004b)과 Watson et al.(2003; Watson, 2002)에 기초하여 5가지로 추출하고, 이렇게 추출된 세부 관점을 토대로 ‘기하와 벡터’ 교육과정 및 교육과정해설서, ‘기하와 벡터’ 교과서 10종 모두에서 다루어지는 벡터와 내적 개념의 특징을 분석하였다. 이로부터 벡터와 내적 개념 형성과 관련된 교육과정상의 이슈를 구체화하였으며 이에 비추어 ‘기하와 벡터’ 교과서에서 벡터 단원의 내용을 전개하는 방식과 관련된 시사점을 논의하였다.

주요용어 : 벡터, 벡터의 내적, 수학적 개념의 인지 발달

Ⅰ. 서론

학교 수학에서 벡터는 가르치고 배우는데 어려운 개념 중 하나이다(최승현 외, 2006, p. 61). 여러 선행 연구는 벡터 지도의 시사점을 얻기 위하여 벡터 개념의 본질을 다양한 측면에서 분석하였다. 이윤수(2009)는 벡터의 특징을 수학적 관점에서 확인하였으며, 허은숙(2005)은 벡터 개념의 역사 발생 과정을 살펴보았다. 그러나 Vinner(1991)는 형식 체계로서의 수학과 정신 활동으로서의 수학을 구분하면서 개념의 의미있는 지도를 위해서는 형식 체계로서 수학의 발달 과정뿐만 아니라 인지적 요건으로서 개념 형성과 관련된 이론 개발이 중요하다고 강조하였다. 우정호(1998)는 개념 지도를 위한 교수-학습 과정을 조직할 때는 해당되는 수학적 지식의 본질과 그 역사 발생 과정의 특징뿐만 아니라 지도하고자 하는 개념과 관련하여 학습자의 인지 구조가 형성되는 맥락도 고려할 필요가 있다고 하였다.

Tall(2004b)은 수학적 개념을 학습하는데 거치는 인지 과정을 설명하기 위하여 수학의 세계를 구체적(embodied), 기호적(symbolic), 형식적(formal) 세계로 나누고 각각의 세계와 관련하여 개념 형성 과정을 이론화하였다. 이 이론은 학교 수학과 대학 수학에서 서로 다르게 제시되는 벡터의 특징을 밝힌 Watson, Spyrou, & Tall(2003; Watson, 2002)의 연구로 부터 아이디어를 얻어 구체화되었으므로(Tall, 2004a, p. 30), 벡터 개념 형성 과정과 관련된 특징

1) 이 논문은 2012년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 전남대학교 (bomi0210@jnu.ac.kr)

을 살피는 연구에 의미있는 이론적 틀이 될 수 있다.

현행 교육과정에서 벡터는 ‘기하와 벡터’ 교과의 벡터 단원에서 다루어지며 이 단원은 ‘벡터와 그 연산’, ‘벡터의 내적’, ‘직선과 평면의 방정식’이라는 세 개의 중단원으로 구성되어 있다(교육인적자원부, 2007, p. 90). ‘벡터의 내적’은 벡터 단원에서 하나의 중단원을 차지할 정도로 중요한 위치에 있음에도 그 지도와 관련된 국내 선행 연구를 찾는 것이 쉽지 않다.

이에 이 연구는 2007 개정 교육과정의 ‘기하와 벡터’ 교과에서 다루어지는 벡터와 내적 개념을 분석하여 그 특징을 기술함으로써 벡터와 내적 개념 지도의 교수학적 시사점을 얻고자 한다. 앞서 언급한 대로 Tall(2004a; 2004b)의 연구는 학교 수학과 대학 수학에서 다루는 벡터의 특징을 분석한 Watson et al.(2003; Watson, 2002)의 연구에 기초하고 있으므로 이들 연구는 ‘기하와 벡터’ 교과의 벡터와 내적 개념 분석을 목적으로 하는 이 연구에 직·간접적인 이론적 틀을 제공할 수 있다. 그러나 Tall(2002a; Tall, 2004b)과 Watson et al.(2003; Watson, 2002)의 연구는 벡터의 내적에 대해서는 중점적으로 다루고 있지 않은 바, 이들 연구를 확인하는 것만으로 벡터의 내적 개념 분석을 위한 이론적 틀을 마련하는데 어려움이 있어 보인다.

이에 이 연구는 우선 Tall(2002a; Tall, 2004b)과 Watson et al.(2003; Watson, 2002)을 확인하여 ‘기하와 벡터’ 교육과정에서 다루어지는 벡터 개념을 구체적, 기호적, 형식적 세계의 관점에서 분석하기 위한 세부 관점을 추출한다. 그런 다음 ‘기하와 벡터’ 교육과정에서 다루어지는 벡터의 내적 개념을 구체적, 기호적, 형식적 세계의 관점에서 분석하기 위한 세부 관점을 추출하기 위하여 Tall(2002a; Tall, 2004b)과 Watson et al.(2003; Watson, 2002)의 연구뿐만 아니라 대학 수준의 물리학 및 선형대수학 교재, 벡터의 내적과 관련된 선행 연구 등에 대한 문헌 검토를 진행한다. 이렇게 추출된 세부 분석 관점을 토대로 ‘기하와 벡터’ 교육과정 및 교육과정해설서, ‘기하와 벡터’ 교과서 10종 모두에서 다루어지는 벡터와 내적 개념의 특징을 분석한다. 이로부터 벡터와 내적 개념 형성과 관련된 교육과정상의 이슈를 구체화하고 이에 비추어 ‘기하와 벡터’ 교과서에서 벡터 단원의 내용을 전개하는 방식과 관련된 시사점을 논의한다.

Ⅱ. 이론적 배경

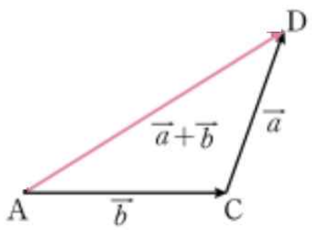
1. 구체적, 기호적, 형식적 세계에서 벡터 개념

크기와 방향을 갖는 양이라는 벡터 개념은 힘, 이동, 속도 등의 물리적 현상을 해석하는 수단으로 고대 그리스 시대에 발생하였으며, 복소수의 기하적 표현을 연구하던 18세기 수학자 Wessel에 의해 수학적 도구로 다루어지기 시작하였다(Katz, 1995). 19세기 이후 벡터 개념은 유향선분과 수의 순서쌍이라는 표현 형식을 거쳐 벡터 공간의 원소로 추상화되었다(Fuller, 1998; Dorier, 2000). Watson(2002; Watson et al., 2003)은 기하적 표현에서 대수적 대상으로의 이상과 같은 벡터 개념의 역사적 형식화 과정에 집중하여 학교 수학과 대학 수학에서 벡터 개념을 다루는 각기 다른 방식을 기하적(geometric), 상징적(symbolic), 공리적(axiomatic) 접근이라고 명명하여 설명하였다. 이러한 세 가지 접근을 토대로 Tall(2004a; 2004b)은 구체적, 기호적, 형식적 세계로 구별되는 수학의 세계를 상정하고, 각 세계에서의

수학적 개념 형성과 정당화 과정의 특징을 설명함으로써 수학적 사고의 다양한 측면을 다루었다.

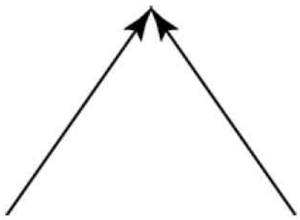
구체적 세계에서 개념 형성은 물리적인 감각과 행동, 이에 대한 정신적 구성물 등에 기초한다. 구체적 세계에서 개념은 물리적 현상뿐만 아니라 개인의 인지 구조 등을 그 발생의 토대로 삼기 때문에 '완벽하게 곧은 직선'과 같이 물리적으로는 존재하지 않더라도 정신적으로는 구성 가능한 대상이 될 수 있다. 이 세계의 개념은 시공간적(visuospatial) 이미지나 감각에 의해 인식되고 표현된다(Tall, 2004b). 이 세계에서 벡터 개념은 물체에 작용한 힘, 물체의 이동, 속도 등과 같은 물리-역학적 개념과 관련하여 형성되며, 유향선분이라는 기하적 이미지로 표현된다. 그러나 이 세계에서 경험한 물리-역학적 개념의 특징은 형성되는 벡터 개념에 다소간의 차이를 가져올 수 있다(Watson, 2002).

구체적 세계에서 수학적 지식은 감각적 사례에 대한 경험과 관찰에 의해 정당화되므로 이를 수학적인 일반 법칙(law)으로 확장하는데 한계가 있다(Tall, 2004b). 이 세계에서 두 벡터의 덧셈은 [그림 Ⅱ-1]과 같이 유향선분을 이용한 시공간적 사실에 비추어 두 벡터의 종점과 시점이 각각 일치할 때 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ 와 같이 실행된다고 설명할 수 있다. 그러나 Tall(2004b, p. 287)에 따르면 이러한 설명은 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ 과 같은 덧셈에는 곧바로 적용되지 않기 때문에 이 전략을 임의의 두 벡터에 대한 덧셈으로 일반화하는데 한계가 있다.



[그림 Ⅱ-1] 유향선분에 의한 벡터의 덧셈

또한 유향선분을 통해 시공간적 이미지로만으로 벡터의 덧셈을 설명하면 [그림 Ⅱ-2]와 같이 표현되는 덧셈에 대하여 그 결과를 $\vec{0}$ 으로 해석하는 오개념을 자극할 수 있다(Tall, 2004b, p. 286). 구체적 세계의 물리적 경험에만 의존하여 형성된 개념만으로는 정교한 수학을 다루는데 어려움이 있다. 보다 높은 수학적 사고 수준으로의 발달을 위해서는 기호(symbol)의 사용이 필요하다(Gray & Tall, 2001). 의미는 기호를 통해 압축(encapsulated)되므로 개념을 수학적으로 다루는데 기호는 중요한 역할을 한다.



[그림 Ⅱ-2] 유향선분에 의한
벡터의 덧셈과 오개념
(Tall, 2004b, p. 286)

기호적 세계는 산술이나 대수에서 개념을 수학적으로 조작하기 위해 사용하는 기호가 기능하는 세계이다. 개념은 구체적 세계에서 발생하여 기호를 통한 조작에 의해 정교화되며(Tall, 2004a), 기호는 수학하는 과정(process)과 그 과정 자체가 대상(object)이 되는 개념(concept)을 구성하는데 사용된다(Gray & Tall, 1992, p. 8). 이 세계에서 기호는 '과정'과 '개념'을 동시에 표현한다는 점에서 과정-개념(procept)이라고도 부른다(Tall, 2004b). 기호적 세계에서 벡터는 2차원(또는 3차원) 공간상의 대상으로 수의 순서쌍인 기호 (x, y) 에 의해 표현된다.

기호적 세계에서 개념은 기호적 조작에 의해 정당화되므로(Tall, 2002, p. 100), 이 세계에서 벡터의 덧셈은 각 벡터의 성분의 합을 통해 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1, a_2)+(b_1, b_2) = (a_1+b_2, a_2+b_2)$ 과 같은 대수적 조작으로 설명된다. 이 때 기호 (x, y) 은 다른 벡터를 성분 x, y 만큼 이동시키는 '과정'을 지시함과 동시에 2차원 공간에 존재하는 대상으로서 벡터라는 '개념' 자체를 표현한다는 점에서 과정-개념에 해당한다. 기호적 세계에서 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙은 임의의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)=(b_1+a_1, b_2+a_2)=(b_1, b_2)+(a_1, a_2)=\vec{b}+\vec{a}$ 와 같은 대수적 계산에 의해 정당화된다. 구체적 세계에서와는 달리 기호적 세계에서는 구체적 참조물이 없는 기호의 조작만으로도 수학적 지식을 정당화할 수 있으며 이렇게 형성된 기호적 개념이 의미있게 기능한다[3]. 기호는 개념에 정확성과 정밀성을 더하고 그 성질에 보다 주목하게 함으로써 개념의 형식화에 기여하는 바(Tall, 2004a), 기호 (x, y) 는 벡터 개념의 대수적 조작을 가능하게 하며, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 과 같이 벡터의 연산이 갖는 성질에 주목하게 하여 기호적 세계의 벡터 개념이 형식적 세계로 발전하는데 토대를 제공한다.

형식적 세계는 기호적 세계에서 다루었던 개념의 성질을 추상화한 형식적 정의가 작동하는 세계이다. 이 세계에서 벡터는 기호적 세계에서 다루었던 벡터의 연산 법칙을 형식화한 공리에 의해 벡터 공간의 원소로 정의된다. 형식적 세계에서 벡터는 정의에 의해 부여된 성질을 만족하는 공리적-형식적 대상으로, 물리적 개념을 나타내는 구체적-기하적 특징도 2차

3) 기호적 조작을 통해 기호에 대한 의미있는 개념적 구체물이 역으로 구성되기도 한다. 16세기에 타르탈랴와 카르다노는 삼차방정식을 풀기 위한 기호적인 조작 과정에서 음수의 제곱근을 다루었으면서도 이를 최종 답에서는 제외하였다. 기하적 이미지가 없는 음수의 제곱근은 이들에게는 의미없는 대상이었지만 지속적인 수학적 조작에 의해 음수의 제곱근을 다룸으로써 현대에 들어 복소수는 좌표평면위의 점이라는 개념적 구체물을 갖게 되었다(Tall, 2004a, p. 30).

원(또는 3차원) 공간의 대상을 나타내는 상징적-기호적 특징도 지니지 않는다. 이 세계에서 벡터는 정의와 정리에 의해 결정되는 형식적 대상일 뿐이다.

형식적 세계에서 지식은 경험이나 특정 개념이 아니라 형식적으로 도입된 정의와 정리, 증명에 의해 정당화되며 그러한 정당화는 수학적 구조를 세우는데 이용된다(Tall, 2004b). 벡터의 덧셈은 임의의 두 벡터 u, v 에 대하여 $u+v=v+u$ 을 만족하는 제 3의 벡터가 존재한다는 벡터 공간의 형식적 공리에 근거하여 실행되고, 벡터 공간의 원소라는 공리적 정의로부터 형성된 벡터 개념과 함께 벡터 공간이라는 수학적 구조를 만드는데 이용된다.

이상 구체적, 기호적, 형식적 세계의 벡터 개념을 분석한 바에 따르면 각 세계에서 벡터 개념은 각각 유향선분이라는 기하적 표현, 수의 순서쌍이라는 상징적 표현, 벡터공간의 원소라는 공리적 표현으로 다루어진다. 특히 학교 수학에서 벡터 개념은 유향선분과 수의 순서쌍이라는 표현을 통해 구체적 세계와 기호적 세계의 대상으로 취급된다.

한편, 구체적 세계의 수학적 개념은 물리적 경험에 기초하여 형성되므로 이 세계에서 경험한 물리-역학적 현상의 종류에 따라 형성되는 벡터 개념과 그 연산의 특징이 달라질 수 있다. 또한 이 세계의 수학적 지식은 감각 경험과 관찰에 의해 정당화되므로 구체적 세계에서 설명된 벡터의 성질은 수학적인 일반 법칙으로 보기에 어려움이 있다. 따라서 벡터 개념의 의미있는 인지 발달을 위해서는 기호에 의해 압축된 벡터 개념을 수학적으로 조작하고 정당화하는 기회를 부여할 필요가 있다.

기호적 세계에서는 벡터 개념을 표현하는 기호인 수의 순서쌍 (x, y) 을 통해 임의의 두 벡터 사이의 덧셈이 정의되며, 벡터의 연산 법칙도 대수적 조작에 의해 타당하게 증명된다. 기호적 세계에서 다룬 이러한 연산 법칙은 형식적 세계에서 공리로 추상화되어 이 세계에서 벡터를 정의하는데 바탕이 된다. 즉, 형식적 세계로의 벡터 개념 발달은 기호적 세계에서 다룬 벡터의 연산 법칙에 대한 이해 수준에 기초한다.

구체적, 기호적, 형식적 세계의 벡터 개념이 지닌 이러한 특징을 바탕으로 '기하와 벡터' 교과에서 다루는 벡터 개념을 분석하기 위한 세부 관점을 추출하면 다음과 같다.

관점 1. 벡터 개념은 유향선분, 수의 순서쌍 중 어떤 표현을 통해 설명되는가?

관점 2. 벡터 덧셈은 물체의 이동, 물체에 가한 힘, 속도 중 어떤 물리적 경험으로부터 도입되는가?

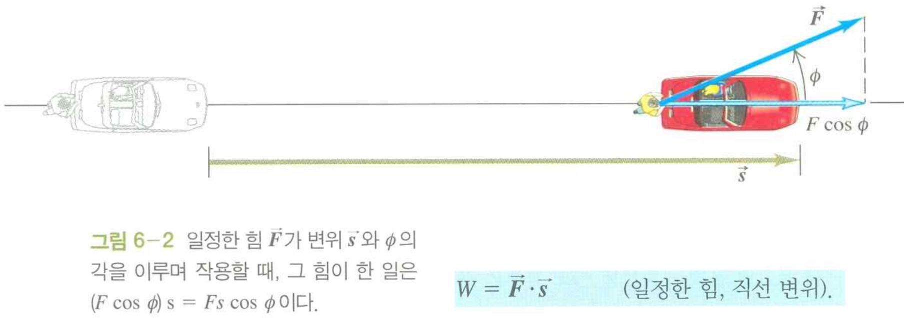
관점 3. 벡터의 덧셈은 어떻게 정의되며 덧셈에 대한 연산법칙은 어떻게 증명되는가?

2. 구체적, 기호적, 형식적 세계에서 벡터의 내적 개념

Tall(2004a; Tall, 2004b)은 수학적 개념의 다양하고 복합적인 측면을 그 개념 형성의 토대와 정당화 방법에 따라 구체적, 기호적, 형식적 세계로 나누어 설명하였다. 그에 따르면 개념의 바람직한 인지 발달을 위해서는 구체적, 기호적, 형식적 세계를 가로질러 각 세계에서 다루어지는 수학적 개념의 특징을 살피고 이들 사이의 관계를 재조직하는 의도적인 노력이 필요하다. 이에 앞 절에서는 Tall(2004a; 2004b)과 Watson et al.(2003; Watson, 2002)에 기초하여 구체적, 기호적, 형식적 세계의 벡터 개념이 지닌 특징을 각각 살펴보고 이러한 특징과 관련하여 발생할 수 있는 교수학적 이슈를 확인하였다. 그러나 Tall(2004a; 2004b)과

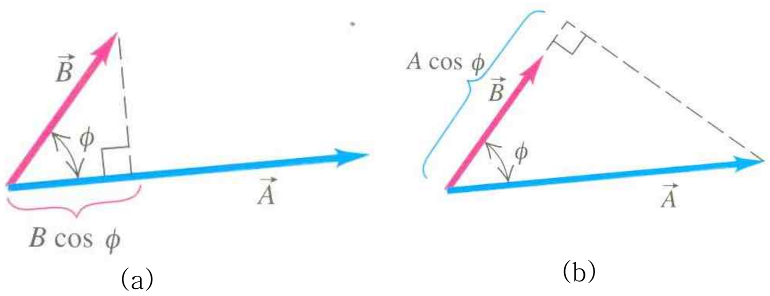
Watson et al.(2003; Watson, 2002)은 벡터의 내적 개념이 지닌 특징에 대해서는 직접적으로 설명하고 있지 않아, 이들 연구로 부터 벡터의 내적 개념 형성의 토대와 그 정당화 방법을 확인하는데 한계가 있다. 이에 이하에서는 구체적, 기호적, 형식적 세계에서 수학적 개념 형성의 각기 다른 토대와 정당화 방법에 비추어 벡터의 내적 개념이 지닐 수 있는 특징을 알아보기 위하여 대학 수준의 물리학 및 선형대수학 교재, 벡터의 내적과 관련된 선행 연구 등을 검토한다.

구체적 세계에서 벡터 개념은 물리-역학적 개념을 토대로 형성되며 기하적 이미지인 유향선분을 통해 표현되고 정당화된다. 이 세계에서 벡터의 내적 개념 형성은 이와 같은 벡터 개념의 특징과 깊게 관련될 것으로 예측해 볼 수 있다. Young & Freeman(2003; 권금숙, 2011)에 따르면 벡터의 내적은 [그림 Ⅱ-3]처럼 힘과 일의 관계를 해석하는 도구로써 발생하였다.



[그림 Ⅱ-3] 벡터의 내적(Young & Freeman, 2003, p. 146)

벡터의 내적은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ에 대하여 관계식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$으로 정의되기는 하나 이 정의의 의미는 [그림 Ⅱ-4]와 같이 유향선분을 사용하는 시공간적 이미지에 기초하여 설명된다는 점에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$에 의한 벡터의 내적 개념은 구체적 세계에 속한다고 볼 수 있다.



[그림 Ⅱ-4] 유향선분에 의한 벡터의 내적 설명
(Young & Freeman, 2003, p. 24)

구체적 세계에서 벡터의 내적에 대한 교환법칙은 [그림 Ⅱ-4]의 (a)와 (b)를 통해 설명할 수는 있지만 이는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각 θ가 예각인 특수한 사례를 관찰한 결과를 기초로 한다는 점에서 법칙에 대한 증명으로 보기에 어려움이 있다. 벡터의 내적에 대한 연산법칙 등을 수학적으로 다루기 위해서는 벡터의 내적을 기호적으로 표현할 필요가 있다.

기호적 세계에서 벡터 개념은 2차원(또는 3차원) 공간상의 대상으로 도입되어 기호 (x, y) 으로 표현된다. 이 세계에서 벡터의 연산 법칙은 기호를 통한 대수적 조작에 의해 증명된다. 기호적 세계의 벡터가 갖는 이러한 특징은 이 세계에서 벡터의 내적에 접근하는 방식에 직접적으로 영향을 미쳤을 것으로 예상해 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 미국 고등학교에서 예비미적분(precalculus) 과정을 지도하는데 사용하는 교과서인 Larson, Hostetler, & Edwards(2005, p. ⅷ)의 전개 방식은 기호적 세계에서 벡터의 내적을 정의하는 방법에 의미있는 시사를 준다.

Larson, Hostetler, & Edwards(2005)는 벡터를 도입하는 과정에서 벡터와 유향선분의 관계는 간략하게 소개한 다음, 크기와 방향을 갖는 양이라는 벡터 개념을 수의 순서쌍인 좌표로 표현하도록 한다. 이러한 정의와 표현 방법을 토대로 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 의 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 으로 정의한다. 그런 다음 벡터의 크기를 벡터의 내적으로 표현하고 벡터의 내적이 갖는 연산 법칙을 증명한다. 이 결과로부터 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각 θ 에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 을 [그림 Ⅱ-5]와 같이 증명한다.

Consider the triangle determined by vectors **u**, **v**, and **v** − **u**, as shown in the figure. By the Law of Cosines, you can write

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\
(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\
(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}-(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\
\|\mathbf{v}\|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\
-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\
\cos\theta &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.
\end{aligned}$$

[그림 Ⅱ-5] 두 벡터가 이루는 각의 크기와 두 벡터의 내적 관계에 대한 증명
(Larson, Hostetler, & Edwards, 2005, p. A92)

관계식 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$는 두 벡터가 이루는 각과 두 벡터의 내적사이의 관계를 설명해준다는 점에서 기호적 세계에서 다룬 벡터의 내적 개념에 대한 개념적 구체물을 구성하는데 도움을 준다. 즉, 기호적 세계에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 으로 정의된 벡터의 내적은 선분의 길이

와 각의 크기라는 기하적 개념을 대수적으로 해석하는 도구의 역할을 한다.

형식적 세계에서 벡터는 기호적 세계에서 다루었던 벡터의 연산 법칙을 형식화한 공리에 의해 벡터 공간의 원소로 정의된다. 이 세계에서 벡터 개념은 공리체계에 기초한 정의와 정리를 통해 형성되며 벡터 공간이라는 수학적 구조를 만드는데 이용된다. 형식적 세계의 벡터 개념 형성과 관련된 이러한 특징은 이 세계에서 다루어지는 벡터의 내적 개념에도 반영되어 있을 것으로 예측할 수 있는 바, Smith(1992)은 2차원(또는 3차원) 공간에서 성립한 벡터의 내적에 대한 연산 법칙에 기초한 다음과 같은 형식적 정의를 통해 내적 공간을 정의한다.

> 다음 성질을 모두 만족하는 벡터 공간 V에서 실수로의 함수 $<\ ,\ >$ 을 벡터 공간 V위의 내적이라고 한다. 임의의 벡터 $A,\ B \in V$에 대하여
> (1) $<A,\ B> = <B,\ A>$
> (2) 임의의 실수 r 에 대하여 $<rA,\ B> = <A,\ rB>$
> (3) 임의의 벡터 $C \in V$에 대하여
> $<A+B,\ C> = <A,\ C> + <B,\ C>$이고 $<A,\ B+C> = <A,\ B> + <A,\ C>$.
> (4) $<A,\ A> \geq 0$ 이고 $<A,\ A> = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (Smith, 1992, p. 245)

Strang(1988, p. 132; Smith, 1992, p. 244)에 따르면 벡터의 내적에 대한 위와 같은 공리적 정의는 벡터 공간에서 두 벡터 사이의 거리와 각의 크기를 추상적으로 정의하기 위해 도입된 것이다. 즉, 벡터의 내적은 거리와 각이라는 기하적 개념을 대수적 관점에서 조직하도록 돕는다. 이러한 맥락에서 Freudenthal(1973, p. 431)은 내적이 정의된 2차원(또는 3차원) 벡터 공간은 유클리드 기하의 모델이 된다고 설명하였다.

이상 구체적, 기호적, 형식적 세계에서 수학적 개념이 형성되는 각기 다른 토대와 정당화 방법에 비추어 벡터의 내적 개념이 지닐 수 있는 특징을 분석한 바에 따르면 각 세계와 관련되는 벡터의 내적 정의는 각각 힘과 일이라는 물리적 관계에 기초한 정의 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 벡터의 기호적 표현에 기초한 정의 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, 내적 공간의 공리에 기초한 함수로서의 정의이다.

'$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$'은 수학적 관계식으로 표현되기는 하였지만 물리적 개념을 해석하는 과정에서 도입되었으며 그 정의의 의미가 기하적 이미지를 통해 설명된다는 점에서 구체적 세계에 속하는 개념이라고 볼 수 있다. 구체적 세계에 속하는 정의인 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 을 통해 벡터의 내적이 갖는 연산 법칙을 일반적으로 설명하는 데는 다소간의 한계가 있다.

한편 기호적 세계에 속하는 정의인 '$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$'을 통해서는 대수적인 조작 과정을 거쳐 벡터의 내적에 대한 연산 법칙을 간단하게 증명할 수 있다. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 에 의해 증명된 이러한 연산 법칙을 토대로 벡터의 크기인 선분의 길이와 내적의 관계, 두 벡터가 이루는 각의 크기와 내적의 관계를 유도할 수 있다. 벡터의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 을 통해 벡터의 크기인 선분의 길이와 두 벡터가 이루는 각의 크기를 대수적인 계산 과정에 의해 손쉽게 얻을 수 있다.

'내적 공간의 공리에 기초한 함수로서 벡터의 내적'은 벡터 공간에서 두 벡터 사이의 거리와 각의 크기를 다루기 위해 도입된 것으로 이 정의를 통해 기하적 공간을 대수적으로 조직하여 수학적인 구조를 탐구할 수 있다[4]. 형식적 세계에서 벡터의 내적은 기하적 대상인 선

분의 길이와 각의 크기를 추상적으로 탐구하기 위해 도입된 대수적 도구라고 볼 수 있다.

구체적, 기호적, 형식적 세계의 벡터의 내적 개념이 지닌 이러한 특징을 바탕으로 '기하와 벡터' 교과에서 다루는 벡터의 내적 개념을 분석하기 위한 세부 관점을 추출하면 다음과 같다.

관점 4. 벡터의 내적은 어떻게 정의되고 그 연산법칙은 어떻게 증명되는가?

관점 5. 벡터의 내적이 지닌 가치는 어떻게 설명되는가?

Ⅲ. 2007 개정 교육과정의 벡터 단원 분석

1. 교육과정과 교육과정 해설서의 벡터와 내적 개념 분석

2007 개정 교육과정 해설서(교육과학기술부, 2009, p. 302)는 '기하와 벡터' 교과의 성격을 삼차원 공간 좌표와 벡터의 도입을 통해 이차원 기하의 개념을 삼차원으로 확장하고 공간에서 생기는 기하적 문제를 해결하도록 하는데 있다고 하였다. 특히 벡터 단원 지도 의의를 다음과 같이 제시하였다.

> 유향선분으로서 크기와 방향을 나타내는 벡터는 운동에서의 힘, 속도, 가속도 등을 나타낼 때 사용하며, 물리학 특히 역학 분야에서 발생하여 수학적인 이론으로 발전하였다. 특히 좌표공간에서 벡터를 다룸으로써 기하적인 성격을 갖는 벡터를 대수적으로 다루어 도형의 성질을 이해하고 증명하는데 유용한 도구로 활용할 수 있다(교육과학기술부, 2009, p. 310).

또한 2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007, p. 93)은 '교수·학습상의 유의점'에서 벡터의 효용이 좌표공간에서 직선과 평면의 방정식을 간단히 다루는데 있다고 하였다. 이상 교육과정 문서에 따르면 학교 수학에서 벡터는, 삼차원 도형을 방정식으로 표현하여 탐구하는데 대수적 도구로 활용하기 위해 도입되었다고 볼 수 있다. 그러나 벡터 도입 목적과 관련된 이러한 교육과정상의 의도는 벡터 단원의 중단원 전개 방식을 설명하는 교육과정 해설서의 세부 내용에는 충분히 반영되어 있지 않아 보인다.

첫 번째 중단원인 '벡터와 그 연산' 단원의 교육과정상 학습목표는 '벡터의 뜻을 안다'와 '벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다'이다(교육인적자원부, 2007, p. 92). 이에 교육과정 해설서는 벡터의 뜻과 표현 방법, 벡터의 연산에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

> 힘, 속도 등과 같이 크기와 방향을 가지는 양을 벡터 …라고 함을 알게 한다.…벡터를 시점과 종점이 있는 유향선분으로 나타낼 수 있고…. 두 벡터의 합은 …기하적인 방법에 의해 정의하고, 벡터의 합을 기하적인 방법으로 표현할 수 있게 한다. 또한 기하적인 방법을 활용하여 …덧셈에 관한 연산법칙이 성립함을 이해하게 한다(교육과학기술부, 2009, p. 319).

---

4) 벡터 기하에서 벡터와 그 연산에 대한 정의는 유클리드 기하의 공리 1, 2, 5를, 벡터의 내적은 선분의 길이와 각의 크기에 대한 유클리드 기하의 공리 3, 4를 함의한다(Roe, 1993; 이지현 · 홍갑주, 2008).

이는 벡터를 힘, 속도 등의 물리적 상황으로부터 소개하고 시공간적 이미지인 유향선분으로 표현하도록 한 다음 벡터의 연산이 갖는 성질을 기하적 방법으로 정당화하도록 한다는 점에서 교육과정해설서가 제시하는 첫 번째 중단원의 벡터 개념은 구체적 세계에 가깝다고 볼 수 있다.

두 번째 중단원인 '벡터의 내적' 단원의 교육과정상의 학습목표는 '두 벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다'로(교육인적자원부, 2007, p. 92), 교육과정해설서는 벡터의 내적에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

> 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기 $\theta\,(0 \leq \theta \leq \pi)$라 할 때 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적을 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 으로 정의하고, …. 벡터의 성분으로 나타내면 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ …임을 알게 한다. 또한 내적에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 덧셈에 대한 분배법칙 등이 성립함을 알게 한다 (교육과학기술부, 2009, p. 320).

벡터의 내적에 대한 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 와 같은 정의는 일과 힘이라는 물리-역학적 개념사이의 관계를 설명하는 도구로 발생했다는 점에서(권금숙, 2011, p. 14), 교육과정해설서가 제시하는 벡터의 내적 정의는 구체적 세계에 속하는 개념과 관련된다고 볼 수 있다. 그러나 앞서 살펴본 바에 따르면 벡터의 도입 목적은 삼차원 도형을 방정식으로 표현하여 탐구하는데 대수적 도구로 활용하는데 있는 바, 이를 위해서는 벡터를 좌표공간에서 대수적 표현을 통해 다룰 필요가 있다(교육과학기술부, 2009, p. 310). 즉, '벡터의 내적'이라는 두 번째 중단원의 주요 학습목표는 세 번째 중단원인 '직선과 좌표평면의 방정식'에서 '좌표공간상의 직선과 평면의 방정식을 벡터방정식으로 유도하는 것'(교육인적자원부, 2007, p. 92-93)이 가능하도록 벡터를 성분으로 표현하여 그 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 과 같이 다루는데 있다. 벡터의 내적이 주로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 으로 설명될 것이라면 그 정의를 교육과정해설서에서와 같이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 으로 택하는 이유가 분명하지 않다. 힘과 일이라는 물리적 현상을 다루는 것이 주요 학습목표가 아닌 기하와 벡터 교과의 벡터 단원에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 으로 내적을 정의하는 것이 필연적인지 확인할 필요가 있다.

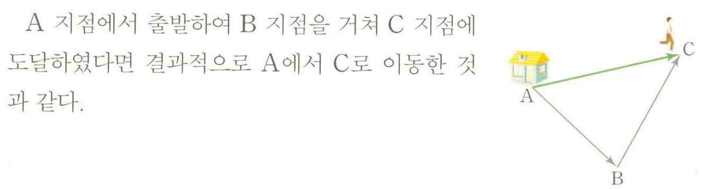
2. 기하와 벡터 교과서의 벡터와 내적 개념 분석

첫 번째 중단원인 '벡터와 그 연산'에서 기하와 벡터 교과서 모두는 벡터를 크기와 방향을 갖는 양으로 정의한 다음 벡터와 유향선분의 관계를 설명한다. 이 때 대부분(8종)의 교과서가 벡터를 나타내는 표현 방법으로서 유향선분을 소개한 반면, 2종의 교과서는 '점 A 에서 점 B 로 향하는 유향선분 AB 을 벡터 AB 라 한다'와 같이 벡터와 그 표현 방법인 유향선분을 명확하게 구별하지 않고 사용하기도 하였다. 벡터와 그 표현을 구분하지 않는 교과서의 기술 방식과 벡터를 유향선분인 반직선과 일치하는 것으로 파악하는 현직교사의 견해(윤현경, 2011)[5]는 학생들의 벡터 개념 형성에 주요한 영향을 미칠 수 있다.

5) 윤현경(2011)의 연구에서 72.6%의 현직교사가 유향선분인 반직선이 자신이 생각하는 벡터 개념과 일치한다고 답하였다.

벡터의 뜻과 표현 방식을 설명한 다음 기하와 벡터 교과서 대부분은 물리적 상황을 통해 벡터의 연산을 소개한다. 7종의 교과서는 벡터의 덧셈을 소개하는 생각열기(또는 탐구활동)의 소재로 [그림 Ⅲ-1]의 (a)와 같이 하나의 물체에 작용하는 두 힘을 사용하고, 2종의 교과서는 [그림 Ⅲ-1]의 (b)와 같이 물체의 이동을 사용한다. 그런 다음 9종의 교과서 모두는 삼각형법을 이용하여 벡터의 덧셈을 정의하고 평행사변형법은 벡터의 덧셈을 해결하는 다른 풀이방법으로 다룬다.

(a) 한 물체에 작용하는 두 힘과 벡터의 덧셈(김해경 외, 2009, p. 126)



(b)물체의 이동과 벡터의 덧셈(김수환 외, 2009, p. 116)

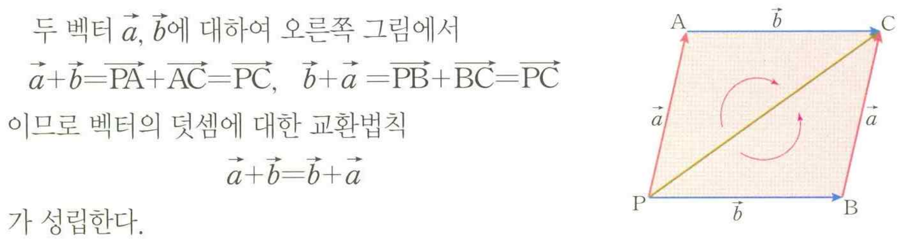
[그림 Ⅲ-1] 벡터의 덧셈 도입을 위한 물리적 상황

벡터의 덧셈을 설명하는 삼각형법과 평행사변형법이 수학적으로 동치임에도 불구하고 Watson et al.(2003, p. 78)에 따르면 학생들은 이를 인지적으로 다르게 인식하는 경향이 있다. 학생들은 하나의 물체에 작용하는 두 힘의 관계는 평행사변형법에 의한 벡터의 덧셈과 보다 관련되고 물체의 이동은 삼각형법에 의한 벡터의 덧셈과 보다 연관된다고 생각한다. 즉, 물체의 이동에 의해 벡터의 덧셈을 이해한 학생은 하나의 물체에 작용하는 두 힘과 관련되는 덧셈 문제를 해결하는데 어려움을 겪는다. 벡터의 덧셈에 대한 개념 발달은 제시된 물리-역학적 상황과 그 정의 방식간의 인지적 일관성에 영향을 받을 수 있으므로 삼각형법에 의해 형성된 덧셈 개념과 평행사변형법에 의해 형성된 덧셈 개념을 의도적으로 조정하고 통합시키려는 교수학적 노력이 필요하다.

이외 1종의 교과서는 벡터의 덧셈을 물리적 상황에 대한 소개 없이 삼각형법에 의해 곧바로 제시한다. Tall(2004b)에 따르면 이러한 전개 방식은 벡터의 덧셈과 관련하여 구체적 세계의 물리-역학적 의미를 경험할 기회를 제공하지 않는다는 점에서 벡터의 덧셈에 대한 의

미있는 개념 발달에 제한적 요소가 될 수 있다. 구체적 세계는 수학적 맥락에 구체적인 의미를 부여한다는 점에서 수학적인 개념 발달 과정에 중요한 역할을 하므로 학교 수학에서 이를 소홀이 다루어서는 안된다(Tall, 2008).

벡터의 덧셈을 물리적 상황으로부터 소개하고 삼각형법을 통해 이를 정의한 다음 기하와 벡터 교과서 모두는 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립하는 이유를 [그림 Ⅲ-2]과 같이 설명한다.


두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림에서

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}$, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

가 성립한다.

[그림 Ⅲ-2] 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙(황석근 외, 2009, p. 124)

이는 벡터에 대한 시각적 표현인 유향선분을 통해 감각적 이미지를 토대로 벡터의 덧셈에 대한 성질이 성립하는 이유를 설명한다는 점에서 구체적 세계에서 수학적 지식을 정당화하는 방법과 같다. 그러나 이와 같은 설명은 구체적인 이미지를 눈으로 관찰하여 얻은 경험에 불과한 것으로 벡터라는 개념적 대상의 연산이 따르는 일반 법칙을 파악한 것이라고 보기 어렵다(Tall, 2004b, p. 287). Tall(2004b)에 따르면 벡터의 연산 법칙을 유향선분에 의한 감각 경험에 기초하여 기하적 방법으로 설명하는 것은 법칙에 대한 증명으로 보기에 부족함이 있다. 한편, Watson et al.(2003, p. 11)은 유향선분을 이용하여 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙을 설명하는 것이 학생들에게 오히려 인지적 혼란을 야기시킬 수도 있다고 지적한 바 있다. 이에 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙을 [그림 Ⅲ-2]와 같은 기하적 방법으로 설명하여 얻을 수 있는 교수학적 장점이 보다 분명하게 연구될 필요가 있다. Watson(2002, p. 372)에 따르면 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙은 기호적 세계에서 벡터를 표현하는 방법인 수의 순서쌍에 기초하여 자명하게 증명될 수 있다.

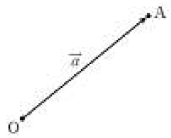
이상 기하와 벡터 교과서에서 벡터 단원의 첫 번째 중단원인 '벡터와 그 연산'을 분석한 바에 따르면 교과서 대부분(8종)이 벡터의 표현 형식으로 유향선분을 소개하고 있다. 9종의 교과서는 벡터의 연산을 정의하기 앞서 물체에 가한 힘 또는 물체의 이동과 같은 물리적 경험을 도입하여 벡터의 덧셈과 물리-역학적 현상 사이의 관계를 암묵적으로 소개함으로써 벡터와 그 연산을 구체적 세계의 대상으로 경험할 기회를 제공한다. 그런 다음 교과서 10종 모두는 벡터의 덧셈을 삼각형법을 통해 기하적으로 정의하고 그 연산 법칙이 성립하는 이유 역시 기하적 방법으로 증명한다. 그러나 구체적 세계에서 감각 경험을 통해 정당화된 수학적 지식을 수학적인 법칙으로 간주할 수 있는지에 대해서는 논란의 여지가 있다. 첫 번째 중단원인 '벡터와 그 연산' 단원의 전개 방식을 구체적 세계와 관련하여 나타내면 [그림 Ⅲ-3]과 같다.

구체적 세계		구체적 세계		구체적 세계		구체적 세계
물리적 상황과 관련하여 벡터의 뜻 소개	➜	유향선분에 의한 벡터 표현	➜	유향선분을 이용하여 기하적인 방법으로 벡터의 연산 정의	➜	유향선분을 이용하여 기하적인 방법으로 벡터의 연산 법칙 증명

[그림 Ⅲ-3] ‘벡터와 그 연산’ 단원 전개 방식과 구체적 세계

두 번째 중단원인 ‘벡터의 내적’ 단원을 기하와 벡터 교과서 모두는 위치벡터와 벡터의 성분을 정의하는 것으로 시작한다. 교과서 10종 모두에서 위치벡터는 [그림 Ⅲ-4]와 같이 ‘시점을 한 점 O로 고정한 벡터’로 정의된다.

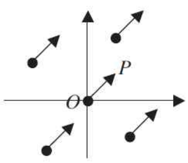
평면 또는 공간에서 한 점 O를 고정시키면 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 점 A의 위치를 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되도록 정할 수 있다.
역으로, 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 유일하게 정해진다.
이와 같이 정점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 O에 대한 점 A의 **위치벡터**라고 한다.
일반적으로 위치벡터의 시점은 원점 O로 잡는다.



[그림 Ⅲ-4] 위치벡터의 정의(류희찬 외, 2009, p. 140)

Watson(2002, p. 372)에 따르면 위치벡터는 크기와 방향이 같은 무수히 많은 벡터 족(vector family)을 원점이 시점인 하나의 특수한 벡터로 나타내려는 의도를 담고 있는 개념인 바, 위치벡터 개념의 의미있는 인지 발달을 위해서는 적어도 [그림 Ⅲ-5]와 같은 교수학적 안내가 필요하다.

Position Vectors. The column vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ denotes a translation. There are an infinite number of points which are related by such a translation. … The diagram shows several pairs of points linked by the same vector. The vector which translates O to P, $\overrightarrow{OP}$, is a special vector, the *position vector of P*.



[그림 Ⅲ-5] 위치벡터에 대한 교수학적 안내 자료(Watson, 2002, p. 372)

[그림 Ⅲ-5]와 같은 설명에 따르면 크기와 방향이 같은 여러 개의 벡터들은 원점을 시점으로 하는 하나의 위치벡터로 나타낼 수 있으며, 이 위치벡터는 종점의 좌표에 의해 하나로 결정된다. 즉, 임의의 벡터는 위치벡터로 나타낼 수 있고 위치벡터는 종점의 좌표로 나타낼 수 있으므로 모든 벡터는 수의 순서쌍인 좌표에 의해 유일하게 표현될 수 있다. 결과적으로 벡터의 성분은 위치벡터의 종점의 좌표를 의미하는 바, 수의 순서쌍인 좌표로 벡터를 표현하는 기호적 세계의 맥락에 학생들이 적응하기 위해서는 벡터의 성분과 관련된 이상과 같은 관계를 먼저 이해할 필요가 있다. [그림 Ⅲ-4]와 같이 좌표축도 없는 일반평면 위에서 단순히 시점이 한 점 O인 벡터로 위치벡터를 정의하는 방식은 벡터 족과 위치벡터사이의 관계, 벡터와 그 성분사이의 관계를 충분히 설명하는데 한계가 있다.

시점을 한 점 O로 고정한 벡터로 위치벡터를 정의한 다음 기하와 벡터 교과서 모두는 벡터의 성분을 정의함으로써 벡터를 수의 순서쌍으로 표현하도록 설명한다. 그런 다음 벡터의 성분을 이용하여 벡터의 크기와 두 벡터가 같을 조건을 설명하고, [그림 Ⅲ-6]처럼 벡터의 성분에 의한 연산을 다룬다.

평면벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때,

❶ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

❷ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

❸ $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

[그림 Ⅲ-6] 성분에 의한 연산(황선욱 외, 2009, p. 130)

모든 교과서가 [그림 Ⅲ-6]과 같이 성분에 의한 연산을 제시하는 데는 벡터의 성분이라는 새로운 표현 방법에 기초하여 벡터의 연산을 다시 설명하려는 의도가 있다고 볼 수 있다. 따라서 벡터의 성분이라는 기호 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$을 통해 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_{2+}b_2)$와 같이 정의된 기호적 세계에서의 벡터의 덧셈은, 유향선분에 의해 시각적인 감각 경험에 기초하여 정당화된 구체적 세계에서의 연산 법칙을 만족하지 않을 수도 있다. 즉, 성분으로 표현된 벡터에 대하여 그 연산법칙의 성립 여부는 첫 번째 단원에서의 정당화 여부와는 별개로 새롭게 설명될 필요가 있다. 그러나 기하와 벡터 교과서 10종 모두는 성분으로 표현된 벡터에 대하여 그 연산법칙이 성립하는지를 명시적으로 설명하고 있지 않다. 따라서 기하와 벡터 교과서 6종이 다루고 있는 [그림 Ⅲ-7]과 같은 문제에서 (1)에 대한 해결 방법을 수학적으로 설명하는데 어려움이 있다.

$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$, $\vec{c}=(4,\ -1)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ (2) $3(\vec{a}+2\vec{b})-2(3\vec{a}-\vec{c})$

[그림 Ⅲ-7] 성분으로 표현된 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 필요한 문제
(우정호 외, 2009, p. 154)

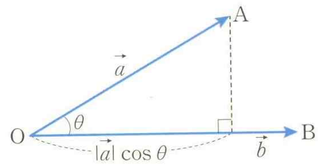
위치벡터와 벡터의 성분을 정의하고 성분을 통해 벡터의 크기와 두 벡터의 상등, 벡터의 연산 등을 다시 설명한 다음 기하와 벡터 교과서 10종 모두는 두 벡터의 내적을 유향선분을 통해 [그림 Ⅲ-8]과 같이 정의한다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라고 하고 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



[그림 Ⅲ-8] 벡터의 내적 정의(정상권 외, 2009, p. 140)

이 중 7종은 벡터의 내적을 [그림 Ⅲ-8]과 같이 정의하기 앞서 관련되는 생각열기(또는 탐구활동) 소재로 힘과 일의 관계를 사용한다. 정의 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$는 일과 힘의 관계를 해석하는 도구로 발생하였으며 적지 않은 교과서가 물리적 현상을 토대로 이를 소개하고 있다는 점에서 두 번째 중단원에서 정의된 벡터의 내적은 구체적 세계에 속하는 대상이라고 볼 수 있다. 그러나 이제까지 두 번째 중단원은 벡터를 성분으로 표현함으로써 벡터와 그 연산을 기호적 세계에 속하는 대수적 대상으로 다루어온 바, 벡터의 내적을 정의하는 상황에서 갑자기 이를 구체적 세계에 속하는 대상으로 설명한 교수학적 의도가 분명하지 않다.

벡터의 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$와 같이 정의한 다음 기하와 벡터 교과서 모두는 코사인 법칙을 이용하여 관계식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$을 유도한다. 그런 다음 벡터의 내적에 대해 연산 법칙이 성립함을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$에 기초하여 보이고, 마찬가지로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$을 통해 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}=\cos\theta$을 유도한다. 이로부터 기하와 벡터 교과서 모두는 두 벡터의 내적이 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 유용한 도구가 됨을 암묵적으로 설명한다. 벡터의 내적과 관련된 일련의 교과서 전개 과정에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$과 같은 벡터의 내적 정의는 거의 활용되지 않으며 오히려 관계식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$이 벡터의 내적과 관련된 다양한 성질을 설명하는데 빈번하게 이용된다.

이상 기하와 벡터 교과서에서 벡터 단원의 두 번째 중단원인 '벡터의 내적'을 분석한 바에 따르면 기하와 벡터 교과서 10종 모두는 해당 단원을 위치벡터와 벡터의 성분을 정의하는

것으로 시작한다. 모든 교과서가 위치벡터를 '시점을 한 점 O로 고정한 벡터'로 정의하고 이와 관련된 간단한 설명을 제시하기는 하나 이로부터 벡터 족과 위치벡터의 관계, 벡터와 벡터의 성분사이의 관계를 파악하는 데는 한계가 있어 보인다. 모든 교과서에서 벡터를 수의 순서쌍인 성분에 의해 기호 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ 와 같이 표현한 다음에는 이를 이용하여 벡터의 크기, 두 벡터의 상등, 벡터의 연산 등을 설명한다. 이는 두 번째 중단원에서 다루는 벡터 개념이 기호적 세계에서 다루는 수학적 개념과 관련됨을 시사한다. 때문에 성분을 통해 새롭게 정의된 벡터의 연산이 지니는 성질을 문제 해결에 사용하기 위해서는 해당 성질에 대한 정당화가 다시 제시될 필요가 있다. 그러나 교과서 6종은 성분으로 표현된 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙을 설명하지 않은 채 이를 이용하는 문제를 다루고 있다. 다음으로 기하와 벡터 교과서 10종 모두는 벡터의 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (단, θ는 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각)과 같이 구체적 세계의 대상으로 정의한다. 기호적 세계의 대상으로 다루어져 온 벡터가 그 내적의 정의에 있어서는 물리-역학적 개념에 기초한 정의로 언급되는 이유가 분명하지 않다. 두 번째 중단원인 '벡터의 내적' 단원의 전개 방식을 기호적 세계 및 구체적 세계와 관련하여 나타내면 [그림 Ⅲ-9]과 같다.

기호적 세계		기호적 세계		구체적 세계		기호적 세계		기호적 세계		기호적 세계
벡터의 성분 표현	➜	성분을 이용한 벡터의 연산 정의	➜	힘과 일의 관계 설명에 사용되는 벡터의 내적 ($\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$)	➜	성분을 이용한 벡터 내적의 표현 ($\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$)	➜	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$을 이용하여 벡터의 내적에 대한 연산법칙 증명	➜	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$을 이용하여 두 벡터의 이루는 각의 크기를 구하는 방법 유도

[그림 Ⅲ-9] '벡터의 내적' 단원의 전개 방식과 구체적, 기호적 세계

3. 논의

이상 '기하와 벡터' 교과에서 다루어지는 벡터와 내적 개념을 앞서 추출한 5가지 세부 분석 관점에 비추어 분석한 결과를 정리하면 다음과 같다.

관점 1. 벡터 개념은 유향선분, 수의 순서쌍 중 어떤 표현을 통해 설명되는가?

기하와 벡터 교과서에서 벡터 개념은 물리적 현상을 기초로 도입되어 유향선분으로 다루

어지다가 위치벡터를 토대로 재해석된 다음 벡터의 성분을 통해 수의 순서쌍으로 표현된다. 즉, 벡터 개념은 구체적 세계의 기하적인 표현 형식에서 출발하여 기호적 세계의 대수적인 표현 형식에 의해 설명된다. 벡터 개념의 표현 형식을 이처럼 발전시키기 위해서는 '크기와 방향이 같은 벡터 족'을 대표하는 하나의 특수한 벡터로서의 위치벡터 개념을 의미있게 이해할 필요가 있다. 그러나 기하와 벡터 교과서는 위치벡터를 좌표축이 없는 일반평면 위에서 단순히 시점이 한 점 O인 벡터로만 정의하고 있어 위치벡터 개념 이해를 위한 충분한 전략이 소개되어 있지 않다. 이는 2007 개정 교육과정에서 벡터 단원의 두 번째 중단원인 '벡터의 내적' 단원의 학습 목표를 '두 벡터의 내적을 알고, 이를 구할 수 있다'(교육인적자원부, 2007, p. 90)로만 제시하고, 위치벡터와 벡터의 성분에 대한 학습 목표가 상술되지 않은 것과 무관하지 않다. 장시간에 걸친 벡터 개념의 역사적 형식화 과정에 비추어 볼 때 기하적 벡터에서 대수적 벡터로의 개념 발달은 쉽지 않은 과정이며(Dreyfus, Hillel, & Siperpinska, 1998), 벡터에 대한 기하적 표현 형식을 산술적 정의로 급격하게 전환하는 전개 방식은 벡터 개념과 관련된 인지 발달에 오히려 장애가 될 수 있으므로(Robert, 2000), 벡터 표현을 유향선분에서 수의 순서쌍인 성분으로 발전시키는데 기초가 되는 위치벡터 지도와 관련된 교수학적 연구가 필요하다.

관점 2. 벡터 덧셈은 물체의 이동, 물체에 가한 힘, 속도 중 어떤 물리적 경험으로부터 도입되는가?

기하와 벡터 교과서에서 벡터의 덧셈은 물체의 이동 또는 물체에 가한 힘을 통해 도입된다. 구체적 세계에서 수학적 개념은 물리적 경험에 기초하여 형성되므로 그 개념의 특징은 다루어지는 경험적 현상의 종류에 따라 달라질 수 있다(Watson, 2002). 실제로 학생들은 물체의 이동에 의한 덧셈은 삼각형법에, 물체에 가한 힘에 의한 덧셈은 평행사변형법에 가깝다고 여기는 경향이 있다(Watson et al., 2003). 벡터의 덧셈을 소개하기 위해 도입되는 물리-역학적 상황과 그 정의 방식간의 인지적 일관성이 보다 고려될 필요가 있으며, 이외에 다른 물리적 현상과 벡터의 덧셈 개념 사이의 관계를 살피는 후속연구가 필요하다.

관점 3. 벡터의 덧셈은 어떻게 정의되며 덧셈에 대한 연산법칙은 어떻게 증명되는가?

기하와 벡터 교과서에서 벡터의 덧셈을 정의하는 방법과 그 연산 법칙을 증명하는 방법은 벡터의 표현 형식에 따라 각기 다르다. 유향선분으로 표현된 벡터에 대해서 벡터의 덧셈은 삼각형법에 의해 기하적인 방법으로 정의되고 그 연산법칙 역시 기하적인 방법으로 설명된다. 그러나 구체적 세계에서 시각적 경험을 통해 설명된 수학적 지식은 해당 개념이 따르는 일반 법칙을 증명한 것이라고 보기 어려우므로(Tall, 2004b), 덧셈에 대한 연산 법칙은 수의 순서쌍으로 표현된 벡터 개념이 다루어지는 기호적 세계의 정당화 방식을 통해 설명되는 것이 적절해 보인다. 그러나 기하와 벡터 교과서는 성분으로 표현된 벡터에 대해 그 덧셈을 각 성분의 합으로 다시 설명하면서도 벡터의 덧셈에 대한 연산법칙은 전혀 다루고 있지 않다. 이처럼 현행 교과서가 성분으로 표현된 벡터의 연산 법칙을 다루지 않는 이유는 교육과정해설서가 벡터의 연산을 기하적 방법으로 정의하고 그 연산법칙도 기하적인 방법으로 증명하도록 한 것과 무관하지 않아 보인다. 그러나 벡터와 그 연산을 유향선분으로만 다루는 것은 벡터 개념을 추상적으로 다루는데 장애가 될 수 있으며 이후 벡터 개념의 바람직한 인지 발달을 제한할 수 있다(Gueudet-Chartier, 2004). 벡터의 연산에 대한 정의와 그 연산법칙에 대한 증명을 기하적인 방법으로만 진행하도록 하는 교육과정해설서의 내용에 대해 반

성적 검토가 필요하다.

관점 4. 벡터의 내적은 어떻게 정의되고 그 연산법칙은 어떻게 증명되는가?

기하와 벡터 교과서에서 벡터의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (단, θ 는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각)과 같이 구체적 세계의 대상으로 정의되고 연산법칙은 관계식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ (단, $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$)을 통해 기호적 세계의 대수적 방식으로 증명된다. 벡터의 내적에 대한 연산법칙뿐만 아니라 벡터의 내적과 관련된 일련의 성질들은 모두 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 에 의해 유도되는 바, 벡터의 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 와 같이 정의하도록 하는 교육과정해설서의 의도가 분명하지 않다.

관점 5. 벡터의 내적이 지닌 가치는 어떻게 설명되는가?

기하와 벡터 교과서는 벡터의 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 으로 정의하고 여기에 코사인 법칙을 적용하여 관계식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 을 유도함으로써 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}=\cos\theta$ 을 밝히고, 이를 이용하여 성분으로 표현된 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 문제를 다룬다. 이러한 전개방식은 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 기하적 문제를 벡터의 내적을 이용한 산술적 계산을 통해 손쉽게 구할 수 있음을 보여준다는 점에서 벡터의 내적이 지닌 가치를 암묵적으로 드러낸다고 볼 수 있다. 벡터의 내적이 지닌 이와 같은 가치가 다루어지기 위해서는 어떤 형태로든 벡터의 내적이 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 과 관련됨을 설명할 필요가 있다. 이러한 요구로 인해 교육과정해설서는 벡터의 내적을 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 으로 정의하도록 하였을 수 있다. 그러나 벡터의 내적을 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 과 같이 정의하여도 두 벡터가 이루는 각을 벡터의 내적과 관련하여 설명하는 데는 무리가 없으며 벡터의 내적이 지닌 교수학적 가치도 현재 교과서에서와 같이 다룰 수 있다.

Ⅴ. 결론

이 연구는 2007 개정 교육과정의 '기하와 벡터' 교과에서 다루어지는 벡터와 내적 개념을 분석하여 그 특징을 기술함으로써 벡터와 내적 개념 지도의 교수학적 시사점을 얻는데 목적을 두었다. 이를 위해 '기하와 벡터' 교육과정에서 다루어지는 벡터와 내적 개념 분석을 위한 세부 관점을 Tall(2002a; Tall, 2004b)과 Watson et al.(2003; Watson, 2002)에 기초하여 5가지로 추출하고, 이렇게 추출된 세부 관점을 토대로 '기하와 벡터' 교육과정 및 교육과정 해설서, '기하와 벡터' 교과서 10종 모두에서 다루어지는 벡터와 내적 개념의 특징을 분석하였다. 이로부터 벡터와 내적 개념 형성과 관련된 교육과정상의 이슈를 구체화하면 다음과 같다.

첫째, 벡터 개념의 의미있는 인지 발달을 위해서는 그 표현 형식을 유향선분에서 수의 순서쌍인 성분으로 변화시키는 과정이 필요하나 여러 선행 연구에 따르면 이는 쉽지 않은 과정이다. 이에 벡터 개념을 기하적 표현에서 대수적 표현으로 발전시키는데 기초가 되는 위

치벡터 지도와 관련된 교수학적 연구가 필요하다.

둘째, 유향성분에 의한 기하적 벡터로는 다양하고 복합적인 벡터 개념을 충분히 표현하는데 한계가 있다. 이러한 맥락에서 볼 때 현행 교육과정해설서가 벡터의 연산을 정의하고 그 연산법칙을 증명하는데 기하적인 방법에 따르도록 명시하였으면서도 다른 표현 방법에 의한 정의와 증명에 대해 언급하지 않는 것은 벡터와 그 연산에 대한 개념 발달과 관련하여 아쉬운 점이라 할 수 있다.

셋째, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (단, θ 는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각)와 같은 벡터의 내적은 힘과 일이라는 물리적 현상을 해석하는 도구로 활용될 때 그 가치를 드러내는 바, 이러한 현상을 다루는 것이 주요 학습목표가 아닌 기하와 벡터 교과의 벡터 단원에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 을 내적의 정의로 택한 이유가 분명하지 않다. 실제로 현행 교육과정에서 벡터의 내적과 관련된 대부분의 성질은 관계식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ (단, $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$)을 통해 설명되므로 벡터의 내적을 정의하는 방식과 관련된 교수학적 논의가 필요하다.

참고 문헌

교육인적자원부(2007). 수학과 교육과정. 서울: (주)미래엔.

교육과학기술부(2009). 고등학교 교육과정 해설(수학). 서울: (주)미래엔.

권금숙(2011). 벡터의 내적과 관련된 문제 해결력에 대한 분석. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김수환 외(2009). 고등학교 기하와 벡터. 서울: (주)교학사.

김해경 외(2009). 고등학교 기하와 벡터. 서울: 더텍스트.

류희찬 외(2010). 고등학교 기하와 벡터. 서울: (주)미래엔.

우정호(1998). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

우정호 외(2010). 고등학교 기하와 벡터. 서울: 두산동아.

윤현경(2011). 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT. 서울대학교대학원 석사학위논문.

이윤수(2009). 벡터 개념의 지도에 관한 연구. 서울대학교대학원 석사학위논문.

이지현・홍갑주(2008). 교과지식으로서의 유클리드 기하와 벡터기하의 연결성. 학교수학, 10(4), 573-581.

정상권 외(2009). 고등학교 기하와 벡터. 서울: (주)금성출판사.

황석근 외(2009). 고등학교 기하와 벡터. 서울: (주)교학사.

황선욱 외(2009). 고등학교 기하와 벡터. 서울: 신사고.

허은숙(2005). 고등학교에서의 선형대수 개념 지도에 관한 연구 - 수학적 연결을 중심으로 -. 서울대학교대학원 석사학위논문.

최승현 외(2006). 고등학교 수학과 선택 중심 교육과정 개선 방안 연구. 서울: 한국교육과정평가원.

Dorier, J.-L.(2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. (Eds.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 3-81). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H.(1973). *Mathematics as an education task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fuller, L. E.(1998). Vector, determinant and matrices. In J. K. Baumgart (Eds.), *Historical topics for the mathematics classroom* (pp.279-284). USA: NCTM.

Gray, E., & Tall, D.(1992). Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching, 142*, 6-10.

Gray, E., & Tall, D.(2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 65-72.

Gueudet-Chartier, G.(2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications, 379,* 491-501.

Katz, J. V.(1995). Historical ideas in teaching liner algebra. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 188-206). USA: The Mathematical Association of America.

Larson, R., Hostetler: R., & Edwards, H. B.(2005). *Precalculus with limits.* NY: Houghton Mifflin Company.

Robert. A.(2000). Level of conceptualization and secondary school math education. In J.-L. (Eds.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 125-131). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Roe, J.(1993). *Elementary Geometry.* NY: Oxford University Press.

Smith, L.(1992). *Linear algebra*. USA: Springer.

Strang, G.(1988). *Linear algebra and its applications*. USA: Thomson Learning.

Tall, D.(2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, 91 - 107.

Tall, D.(2004a). Building theories: The three worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 29-32.

Tall, D.(2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 281-288.

Tall, D.(2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.

Vinner, S.(1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Watson, A.(2002). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 369-376.

Watson, A., Spyrou:, & Tall, D.(2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal for*

Research in Mathematics Education 1(2), 73-97.
Young, D. H., & Freedman, A. R.(2003). 대학물리학. (대학물리학교재편찬위원회 역). 서울: 북스힐. (영어 원작은 2000년 출판).

An Analysis of the Vector and Inner Product Concepts in Geometry and Vector Curriculum

Shin, BoMi[6)]

Abstract

This study analyzed issues in the mathematics curriculum concerning the cognitive development of the vector and inner product concepts in the light of Tall's and Watson's research(Tall, 2004a; Tall, 2004b; Watson et al., 2003; Watson, 2002). Some suggestions in teaching the vector and inner product concepts were elaborated in the terms of these analyses. First, the position vector needs to be represented by an arrow on the coordinate system in order to introduce the component form of a vector represented by a directed line segment. Second, proofs of the vector operation law should be carried out by symbolic manipulations based on the algebraic concept of a vector in the symbolic world. Third, it is appropriate that the inner product is defined as $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ (when, $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$) when it comes to considering the meaning of the inner product relevant to vector space in the formal world. Cognitive growth of concepts of the vector and inner product can be properly induced through revising explanation methods about the concepts in the curriculum in the basis of the above suggestions.

Key Words : Vector, Inner Product, Cognitive Development of Mathematical Concepts

Received November 13, 2013
Revised December 20, 2013
Accepted December 26, 2013

6) Chonnam National University (bomi0210@jnu.ac.kr)