한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 4, 821-840, December 2013

# 정의의 '정의'를 어떻게 가르칠 것인가?

이지현[1)]

중학교 기하에서 등장하는 도형의 정의는 그 모양에서 시각적으로 확인할 수 있는 단순한 용어의 뜻으로만 생각하기 쉽다. 그러나 도형의 정의에 대한 낮은 이해도는 이와 같은 도형 정의에 대한 도구적 이해의 한계를 보여주고 있다. 이 연구는 영재중학생들을 대상으로, Freudenthal이 주장했던 도형 성질의 논리적 조직화에 의한 정의의 재발명과정을 구체적으로 실행하여 분석하였다. 그 결과 영재 학생 중 상당수가 도형 성질의 논리적 조직화 경험을 통하여, 도형을 왜 그렇게 정의하는 것인가, 또 다른 성질로는 정의할 수 없는가와 같은 도형 정의의 관계적 이해와 관련된 질문에 대해 깊이 이해하고 있음을 확인할 수 있었다. 이 연구에서 분석한 논리적 조직화에 의한 정의의 재발명과정은 중학교 기하교육의 문제를 반성하고 새로운 대안을 모색하는데 도움이 될 수 있을 것이다.

주요용어 : 정의, 안내된 재발명, 증명, 논리적 조직화

## Ⅰ. 서론

많은 중학생들이 평행사변형, 정사각형, 마름모, 사다리꼴, 직사각형과 같은 친숙한 도형의 정의도 정확하게 진술하지 못하며, 이것은 결국 증명에서의 어려움으로 이어진다(서동엽, 1998; 이호철, 2007)[2)]. 도형의 정의는 시각적으로 확인할 수 있는 여러 성질 중 정의가 되는 것을 정확히 구별하면 된다는 점에서 볼 때, 다른 수학 개념의 정의를 진술하는 것보다 쉬운 과제라고 생각할 수 있다(서동엽, 1998). 그럼에도 불구하고 학생들은 왜 간단한 도형의 정의도 정확하게 서술하지 못하는 것일까?

도형의 정의에서 가장 흔하게 나타나는 오류는 바로 정의와 도형의 성질을 혼동하는 것이다(서동엽, 1998; 이호철, 2007). 특히 평행사변형에서 두 쌍의 대변의 길이가 같다는 성질과 같이, 중학교에서 다루는 많은 도형의 성질은 사실 그 정의와 논리적으로 동치이다. 중학교

1) 인천대학교 수학교육과 (jihyunlee@incheon.ac.kr)
2) 중학생들의 평행사변형, 정사각형, 마름모, 직사각형의 정의 이해를 조사한 이호철(2007)의 연구에서, 이 네 도형의 정의를 모두 정확히 알고 있었던 학생은 20%에 불과하였으며, 네 도형 중 한 도형의 정확한 정의도 쓰지 못한 학생 역시 무려 30%에 달하였다. 또한 대부분의 학생이 정의와 성질을 혼동하고 있었다.

교과서에서 도형의 정의와 정의를 바탕으로 증명하는 도형의 성질을 명확하게 구분하여 지도하고 있음에도 불구하고, 서동엽(1998)은 정의와 논리적으로 동치인 성질의 증명을 다루면서 학생들이 정의와 성질을 더욱 혼동하고 있음을 관찰하고 있다. 이와 같이 학생들은 도형의 정의와 성질을 단순히 혼동하거나, 아니면 정반대로 교과서에 제시된 도형의 정의만을 절대적인 것으로 받아들여 정의와 동치인 다른 성질로 도형의 정의를 다르게 선택할 수 있음을 인정하지 못한다. Skemp(1971)는 단지 결과만을 암기하여 기계적으로 적용하는 것을 도구적 이해(instrumental understanding)로, 그것이 왜 그렇게 되는지 까지 모두 아는 것을 관계적 이해(relational understanding)로 구분한 바 있다. 위와 같은 도형 정의의 오류는, 많은 중학생들이 도형의 정의를 배우고 또 이 정의를 바탕으로 도형의 여러 성질을 증명한 연후에도, 도형 정의에 대하여 도형을 왜 그렇게 정의하는지는 전혀 이해하지 못하는 도구적 이해의 수준에 머물러 있음을 보여준다.

Freudenthal(1971)은 수학에서 '정의'는 일상적인 정의와 달리 용어의 의미에 대한 단순한 약속이 아니며, 특히 기하교육에서 도형의 정확한 정의를 처음부터 전달한다면, 어떤 도형이 왜 그렇게 정의되는 것이며 또 그 정의는 어떤 의미가 있는가를 이해하기 어렵다고 보았다. 그 대안으로, Freudenthal은 도형의 여러 성질을 논리적으로 조직하면서 이 중 어느 성질이 다른 성질들을 끌어내는 기본 성질이 될 수 있는지를 발견하고, 이러한 기본 성질을 정의로 선택하는 재발명과정을 가르쳐야 한다고 주장하였다. 예를 들어 평행사변형의 성질을 논리적으로 조직화하는 과정에서, 왜 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형' 이 정의가 되며 또 '두 쌍의 대각이 같은 사각형'과 같은 다른 정의의 선택은 어떻게 가능할 수 있는지를 관찰할 수 있다. 따라서 이러한 논리적 조직화의 과정을 통하여, 학생들은 도형의 정의를 용어의 의미에 대한 단순한 약속으로 수용하는 도구적 이해가 아니라 그 도형이 갖는 성질들에 대한 논리적 조직화의 최종 산물로서 관계적으로 이해할 수 있을 것이다.

도형의 정의 교육과 관련한 Freudenthal(1971)의 주장이 잘 알려져 있음에도 불구하고, de Villiers(1998, 2004), Herbst, Gonzalez, Macke(2005), Zaslavsky, Shir(2005)의 연구 외에는 도형 성질의 논리적 조직화로서의 정의의 재발명을 다룬 연구가 많지 않다[3]. 이 연구는 중학교 영재학생들을 대상으로, 도형 성질의 논리적 조직화에 의한 정의의 재발명 경험으로 도형 정의에 대한 관계적 이해의 변화를 분석하고자 하며, 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

---

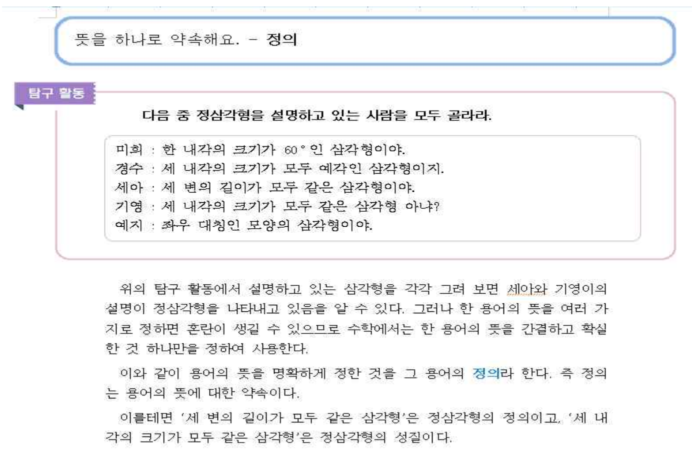
3) de Villiers는 10학년 학생들(1998)및 예비교사들(2004)을 대상으로, 도형의 여러 성질 중 도형을 결정하는 데 충분한 성질을 선택하여 정의를 재발명하는 과정을 통해 고등학생 혹은 예비교사들의 도형 정의에 대한 이해(특히 정의의 최소성·임의성의 측면)가 향상되었음을 보고하였다. 그러나 de Villiers의 교수 실험에서 도형을 결정하는데 충분한 성질을 선택하는 과정은, Freudenthal(1971)이 지적했던 도형 성질의 논리적 조직화 과정이라기보다는 Sketchpad와 같은 도구를 이용한 실험적 과정이었다. 한편, Herbst, Gonzalez, Macke(2005)의 교수실험에서는 주어진 어떤 성질을 갖는 도형을 찾는 'Guess My Quadrilateral' 게임의 과정에서, 학생들이 도형 성질을 논리적으로 조직화하는 추론을 하였으며 그 결과 도형 정의의 최소성과 임의성을 이해할 수 있었음을 보고하였다. 한편, Zaslavsky, Shir(2005)은 이등변삼각형, 정사각형과 동치인 정의를 선택하는 소집단 토론과정에서 나타난 고등학생들의 수학적 정의에 대한 인식을 분석하였다.

- 학생들이 가지고 있었던 도형의 정의 개념은 어떠한 한계를 가지고 있었는가?
- 학생들은 교사의 안내 하에 도형의 성질을 어떻게 논리적으로 조직화할 수 있었는가?
- 위와 같은 교수실험 후, 학생들의 도형의 수학적 정의에 대한 관계적 이해는 어떻게 변하였는가?

## Ⅱ. 이론적 배경

2007 개정교육과정까지 우리나라 교과서에서 ‘정의’ 라는 용어는 중학교 수학 2의 논증기하 부분에서 처음 도입되며, 다음 정삼각형의 정의 상황([그림 Ⅱ-1])은 많은 중학교 2학년 교과서에서 정의 개념을 설명하기 위한 예로 등장하고 있다. 많은 중학교 교과서에서는 정삼각형에 대한 학생들의 여러 설명 중 삼각형의 세 변 혹은 세 각이 같으면 정삼각형이지만, ‘용어의 뜻을 제각기 다르게 정하여 사용하면 혼란이 생길 수 있으므로’ 정삼각형의 뜻을 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형으로 약속하며, 이때 세 각의 크기가 같다는 것은 성질이 된다는 것을 [그림 Ⅱ-1]와 같이 설명한다. 그러나 이와 같은 설명을 “도형을 다른 성질로 정의하면 안 되는가?”, 또 “도형의 성질 중 정의를 어떻게 구별하는가?”와 같은 학생들의 의문에 대한 충분한 대답으로 보기는 어렵다.

논증기하에서는 정의라는 용어를 도입하면서, 정의의 수학적 사용을 필요로 한다(조영미, 2001: 109). 일상생활에서는 정의를 주로 정의되는 대상을 다른 대상과 구별하는 근거로 사용하지만, 수학에서는 정의를 다른 대상과 구분하는 것 이상의 정의로부터 그 대상이 가지고 있는 새로운 성질을 증명하는 데 사용하게 된다. 이러한 사용의 차이 때문에, 수학적 정의는 일상적인 정의와 달리 정의와 정의되는 대상이 정확하게 동치 혹은 필요충분조건이라


뜻을 하나로 약속해요. - **정의**

탐구 활동

**다음 중 정삼각형을 설명하고 있는 사람을 모두 골라라.**

미희 : 한 내각의 크기가 60°인 삼각형이야.
경수 : 세 내각의 크기가 모두 예각인 삼각형이지.
세아 : 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형이야.
기영 : 세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형 아냐?
예지 : 좌우 대칭인 모양의 삼각형이야.

위의 탐구 활동에서 설명하고 있는 삼각형을 각각 그려 보면 세아와 기영이의 설명이 정삼각형을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나 한 용어의 뜻을 여러 가지로 정하면 혼란이 생길 수 있으므로 수학에서는 한 용어의 뜻을 간결하고 확실한 것 하나만을 정하여 사용한다.

이와 같이 용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 그 용어의 정의라 한다. 즉 정의는 용어의 뜻에 대한 약속이다.

이를테면 ‘세 변의 길이가 모두 같은 삼각형’은 정삼각형의 정의이고, ‘세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형’은 정삼각형의 성질이다.

[그림 Ⅱ-1] 중학교 교과서의 정의 설명
(박영훈 외, 2011: 189)

는 논리적 조건을 만족한다(Alcock, Simpson, 2002; Jacobs, 2003, 46-47). 정의를 '용어의 뜻을 명확하게 정한 것' 으로 일상적인 정의와 별다른 차이 없이 설명하는 우리 교과서와 달리, 미국 기하 교과서들 중에서는 다음《Geometry seeing, doing, understanding》과 같이, 정의는 조건명제로 표현하면 원 명제뿐 아니라 그 역도 성립하는 필요충분조건임을 설명하는 교과서를 찾아볼 수 있었다.

> 기하학의 어떤 용어를 정의하고자 할 때, 그 용어와 그 정의는 정확히 같은 의미로 이해해야만 한다. 예를 들어 '삼각형'을 '세 변을 가진 도형'이라고 정의하는 것은,
>
> 삼각형은 세 변을 가지고 있는 도형이다.
>
> 일 뿐만이 아니라 다음도 의미한다.
>
> 세 변을 가진 도형은 삼각형이다.
>
> 여기서 첫째 명제의 가정과 결론이 둘째 명제에서는 서로 뒤바뀌었음을 알 수 있다. 이러한 둘째 명제를 첫째 명제의 역이라 한다. … 특히 정의에 있어서, 역은 항상 참이다. 왜냐하면 정의되는 용어 '$a$'와 그 정의 '$b$'는 정확히 같은 의미를 가지고 있으므로 '$a$'와 '$b$'는 서로 교환될 수 있기 때문이다. 즉 정의에 대하여, $a \rightarrow b(b \rightarrow a)$는 $b \rightarrow a(a \rightarrow b)$를 함의한다. 하지만 이것은 보통 조건명제에 대해서는 성립하지 않는다.
>
> 이렇게 모든 정의의 역도 참이므로 정의는 보통 '$a$ iff $b$'의 형태로 쓴다. 예를 들어, 앞에서 예로 들었던 삼각형의 정의는 다음과 같이 서술할 수 있다.
>
> 어떤 도형이 세변을 가지고 있을 때 그리고 오직 그때만이 삼각형이다(Jacobs, 2003: 46-47).

필요충분조건으로서의 도형 정의와 관련하여, van Hiele(2009)는 도형의 상징특성(symbol character)과 신호특성(signal character)를 구분하였다. 도형의 상징특성이란 그 도형이 소유한 성질(도형일 필요조건)으로, 예를 들어 평행사변형의 상징특성은 두 쌍의 대변이 평행하고, 길이가 같으며, 대각의 크기가 같다는 성질 등이 해당한다. 평행사변형의 상징특성을 이해함으로서, 평행사변형을 이러한 모든 성질을 소유한 도형으로 볼 뿐만 아니라, 이러한 모든 성질을 가진 도형을 평행사변형으로 인식한다. 도형의 상징특성을 이해한 학생들은 어떤 도형이 평행사변형의 일부 성질을 소유한다는 것을 근거로 그 도형이 평행사변형임을 인식하는 도형의 신호특성(즉, 도형일 충분조건)을 이해하게 된다. 하지만 상징특성과 비교하여 도형의 신호특성을 이해하고 조작한다는 것은 쉽지 않은데, van Hiele는 도형의 상징-신호특성을 총체적으로 바라볼 수 있어야 도형의 성질 사이의 함의 관계를 이해할 수 있다고 지적한다. 예를 들어 "사각형의 두 대각선이 서로를 이등분하면, 두 쌍의 대각의 크기가 같다"는 명제를 이해하기 위해서는, 먼저 두 대각선이 서로를 이등분한다는 것을 기초로 평행사변형임을 인식하고(신호특성), 이것으로부터 두 대각의 크기가 같다는 것(상징특성)을 끌어내야 하므로 상징 · 신호 특성의 총체적 이해가 필요하다고 보았다.

한편, 학생들은 수학에서 정의란 무엇이며 정의가 갖추어야 할 특징은 무엇인가에 대하여, 교과서에서 제시하는 정의의 '정의' 보다는 특정 수학적 개념들의 정의를 학습하는 과정에서 간접적으로 배우게 된다(Zaslavsky, Shir, 2005). Freudenthal(1971)은 수학에서 정의란 무엇인가를, 특히 도형의 여러 성질을 논리적으로 조직화하는 과정을 통하여 가르칠 수 있다고 주장하였다. 예를 들어 평행사변형 모양에서 상호 관련성을 가지는 여러 기하학적 성질을 관찰할 수 있으며, 어떤 한 성질이 그로부터 다른 성질들을 끌어낼 수 있는 기본 성질이 될 수 있음을 발견하여 이러한 기본 성질을 평행사변형의 정의로 선택할 수 있다. Freudenthal은 도형의 정의는 최초에 제시되어 다른 여러 성질들을 증명할 수 있는 공고한 기초가 되는 것이 아니라, 오히려 정반대로 정의는 그 도형의 기하학적 성질을 연역적으로 조직화하여 얻게 되는 가장 최종적인 산물이라고 지적하였다.

특히 이와 같은 논리적 조직화에 의하여 도형의 정의를 선택하는 과정에서, 학생들은 자연스럽게 도형의 정의가 얼마나 많은 성질을 포함해야 하는가? 왜 이 성질만 포함하면 되는가? 이것이 아닌 다른 성질로 정의할 수는 없는가? 와 같은 질문을 탐구하게 되며, 그 결과로 얻어지는 도형 정의의 최소성, 임의성과 같은 속성을 받아들이게 된다. 예를 들어 평행사변형을 '두 쌍의 대변이 평행하고, 길이가 같은 사각형' 이라고 정의하지 않아도 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형' 이라는 최소의 정의만으로도 충분하다는 점[4], 또 평행사변형의 여러 성질들은 사실 동치이므로 '두 쌍의 대변이 같은 사각형' 과 같이 다른 정의를 선택할 수도 있다는 정의의 임의성을 이해할 수 있다[5]. 그러나 도형의 정의와 관련하여 정의개념의 이해를 분석한 일련의 연구들(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992; Gavender, de Villiers, 2004; Zaslavsky, Shir, 2005; 이지현, 2013)에 의하면, 학생들뿐만 아니라 많은 예비교사들조차도 도형 정의가 도형일 필요충분조건이라는 사실도 정확하게 알고 있지 못할 뿐 아니라(Gavender, de Villiers, 2004, pp.40), 앞에서 살펴보았듯이 정의의 선택과정에서 등장하는 도형 정의의 임의성 및 최소성과 같은 특징에 대한 이해가 매우 부족한 것으로 나타났다. 이상과 같은 도형의 정의 이해에 관한 연구결과들은, 도형의 정의를 배운 많은 학생들이 왜 도형을 그렇게 정의해야 하는가와 같은 질문에 대해서는 거의 알고 있지 않은 도구적 이해의 수준에 머무르고 있음을 보여주고 있다.

4) 정의의 최소성이란, 수학적 정의는 그 개념을 결정하는 최소한의 정보만을 가지고 있으면 충분하며 불필요한 정보는 포함하지 않는 속성이다(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992).

5) 이와 같이 수학에서는 어떤 개념에 관한 동치 명제 혹은 필요충분조건이 여러 개 존재할 수 있으며, 수학적 정의는 이러한 동치명제 중 임의로 어느 한 명제를 그 개념의 정의로 선택할 수 있다는 의미에서 임의적이라고 할 수 있다(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992). 또한 수학적 정의의 임의성은 정의와 정리(성질)의 지위가 고정된 혹은 절대적인 것이 아니며 상호 교환될 수 있음을 함의한다.

# Ⅲ. 연구방법

## 1. 연구 참여자 및 절차

교수실험에 참여했던 학생들은 서울 남부지역 소재 영재교육원에 소속된 중학교 1학년 학생 17명이었으며, 도형의 논리적 조직화를 다뤘던 교수실험은 연구자가 직접 교사로서 2013년 7월부터 8월까지 총 3회(각 2시간)에 걸쳐 수행하였다. 교수실험 전 학생들의 기하학적 사고 수준을 파악하기 위하여 van Hiele test를 실시한 결과, 2수준 1명, 4수준 3명을 제외한 13명의 학생들이 3수준(관계적 인식 수준)으로 나타났다[6]. 이 연구의 절차는 <표 Ⅲ-1>에 제시하였으며, van Hiele test 후 도형의 정의 이해를 파악하기 위해 실시한 사전검사의 구체적 내용과 결과는 다음 절에서 소개하기로 한다.

<표 Ⅲ-1> 연구의 절차

| 사전검사 | 교수실험(3차시) | 사후검사 |
|---|---|---|
| van Hiele test<br>도형의 정의 이해 검사<br>(직사각형 정의의 임의성 포함) | 이등변삼각형 · 사다리꼴 · 평행사변형<br>성질의 국소적 조직화 및<br>전체적 조직화 | 이등변삼각형 · 평행사변형<br>정의의 임의성 |

연구 참여자들은 2009 개정교육과정을 배우고 있는 중학생들이었다. 2009 개정교육과정에서는 2007 개정교육과정과 달리 기하 단원에서 '명제, 가정, 결론, 역, 정의, 증명'과 같은 용어 및 이에 대한 설명이 삭제되었다. 그러나 교수실험에서 학생들이 명제, 정의, 가정, 결론, 정의, 증명과 같은 용어를 자연스럽게 구사하였기 때문에 용어는 사용하였으나, 이들 용어에 대하여 2007 개정교육과정에서 제시했던 것과 같은 별도의 설명을 제시하지는 않았다. 한편, 절반이상의 학생이 사교육을 통해 중학교 2학년 사각형의 성질 단원까지 예습은 한 상태였으나 잘 기억하지는 못하였으며[7], 아예 아직 중학교 1학년의 기하 내용도 접하지 못했던 학생들도 있었으므로, 교수실험의 초반에서는 교수실험의 주 내용 외에도 평행선의 성질, 삼각형의 합동조건 및 직각삼각형의 합동조건에 대해서도 간단히 설명하였다.

6) 본 연구에서 사용한 van Hiele test는 이중권(2006)의 van Hiele 검사지(Usiskin(1982)이 고안한 van Hiele test에서, 5수준 판별문항을 제외한 1-4수준 판별 20문항으로 구성되어 있음)를 활용하였으며, 각 수준을 측정하는 5문항 중 4문항을 정답으로 했을 때, 그 수준에 도달한 것으로 간주하였다.
우리나라 중학교 기하 단원에서 다루어지고 있는 증명은 3수준과 4수준 사이의 사고를 필요로 한다(나귀수, 1998). 한편, Senk(1985, 나귀수, 1998, pp. 293에서 재인용)의 연구결과에 따르면, 제3수준에서 증명학습을 시작하는 학생들은 약 85%의 성공률을 보였다. 이러한 연구결과에 기초하여 볼 때, 본 연구의 참여자들은 증명학습에 대한 준비도가 충분했던 학생들이었다.
7) 학생들의 선행학습 수준을 조사한 결과, 중학교 2학년 사각형의 성질까지 사교육을 통하여 한번이라도 예습 경험이 있었던 학생들은 11명이었다.

3차시의 교수 실험이 모두 끝난 2주 후에, 도형의 정의의 관계적 이해를 확인하기 위한 사후 검사를 실시하였다. 교수실험의 과정에서 수집한 학생들의 설문지·활동지 및 인터뷰와 수업 녹화를 전사하여 분석하였으며, 교수실험의 내용 분석은 4장에서, 사후검사문항 및 그 분석결과는 5장에서 논의하기로 한다.

## 2. 사전 검사의 분석

학생들의 도형의 정의 이해도를 파악하기 위한 사전 검사는 [표 Ⅲ-2]와 같이 세 유형의 문항으로 구성하였다.

<표 Ⅲ-2> 사전검사의 개요

| 문항 유형 | 문항 내용 |
|---|---|
| Ⅰ. 수학에서 정의에 대한 생각 | 수학에서 정의란 무엇인가? 다른 과목의 정의와의 차이점은? |
| Ⅱ. 기본 도형의 정의 서술 | 평행사변형·직사각형·정사각형·마름모·사다리꼴 정의 쓰기 |
| Ⅲ. 수학적 정의의 임의성과 관련한 van Hiele 5수준 문항 | 직사각형의 정의가 두 가지 일 수 있겠는가? |

문항 1에 대하여, 학생들은 수학에서의 정의를 ‘수학을 하기 위해서 필요한 기본적인 약속으로 어떤 뜻을 용어로 정해놓은 것, 수학 용어의 올바른 뜻’ 등으로 설명하였으며, 정의가 ‘문제를 풀기위한 (공식이나 방법과 같이) 밑받침의 역할을 하는 것’ 이라는 답변도 있었다. 한편, 수학에서의 정의는 ‘문제를 풀기 위해 꼭 필요한 밑받침이 된다, 다른 과목의 정의는 여러 개일 수 있으나 수학에서 정의는 단 하나 이다, 수와 문자를 써서 표현 한다’는 점에서 다른 과목에서의 정의와 다르다고 생각하였다.

문항 2에서 17명의 학생 중 12명의 학생들은 기본 도형의 정의를 모두 정확하게 알고 있었다. 그러나 나머지 5명의 학생들은 하나 이상의 도형 정의를 정확하게 서술하지 못하였으며, 예를 들어 평행사변형에 대해 ‘두 쌍의 대변이 각각 평행하고, 길이가 같은 사각형’과 같이 정의보다 더 서술하는 경향이 있었다.

문항 3은 van Hiele 5수준 판별 문항(Usiskin, 1982) 중 하나로 도형 정의의 임의성과 관련된 문제이다. 연구자는 학생들에게 다섯 보기 중 하나를 선택하고 그 이유를 서술하도록 하였으며, 이에 대해 몇몇 학생들과 인터뷰를 할 수 있었다. [표 Ⅲ-3]은 각 보기에 대한 학생들의 답변 및 인터뷰 내용을 정리한 것이다.

10명의 학생들이 직사각형에 대해 서로 다른 정의가 2개 있을 수 없다는 보기 ②를 선택하였으며, 이 학생들은 재환이의 답변과 같이 어떤 도형에 대해 두 가지 정의가 있다면, 그 중 단 하나의 정의만이 ‘옳은’ 정의라고 하였다. 반면, 보기 ③·④·⑤ 중 하나를 선택한 학생들은 정의의 임의성을 인정하고 있었다고 볼 수 있었는데, 이들 학생들은 도형은 여러 가지

성질(혹은 특징)을 가지고 있으므로 여러 성질 중 선택의 다양성 혹은 표현상의 차이로 다른 정의가 가능하다고 생각하고 있었다.

<표 Ⅲ-3> 정의의 임의성에 대한 사전검사 문항

| van Hiele 문항 | 2개의 교과서에서 직사각형이라는 용어를 서로 다르게 정의하고 있을 때, 다음 보기 중 옳은 것은? |
|---|---|
| **정의는 단 하나이다.** | ① 두 교과서 중 하나는 틀렸다(0명)<br>② 두 정의 중 하나는 틀린 것이다. 직사각형에 대해서 서로 다른 정의가 2개 있을 수 없다(10명) |
| | - 한 교과서에서 정의를 바르게 정의했는데, 정의는 딱 한 문장이기 때문에, 다른 교과서에서 다르게 정의했다면, 그 교과서는 올바른 정의를 하지 않은 것이기 때문에(재환)<br>-이등변삼각형 같은 것 두요, 두 내각의 크기가 같은 삼각형이라고 정의해도 되는데, 책이랑 그런 거에 두 변의 길이가 같은 삼각형만 정의로 취급하는 것 같았어요(승미와의 인터뷰). |
| **정의는 여러 개 있을 수 있다[8].** | ④ 두 교과서에 나오는 직사각형의 성질은 같을 수밖에 없다(2명) |
| | - 직사각형이라는 용어를 다르게 정의했다고 해서, 그것이 가지고 있는 성질이 달라질 수는 없을 것 같아요. 직사각형은 네 각이 같은 사각형이잖아요. 네 각의 크기가 같고, 두 대변의 길이가 같은 사각형이라고 해도 직사각형의 정의는 되는 거잖아요. 그렇지만 직사각형의 성질은 달라지는 것이 아니잖아요? 다르게 정의했지만(수미와의 인터뷰). |
| | ⑤ 두 교과서에 나오는 직사각형의 성질 중에는 다른 것이 있을 수도 있다(4명). |
| | ③ 두 교과서에 나오는 직사각형의 성질은 다를 수밖에 없다(1명). |

이와 같은 사전검사결과, 절반 이상의 학생들이 도형에 대하여 단 하나의 옳은 정의만이 존재한다고 생각하고 있었으며, 서로 다른 정의를 옳고 그름의 관점으로만 판단하여 도형 정의의 임의성을 인정하지 않았다. 특히 이등변삼각형 정의의 임의성을 이해하고 있으면서도 "책이랑 그런 거에 두 변의 길이가 같은 삼각형만 정의로 취급하는 것 같아" 도형 정의는 한 가지 밖에 없다고 했던 한 학생의 대답은, 학생들이 통상적인 정의교수관행에서 도형의 정의는 단 한 가지뿐이라는 잘못된 메시지를 얻을 수 있음을 보여주고 있다.

# Ⅳ. 교수 실험의 분석

도형 성질의 논리적 조직화를 다룬 교수 실험의 과정을, 먼저 어떤 도형의 성질에 대해 부

8) 여기서 보기 ④와 ⑤의 차이는, 도형의 정의도 도형의 성질에 포함 되는 것인가의 여부와 관계가 있다. 도형의 성질(혹은 정리)는 도형의 정의를 바탕으로 증명하는 명제로서, 도형의 정의와는 구별하는 것이 보통이다. 하지만 넓은 의미에서는, 또 증명을 본격적으로 다루기 전 초등학교에서의 도형의 성질은 정의와 정리를 합한 것으로 볼 수 있다(유병림, 1977). 그러나 인터뷰 결과, 본 연구에 참여한 학생들의 대부분은 도형의 정의는 성질에 포함되는 것으로 생각하고 있었으며, 보기 ⑤를 선택한 학생들도 꼭 도형의 성질과 정의를 구별하고 있지는 않았다.

분적인 논리적 연결망을 형성했던 <국소적 조직화 단계>와 전체적인 논리적 연결망을 형성한 <전체적 조직화 단계>로 나누어 살펴본다.

## 1. 도형 성질의 국소적 조직화

<표 Ⅳ-1>은 국소적 조직화 단계에서 도형 성질의 논리적 조직화를 위해 학생들에게 제시한 과제의 특징을, 평행사변형을 예로 들어 이에 대응하는 교과서의 도형의 성질・조건의 증명 과제와 비교한 것이다. 교과서에서는 도형의 성질과 조건을 먼저 제시하지만, 이 교수실험에서 교사는 이등변삼각형, 사다리꼴, 평행사변형에 대하여 먼저 이들 도형의 뜻 외에도 각 도형에서 참이라고 생각되는 성질들은 무엇인지를 학생들이 스스로 찾아보고, 이를 논리적으로 정당화해보도록 하였다. 그리고 학생들이 제기한 도형의 성질 중에서 과연 이 도형만의 성질은 무엇인지, 혹은 다른 학생들이 찾은 성질과는 어떤 논리적 관련성이 있는지에 대하여 살펴보았다.

<표 Ⅳ-1> 교수실험과 교과서의 과제 비교

| 연구에서 제시한 과제 | 통상적인 교과서의 과제 | van Hiele의 구분 |
|---|---|---|
| [도형의 성질]<br>평행사변형에서"두 쌍의 대변이 평행하다"외에도 참이라고 생각되는 모든 성질을 찾아보고, 왜 그 성질이 참인지를 정당화하여라. | [도형의 성질]<br>평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같음을 증명하여라. | 상징 특성(symbol character)<br>도형이 소유한 성질 |
| [도형만의 성질]<br>앞에서 찾은 성질 중 평행사변형만의 성질은 무엇이며, 그것을 어떻게 확신할 수 있겠는가? | [도형이 되는 조건]<br>두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형은 평행사변형임을 증명하여라. | 신호 특성(signal character)<br>도형에 이르는 성질 |
| [도형의 여러 성질 사이의 관계]<br>학생들이 찾은 다른 평행사변형의 성질들 사이에는 어떤 논리적 관계가 있는가? | 평행사변형의 여러 성질사이의 관계는"두 쌍의 대변이 평행하다"는 정의를 매개로만 다루어지며, 직접적으로 다루어지지는 않음 | 상징- 신호 특성 |

학생들은 별다른 어려움 없이 교과서에 제시된 성질들 외에도 도형이 가지고 있는 여러 성질들을 제시하였다. 그런데 학생들이 제시한 이등변삼각형의 성질 중에는 "세 각의 크기의 합은 180도 이다" 와 같이 이등변 삼각형이 아닌 삼각형에서도 성립하는 성질들이 있었으므로, 교사는 학생들에게 '이등변 삼각형만의 성질' 과 '이등변 삼각형이 아니어도 가질 수 있는 성질' 을 과연 어떻게 구분할 수 있는지를 질문하였다.

정훈이는 "이등변 삼각형과 아닌 삼각형을 그려놓고 대입을 해서" 어떤 성질이 이등변 삼각형이 아닌 다른 삼각형에서도 성립하면, 그 성질은 이등변삼각형만의 성질이 아니라는 것

을 알 수 있다고 하였다. 이와 같이 학생들은 어떤 성질이 이등변삼각형만의 성질이 아님은 이와 같은 반례를 통해 쉽게 확인하였으나, 두 각의 크기가 같다와 같은 성질이 이등변삼각형만의 성질임을 어떻게 확신할 수 있는지에 대해서는 혼란스러워 하였으며, 한 학생은 성질 $A$가 도형 $B$의 성질이면, 당연히 도형 $B$만의 성질이라는 주장을 펼치기도 하였다[9]. 이러한 반응에서 학생들이 '$A$이면 $B$이다.' 와 그 역 명제인 '$B$이면 $A$이다' 의 차이를 잘 인식하지 못하고 있음을 알 수 있었으며, 결국 교사는 성질 $A$가 도형 $B$만의 성질임을 보이기 위해서는 '성질 $A$이면 도형 $B$이다' 를 증명하면 된다는 점을 설명하였다[10].

이후 진행된 사다리꼴과 평행사변형의 탐구에서도 연구자는 학생들에게 도형의 성질 중 도형만의 성질인 것을 찾아보도록 하였다. 그런데 이미 사다리꼴의 성질이라고 밝혀진 "윗변 아랫변의 중점을 이은 중선이 전체 넓이를 반으로 나눈다(성질 $A$)"가 과연 사다리꼴만의 성질이 될 것인지를 논의하는 과정에서, 수미는 이 성질은 "사다리꼴이 아닌 사각형에서는 성립하지 않으므로" 사다리꼴만의 성질일 것 같다고 추측하면서, '사다리꼴이 아니면 성질 $A$가 성립하지 않는다[11]'를 증명할 수 있다면 성질 $A$가 사다리꼴만의 성질이라고 하였다. 이와 같이 학생들은 성질 $A$가 도형 $B$ 만의 성질임을 보이기 위해서는, 교사가 알려주었던 '성질 $A$이면 도형 $B$이다' 외에도 '$\sim B$이면 $\sim A$이다' 임을 증명하면 된다는 것을 스스로 찾을 수 있었다.

도형의 성질 및 도형만의 성질이라는 점 외에도, 교수실험에서는 학생들이 각자 찾아낸 서로 다른 도형의 성질 사이의 논리적 관계를 탐색하였다. 예를 들어 다음은 교사의 안내에 의해 평행사변형의 각에 대한 성질인 '마주보는 각끼리 같다' 와 '이웃하는 두 각의 합이 180도이다' 사이의 논리적 관련성을 탐색했던 대화 장면이다.

1. 교사: "마주보는 각끼리 같다.", "이웃하는 두 각의 합이 180도이다." 라는 성질이 어떤 관계가 있을까? 한 가지만 질문해보자. 아까 사다리꼴의 성질 중에서도 "윗각과 아랫각의 합이 180도이다"는

---

9) 이 학생은 '두 각이 같다' 는 것이 이등변삼각형의 성질이므로, 당연히 이등변삼각형만의 성질이어야 한다고 주장하였다. Epp(2003)는 사람들이 일상적인 조건문 '숙제를 끝내면, 영화를 볼 수 있다' 를 사실 그 역인 '숙제를 끝내지 못하면, 영화를 볼 수 없다' 의 의미까지도 동시에 함의하는 것으로 이해한다는 점을 지적하였는데, 여기서 이 학생 역시 비슷한 오류를 범하고 있는 것으로 보인다.

10) 학생들은 기하명제에서 '$A$이면 $B$이다' 를, 단순히 현상 $A$와 현상 $B$가 동시에 일어나는 것으로 받아들이므로, 명제와 그 역의 차이를 인식하지 못한다(van Hiele, 2009). 일상적인 조건문, 가령 '시험을 잘 보면, $A$학점을 받을 것이다' 에서는, 시간적 혹은 인과적 요소로 '$A$이면 $B$이다' 와 '$B$이면 $A$이다' 의 차이를 구별하는 것이 어렵지 않다. 그러나 이등변삼각형에서 '두 변의 길이가 같으면 두 각의 크기가 같다' 와 그 역을 증명할 때는, 학생들은 이등변삼각형의 그림에서 길이가 같은 두 변과 크기가 같은 두 각 중 누가 원인인지 혹은 선행하는 것인지를 구별하기 어렵다(Smith, 1940).

11) 여기서 수미가 제기한 "도형 B가 아니면, 성질 A가 성립하지 않는다" 는 "성질 A이면, 도형 B이다"와 동치이다. 이 학생들은 대우의 개념이 전혀 없는 학생들이었음에도 불구하고 이 점을 찾아낼 수 있었다.

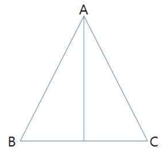
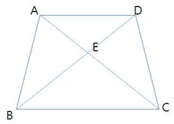
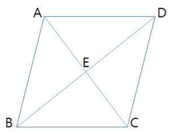
것이 있었는데, 여기서 이 이웃하는 두 각은… 어떤 이웃한 두 각의 합만 180도라도 평행사변형이 될까? “어떤 이웃한 두 각의 합은 180도이다.” 는 것이 평행사변형의 성질임은 맞는 것 같아. 그런데 이게 평행사변형만의 성질도 되려면 이걸 어떻게 표현해야 할까? 예를 들어 (사다리꼴을 그리며), 사다리꼴에서도 이 이웃하는 두 각의 합은 180도가 되잖아?

2. 준영: 양 쪽으로 이웃하는 두 각이라 하면…
3. 교사: “양 쪽으로 이웃하는 두 각”이라는 것이 무슨 뜻이니?
4. 영수: 아! 마주보는 각을 제외한 두 각이요!
5. 교사: (평행사변형의 그림을 그려 양 쪽으로 이웃하는 두 각을 확인하면서) 그럼 각 A에 대해서도, 각 B, C, D에 대해서도 다 돼야 하겠지. 그럼 그것을 어떻게 표현할 수 있을까?
6. 정훈: 한 각의 외각은 이웃하는 각의 크기이다.
7. 교사: 정훈이 말도 맞아. 그런데 ‘이웃하는 각’ 을 좀 더 생각한다면, 여기서 어떤 각에 이웃하는 각은 몇 개 있나요?
8. 학생들: 2개요.
9. 교사: 그럼 모든 각이 이웃하는 각과의 합이 180도라고 하면 되겠네요(교사는 “이웃하는 임의의 두 각의 합은 180도이다” 라고 칠판에 고쳐 쓴다). 그럼 여기서 “마주보는 각의 크기가 같다” 는 것은 어떻게 알 수 있을까?
10. 영수: 이웃하는 두 각의 합이 모두 180도니까, 어떤 각과 이웃하는 두 각은 같아야죠.
11. 교사: 그래서 이 두 성질은 어때요? 같은 이야기가 되네요(수업 전사록).

여기서 교사는 학생들이 제시한 평행사변형의 성질 ‘이웃하는 두 각의 합이 180도이다’ 에 대하여, 사다리꼴도 이 성질을 만족할 수 있다는 점을 지적하였다. 그러자 준영이와 영수는 이 성질이 평행사변형만의 성질이 되기 위해서는 ‘이웃하는 각’ 이 각각 “양 쪽으로 이웃하는 두 각” , “마주보는 각을 제외한 두 각” 이 되어야 한다는 점을 찾아냈으며, 이러한 토론 과정을 거쳐 원 추측은 ‘이웃하는 임의의 두 각의 합은 180도이다’로 정교화 되었다. 한편, 정훈이와 영수의 대답(line 6, line 10)에서 살펴볼 수 있듯이, 이러한 과정에서 학생들은 이 성질이 다른 평행사변형의 성질과 동치라는 사실을 쉽게 이해할 수 있었다.

교과서에서는 평행사변형의 여러 성질 사이의 관계를 “두 쌍의 대변이 평행하다” 는 평행사변형의 정의라는 매개를 통해서만 다루고 있다. 즉, 평행사변형의 성질에서는 모두 가정이 고정된 형태인 “평행사변형이면, ○○이다.”라는 명제를 증명하며, 평행사변형의 조건에서는 모두 그 결론이 고정된 “○○이면, 평행사변형이다”라는 명제들을 증명한다. 그러나 위의 대화 장면에서 살펴볼 수 있듯이, 학생들이 찾은 여러 성질들의 논리적 관계성을 탐색하는 것은 교과서에서의 고정된 가정 혹은 결론을 가진 함의 관계와 달랐던 탓에 학생들이 지루해하지 않았을 뿐더러, 자신이 찾은 성질과 친구들이 찾은 성질들이 사실 논리적으로 동치라는 사실에 큰 흥미를 느끼고 있음을 알 수 있었다. 이상과 같은 도형 성질의 국소적 조직화를 다룬 후, 연구자는 도형의 정의란 “도형의 성질 중에서 도형만의 성질(조건)도 되는 것” 이라고 설명하였다. [표 Ⅳ-2]는 이러한 국소적 조직화단계에서 학생들이 찾아낸 각 도형의 성질이자 도형만의 성질, 즉 필요충분조건을 제시한 것이다.

<표 Ⅳ-2> 학생들이 찾은 이등변삼각형 · 사다리꼴 · 평행사변형의 필요충분조건

| 도형 | 학생들이 찾은 도형의 필요충분조건(chracterization) |
|---|---|
| 이등변삼각형<br> | • 두 변의 길이가 같다.<br>• 두 각의 크기가 같다.<br>• A에서 내린 수선의 발은 BC를 이등분한다<br>• 합동인 두 개의 삼각형으로 나눌 수 있다.<br>• 선대칭 도형이다. |
| 사다리꼴<br> | • 한 쌍의 대변이 평행하다.<br>• 합동인 사다리꼴 2개를 뒤집어 붙이면 평행사변형이다.<br>• 위 아래로 이웃한 두 각의 합이 180도이다.<br>• 넓이 $\triangle ABC=\triangle BCD$(혹은 $\triangle ADB=\triangle ADC$)<br>• $\triangle ADE\sim\triangle CBE$<br>• 윗· 아랫변의 중점을 이은 중선이 사각형 넓이를 반으로 나눈다. |
| 평행사변형<br> | ① 두 쌍의 대변이 평행하다<br>② 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.<br>③ 임의의 이웃하는 두 각의 합은 180도이다.<br>④ $\triangle ABE=\triangle AED=\triangle DEC=\triangle CEB=\frac{1}{4}\times ABCD$<br>⑤ 마주보는 각의 크기가 같다.<br>⑥ 마주보는 두 쌍의 변의 길이가 같다. |

## 2. 도형 성질의 전체적 조직화

국소적 조직화 단계에서 <표 Ⅳ-2>에 제시된 도형의 성질들 사이의 국소적인 논리적 연결망은 구축되었으나, 아직 전체적인 논리적 연결망으로 완성되지는 않았다. 교사는 국소적 조직화 단계에서 다뤘던 도형 중 평행사변형을 선택하여, 학생들이 찾아낸 여섯 가지 성질[12] 사이의 전체적인 논리적 연결망을 완성하기 위하여, 다음과 같은 문제를 제기하여 학생들과 토론하였다.

평행사변형의 정의에 다음 6가지 성질을 모두 넣어야 할까요? 아니면 이 성질 중 일부만 가지고 있더라도 충분할까요? 일부만 있더라도 평행사변형을 정의하는데 충분한 부분집합을 골라보십시오. 왜 그 부분집합만으로도 충분하다고 생각합니까? 이러한 부분집합을 고르기 위해서는 우리는 뭘 해야 할까요?

학생들은 평행사변형의 뜻인 “두 쌍의 대변이 평행하다(성질 ①)” 에서는 나머지 다섯 성질을 모두 이끌어낼 수 있다고 하였으나, 과연 나머지 성질들이 성질 ①의 역할을 할 수 있

12) <표 Ⅳ-2>에 제시된 평행사변형의 여섯 가지 성질을 말한다.

는가에 대해서는 쉽게 확신하지 못하였다. 교사는 각 성질들이 이러한 역할을 할 수 있는지를 확인하기 위해서는 30개의 '○○이면, ○○이다'라는 명제를 살펴보아야 하는데[13], 이때 가장 최소 개수의 명제를 증명하려면 어떤 명제들을 증명하면 되는지를 질문하였다.

그러자 학생들은 성질 ②의 경우, '② → ①, ③, ④, ⑤. ⑥' 임을 모두 보이지 않더라도, 이미 성질 ①에서 다른 모든 성질을 끌어낼 수 있음을 보였으므로 '② → ①' 즉, 성질 ②가 평행사변형만의 성질임만을 증명하면 충분하다는 사실을 찾아내었다[14]. 나머지 성질들 역시 마찬가지이므로, 학생들은 성질 ②, ③, ④, ⑤, ⑥이 평행사변형의 성질이자 평행사변형만의 성질임을 보이는 '① ↔ ②, ③, ④, ⑤, ⑥'의 10개의 명제만 증명하면 된다는 결론을 내릴 수 있었다. 한 학생은 여기서 한 발 더 나아가, 위와 같은 10개의 명제를 증명하지 않더라도 '① → ② → ③ → ④ → ⑤ → ⑥ → ①' 의 순서로 6개의 명제만 증명한다면, 위와 같은 평행사변형의 여섯 성질이 논리적으로 동치임을 밝힐 수 있음을 찾아내기도 하였다.

이상과 같이 평행사변형의 여섯 가지 성질이 모두 논리적으로 대등함을 증명하는 과정에서, 도형의 성질과 도형만의 성질을 활용한 문제해결 행동은 학생들이 도형의 상징- 신호 특성에 대한 총체적 이해를 얻었음을 보여주고 있다.

## V. 학생들의 도형 정의에 대한 관계적 이해

도형 성질의 논리적 조직화를 다룬 교수실험을 통하여, "도형을 왜 그렇게 정의하는가?"에 대한 학생들의 관계적 이해를 살펴보기 위해 교수실험이 종료된 2주 후에 이등변삼각형(문항 1)과 평행사변형(문항 2)정의의 임의성과 관련된 사후 검사를 실시하였다[15].

문항 1은 이등변삼각형의 정의를 '두 각의 크기가 같은 삼각형' 으로 다르게 선택할 수 있겠는가에 대한 세 친구(소민, 지민, 민지)의 가상적인 대화 상황에서, 소민(정의의 임의성 옹호), 지민(정의의 임의성 거부), 민지('두 변의 길이가 같고, 두 각의 크기가 같은 삼각형'이라는 정의 주장)중 한 입장을 택하여 자신이 선택한 입장을 옹호하고 다른 입장을 비판하도록 하였다. 사후검사에 참여한 15명의 학생 중 이등변삼각형 정의의 임의성을 인정했던 학생은 10명, 정의의 임의성을 인정하지 않았던 학생은 5명이었으며, 학생들의 대표적인 반응은 부록의 <표 1>로 제시하였다.

사람들은 흔히 개념과 그 개념을 지시하는 용어를 혼동한다. 특히 이등변삼각형의 경우,

---

13) 가정이 될 수 있는 성질이 6가지, 결론이 될 수 있는 성질이 5가지이므로 총 30개의 명제를 확인하는 것이 된다.

14) 학생들은 예를 들어 '② 이면 ③이다' 를 증명하기 위해서는, '② 이면 ①이다'와 앞서 밝힌 '① 이면 ③ 이다'를 결합하면 된다는 것을 알아내었다.

15) 수업내용의 직접적인 영향을 받을 수 있는 수업 직후가 아닌, 수업 내용이 어느 정도 망각된 이후에 학생들의 도형 정의에 대한 관계적 이해를 조사하였으며, 사후 검사 문항은 부록에 제시하였다.

용어 자체가 '두 변의 길이가 같은 삼각형' 이라는 의미를 내포하는 까닭에, 이등변삼각형에서는 특히 '두 변의 길이가 같은 삼각형' 외의 다른 정의의 가능성을 인정하는 것이 쉽지 않다(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992). 한편, 이지현(2013)의 연구에서는 수학교사들도 이 문항에서 지민이가 주장하듯이 중학교 교과서에서의 정의에 대한 설명인 "용어나 기호의 뜻을 명확하게 하나로 정하여 나타낸 것"과 정의의 임의성을 모순되는 것으로 받아들이기도 하였다. 그러나 제희는 삼각형에서 두 각이 같다는 성질과 두변이 같다는 성질은 동치이며, 이등변삼각형의 정의를 다르게 선택할 수 있다는 점이 위와 같은 중학교 교과서의 정의 설명과 상충되는 것이 아니라는 점, 또 이름에 따라 정의가 결정되는 것은 아니라는 점을 잘 설명하고 있었다(부록 표 1). 반면, 이등변 삼각형의 정의는 오직 '두 변의 길이가 같은 삼각형' 만 된다고 생각한 학생들은 '이등변삼각형' 이라는 이름, 또 변이 각보다 우선이라는 점이라는 근거를 들어 정의의 임의성을 인정하지 않았다.

한편, 평행사변형 정의의 임의성은 평행사변형의 정의와 성질(정리)의 지위가 고정된 혹은 절대적인 것이 아니며 상호 교환될 수 있음을 함의하는데, 문항 2는 바로 이와 관련된 질문이었다. 문항 2에서는 평행사변형의 정의와 그와 동치인 성질들에 대하여 "왜 어떤 것은 정의고 어떤 것은 성질이라고 하는 걸까? 정의와 성질은 절대 바뀔 수는 없는 것일까?" 라는 한 친구의 의문에 대한 설명을 쓰도록 하였으며, 이에 대한 학생들의 대표적 응답은 부록의 [표 2]에서 찾아볼 수 있다.

수미와 준영이는 도형 정의의 논리적 성격을 이해하고 있었으나, 정의는 성질보다 보편적인 도형의 특성을 담고 있으며(수미), 앞서 존재해야 한다는 이유로(준영) 정의와 성질의 지위는 바뀔 수 없다고 생각하였다. 그러나 정의와 성질의 지위는 바뀔 수 있다고 생각한 11명의 학생들은 어떤 한 성질이 현재의 정의와 나머지 성질들을 증명할 수 있다면 그 성질도 정의로 선택할 수 있다고 지적하였다. 특히 태환이와 정훈이는 이렇게 정의와 동치인 성질의 지위가 교환가능하다는 사실이 교과서에서 일반적으로 정의와 성질을 구분하는 것과 모순되지 않는다는 점까지도 나름대로 설명하였다(부록 표 2)[16].

이상과 같이, 도형 성질의 논리적 조직화를 다룬 교수실험 후 도형 정의의 임의성과 관련하여 학생들의 도형 정의에 대한 관계적 이해를 조사한 결과, 교수실험에 참여한 모든 학생이 도형 정의의 임의성을 완전히 수용한 것은 아니었으나, 과반이 넘는 학생들이 수학적 정의의 임의성 및 그것을 설명하는 과정에서 도형 정의의 논리적 성격을 정확하게 이해하고 있음을 확인할 수 있었다.

16) 이지현(2013)의 연구에서, 수학교사들 중에서도 수학적 정의의 임의성으로 인해 정의와 성질의 지위가 바뀔 수 있다는 것을 도형의 정의와 성질(혹은 정리)을 엄격하게 구별하는 교과서의 접근과 모순되는 것으로 받아들였던 이들이 있었다. 이러한 점을 고려할 때, 이와 같은 태환이와 정훈이의 설명은 도형의 수학적 정의에 대한 깊은 관계적 이해를 보여준다고 하겠다.

## Ⅵ. 결론 및 논의

중학교 기하에서 등장하는 도형의 정의는, 그 모양에서 시각적으로 확인할 수 있는 단순한 용어의 뜻으로 생각하기 쉽다. 따라서 도형 정의에 대하여 처음부터 “도형을 왜 그렇게 정의하는가?”와 같은 질문에 대답하지 않는다 하더라도, 일단 받아들인 정의를 기초로 여러 성질의 증명을 하다보면, 도형을 왜 그렇게 정의하는지는 저절로 이해할 수 있을 것이라는 기대가 가능하다. 그러나 많은 선행 연구에서 보고하는 도형의 정의에 대한 낮은 이해도는, 도형의 정의를 이해한다는 것이 그렇게 단순하지 않다는 점과 함께 도형 정의에 대한 도구적 이해의 한계를 보여주고 있다. 특히 중학교에서 다루는 많은 도형의 성질은 그 정의와 논리적으로 동치이다. 그러나 이 연구의 사전검사에서도 확인할 수 있었듯이, 많은 학생들은 교과서에서 제시된 단 하나의 정의만을 절대적으로 수용하며 동치인 성질을 이용하여 도형의 정의를 다르게 선택할 수 있다는 것을 이해하기 어렵다. Freudenthal(1971)은 수학에서 정의란 단순히 어떤 용어의 뜻이 아니라 연역 구조의 연결고리임을 지적하였다. 그러나 이와 같은 도형 정의에 대한 제한된 인식은 학생들이 알고 있는 도형의 정의가 도형의 성질과 관련된 연역 구조에서 연결고리의 역할을 할 수 없는, 단지 외형적인 껍데기에 불과할 수 있다는 점을 보여준다.

이 연구에서는 Freudenthal(1971)이 주장한 도형 성질의 논리적 조직화에 의한 도형 정의의 재발명과정을 구체적으로 실행하여 분석하였다. 사실 이 교수실험에서 다룬 도형 성질의 논리적 조직화가 중학교 교과서에서 다루는 도형 성질의 증명과 다른 내용을 다룬 것은 아니었으나, 이 교수 실험은 다음과 같은 점에서 교과서의 접근과 차이가 있었다. 교과서에서는 예를 들어 평행사변형과 같은 도형의 성질과 조건을 증명할 때 처음부터 정의를 고정하여, 도형의 성질에서는 항상 정의가 가정이고 조건에서는 항상 그 정의가 결론이 되는 명제들을 제시하여 증명한다. 그러나 이 교수실험에서는 이러한 강제 없이 학생들이 찾아낸 도형의 성질 사이의 논리적 관련성을 자유롭게 탐색하였다. 그 후 도형 성질의 전체적인 논리적 조직화 과정에서, 도형의 뜻이라고 알고 있는 성질 외에 다른 성질들도 모든 성질을 이끌어낼 수 있는 기본성질이 될 수 있는지를 확인하면서 교과서에서 제시된 바와 같은 도형의 정의를 매개로 한 성질 및 조건을 증명하는 논리적 연쇄를 재발명하였다. 그 결과, 도형을 왜 그렇게 정의하는가, 다른 성질로는 정의할 수 없는가와 같은 질문에 대한 상당수 학생들의 답변에서 도형의 정의에 대한 관계적 이해를 확인할 수 있었다.

이 연구의 참여자들은 증명 학습에 대한 준비도가 충분했던 van Hiele 3수준의 영재학생들이었으며, 보통 학교의 일반 학생들에게도 이와 같은 교수실험의 접근을 그대로 적용할 수 있다고 하기는 어렵다. 한편, 많은 연구들이(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992, Gavender, de Villiers, 2004, 이지현, 2013) 대학에서 수학을 전공하는 많은 예비교사들도 도형 정의의 논리적 성격 및 임의성에 대한 이해가 부족하다는 것을 보고하고 있다. 이 점에서 본 연구에 참여한 학생들은 도형 성질의 논리적 조직화 경험을 통하여, 아마도 자신들보

다 더 오랜 시간동안 수학을 공부했을 예비교사들에게서도 찾아보기 어려웠던 도형 정의에 대한 깊은 관계적 이해를 보여주었다.

Freudenthal은 이미 완성된 기성 수학의 공리체계가 아닌 공리화하기가 학교수학에서 가르쳐야 할 주제라고 주장한 바 있다(나귀수, 1998). Human과 Nel(1989)은 수학적 과정으로서 공리화하기와 정의하기의 성격 및 기능에 대한 이해는 처음부터 완성된 공리체계를 그대로 부과하는 것이 아니라, 오직 재발명적 접근을 통해서만 개발될 수 있다고 주장하면서, 재발명적 접근으로 얻은 이해는 학생들이 형식적으로 배우게 될 많은 공리 연역 체계를 효율적으로 이해할 수 있는 소양이 될 것이라고 하였다.

올해부터 시행된 2009 개정교육과정에서는, 중학교 논증기하에서 '정의', '증명' 이라는 용어가 삭제되었다. 이렇게 정의 및 증명 교육의 큰 변화가 예상되는 시점에서, 이 연구가 정의 교육의 문제를 고찰하고 새로운 대안을 모색하는데 조그만 씨앗이 되기를 기대한다.

## 참고 문헌


나귀수(1998). 중학교 기하의 증명 지도에 관한 소고 - van Hiele과 Freudenthal의 이론을 중심으로-, 수학교육학연구, 8(1), pp.291-298.

박영훈 외 5인(2011). 중학교 수학 2. 서울: 천재문화.

서동엽(1998). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 : 중학교 수학을 중심으로. 서울대학교 박사학위 논문.

유병림(1977). 圖形의 槪念形成을 위한 定義와 性質의 指導에 關한 硏究. 科學과 數學敎育 論文集, 3.

이중권(2006). van Hiele의 기하 인지발달이론에 따른 중학교 기하교육과정 및 우리나라 중학생들의 기하수준에 관한 연구. 한국교육문제연구, 17, pp. 55-85.

이지현(2013). '정의'의 재발명을 상상하다: Lesson play의 분석. 학교수학, 15(4),(게제 예정).

이호철(2007). 중학교 기하 증명과정에서 학생들이 보이는 오류분석 : 8-나의 사각형의 성질 중심으로. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

조영미(2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

de Villiers, M.(1998). To teach definitions in geometry or teach to define, in Olivier, A & Newstead, K. (Eds.), Proceedings of 22nd PME-conference, University of Stellenbosch, Vol. 2, pp. 248-255.

Epp, S. S.(2003). The role of logic in teaching proof. American Mathematical Monthly, (110)10, pp.886-899.

Freudenthal, H.(1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, 3(3&4), pp. 413 - 435.

Govender, R. ,de Villiers, M.(2004). A dynamic approach to quadrilateral definitions,

Pythagoras, 58, pp.34-45.
Herbst, P., González, G., & Macke, M.(2005). How can geometry students understand what it means to define in mathematics?, The Mathematics Educator, 15(2), 17-24.
Human, PG, Nel, JH(1989). Alternative teaching strategies for geometry education: A theoretical and empirical study. University of Stellenbosch Curriculum Material Series. No. 11.
Linchevsky, L., Vinner, S., Karsenty, R.,(1992). To be or not to be minimal? Student teachers views about definitions in geometry, in Geeslin, W., Graham, K.(Eds.), Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 48-55, Durham, USA.
Jacobs, H. R.(2003). Geometry seeing, doing, understanding(3rd ed.). New York : W. H. Freeman and Company.
Smith, R. R.(1940). Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry, The Mathematics Teacher, 33(4), pp. 150-178.
Skemp, R.(1971). 수학학습심리학(황우형 역). 서울: 민음사
Usiskin, Z.(1982). van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. University of Chicago.
van Hiele, P. M.(2009). 구조와 통찰(우정호, 박교식, 남진영 역). 서울: 경문사.
Zaslavsky, O., Shir, K.(2005). Students' conceptions of a mathematical definition, Journal for Research in Mathematics Education, 36(4), pp. 317-346.

# How can we teach the 'definition' of definitions?

Jihyun Lee[17)]


## Abstract

Definition of geometric figure in middle school geometry seems to mere meaning of the term which could be perceived visually through its shape. However, Much research reported the low achievements of definitions of basic geometric figures. It suggested the limitation of instrumental understanding. In this research, I guided gifted middle school students to reinvent definitions of basic geometric figure by the deductive organization of its properties as Freudenthal pointed. These students understood relationally about why some geometric figure can be defined this way and how it could be defined equally via other properties. This analysis of reinventing of definitions will be a stepping stone to reflect on the pedagogical problems in teaching geometry and to search the new alternatives.



Key Words : Definition, Guided Reinvention, Proof, Deductive Organization

Received November 11, 2013
Revised December 22, 2013
Accepted December 26, 2013


17) Incheon National University (jihyunlee@incheon.ac.kr)

# <부록> 도형 정의의 관계적 이해 사후검사문항

1. 다음은 세 친구의 '이등변삼각형'에 대한 대화입니다. 세 친구 중 여러분이 가장 공감하는 사람의 의견을 고르십시오. 그리고 왜 그 사람의 의견에 동의하는지, 왜 다른 사람의 의견은 아니라고 생각하는지 여러분의 생각을 써주십시오.

> **소민:** 이등변삼각형은 초등학교 때 "두 변이 같은 삼각형"이라고 배웠는데, 가만 생각해보니 "두 각의 크기가 같은 삼각형"이라고 해도 될 것 같아.
>
> **지민:** 그런데 교과서에서 정의는 "용어의 뜻을 한가지로 정한 것"이라고 배웠잖아? 그런데 어떻게 이등변 삼각형의 정의가 두 개가 될 수 있어?
>
> 소민: 자 봐봐. 삼각형에서 두 변이 같으면 두 밑각이 같잖아? 또 두 밑각의 크기가 같으면 두 변의 길이도 같아. 그러니까 이등변삼각형의 정의를 "두 각의 크기가 같은 삼각형"이라고 해도 되지 않겠어?
>
> 지민: 난 이등변 삼각형의 정의가 "두 각의 크기가 같은 삼각형" 이 된다는 게 아무래도 이상해. "이등변삼각형"이라는 이름을 보면, 이름 자체가 두 변의 길이가 같은 삼각형이라는 뜻이잖아. 난 도형의 정의란 건, 이름에 따라 정해지는 것이고, 이름과 다른 도형의 성질들은 이름을 정의로 수용한 다음 발견되는 것이라고 생각해. 또 변이 있어야 각도 있으니까, "변이 같다" 는 것이 "각의 크기가 같다"는 것보다 우선 아니겠니?
>
> 소민: 난 그래도 이등변삼각형의 정의를 "두 각의 크기가 같은 삼각형"이라고 해도 될 것 같은데…
>
> **민지:** 애들아, 그럼 이등변삼각형을 "두 변의 길이가 같고, 두 각의 크기가 같은 삼각형"이라고 정의하면 되지 않을까?

1. 여러분은 위 대화에 등장하는 세 친구인 **소민, 지민, 민지**의 의견 중 어느 사람의 의견에 동의하나요?

(나는 　　　　이의 의견에 동의한다. 왜냐하면,

또 (　　　　　)이의 입장에서 왜 다른 사람의 의견은 옳지 않은지에 대해 써주십시오.

[표 1] 이등변삼각형 정의의 임의성(사후검사 문항 1에 대한 학생 응답)

| **이등변 삼각형 정의의 임의성 옹호(10명)** | **이등변 삼각형 정의의 임의성 거부(5명)** |
|---|---|
| 이등변 삼각형의 정의는<br>"두 각이 같은 삼각형"이라고 할 수도 있다. | 이등변 삼각형의 정의는<br>"두 변의 길이가 같은 삼각형" 뿐이다. |
| -두 변이 같은 삼각형이라고 하지 않아도 두 각이 같은 삼각형이라고 했을 때도 성립하기 때문에 두 각이 같은 삼각형이라고 해도 될 것 같다. 지민이의 의견 중에서 용어의 뜻을 한 가지로 정해서 정의가 두 개가 될 수 없다고 했는데, 여러 가지 용어의 뜻 중에 하나를 정한 것뿐이라고 생각한다. 그리고 이름이 그렇게 지어졌을 뿐이지 이름에 따라 정의가 결정되는 것은 아니라고 생각한다. 또한 삼각형 자체는 변과 각을 지닌 다각형 중의 하나이기 때문에 변과 각 중에 우선 순위는 없다고 생각한다. 마지막으로 민지는 정의와 성질이 있을 때, 두 가지를 한 번에 정의로 결정했기 때문에 옳지 않다고 생각한다(제희). | -이름도 이등변삼각형이 이등각삼각형 보다 괜찮다고 생각하고 변 두 개가 모여야 각이 생기기 때문이다(환호)<br><br>-일단 먼저 구할 수 있는 것, 각은 변에 의해 생기는 것이니 변이 정의에 들어가야 되고, 정의를 이용하여 이름을 짓는 것이니 두 변의 길이가 같다는 것이 맞고, 더 먼저 구할 수 있는 것이 쓰여야 한다(민수)<br><br>-이등변삼각형의 정의로는 "두 변의 길이가 같다"는 것인데, "두 각의 크기가 같다"라는 것은 정의가 아니라 성질인 것 같다. 만약 두 각의 크기가 같은 게 이등변삼각형이라면 애초부터 "이등각삼각형"이 돼야 되지 않았을까? (재환) |

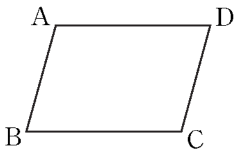
2. 정환이는 다음 교과서의 문제를 풀다가 다음과 같은 의문이 들었습니다.

1 평행사변형의 정의와 성질을 다음 (          )에 기호를 써서 나타내고,
이를 그림 위에 표시하여라.

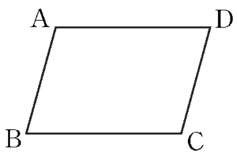
(1) 정의 : $\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$

(2) 성질

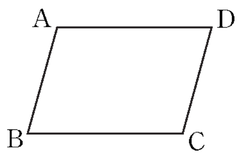
(두 대변의 길이가 같다)




(두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다)




(두 대각선이 서로를 이등분 한다)




정환: 그런데 평행사변형의 정의와 성질들이라는 것은 어떻게 보면 비슷하고, 포함되는 것이라고 할 수 있는데 왜 어떤 것은 정의고 어떤 것은 성질이라고 하는 걸까? 정의와 성질은 절대 바뀔 수는 없는 것일까?

정환이가 여러분의 친구라면, 여러분은 정환이의 의문에 대해 어떻게 답해주겠습니까?

[표 2] 평행사변형 정의의 임의성(사후검사 문항 2에 대한 학생 응답)

| 평행사변형의 정의와 성질은 바뀔 수 있다(11명) | 평행사변형의 정의와 성질은 바뀔 수 없다(4명) |
|---|---|
| - 정의는 그 도형의 성질 중 하나의 성질로, 나머지 모든 성질을 증명할 수 있는 성질이 정의다. 하나의 성질이 다른 성질을 증명할 수 있는 게 정의라고 생각하기 때문에 어느 한 성질이 현재의 정의와 나머지 성질을 증명할 수 있다면 바뀔 수 있을 것 같다(환호). | -정의라는 것은 그 도형만이 가진 성질이고 성질은 그 도형의 성질, 즉 다른 도형도 되는 성질이라고 할 수 있다. 내가 생각하기에 정의는 그 도형만의 성질 중 가장 쉽고 눈에 잘 들어오는 것으로, 수학자들이 선택한 것 같다. 예를 들어 변 같은 경우는 대부분의 사람들 눈에 제일 먼저 들어온다. 왜냐하면 변을 그리면 도형이 완성되기 때문이라고 생각한다. 그래서 정의들이 각보다는 변 중심적으로 이루어졌다고 생각한다. (따라서) 정의는 바뀔 수 없다고 생각한다. 정의는 가장 보편적인 것으로 수학자들이 정한 것이다. 우리가 정의를 바꾸면 안 된다고 생각한다(수미). |
| -성질도 정의라고 할 수 있다고 생각한다. 그 성질이 그 도형만 지니고 있을 경우에는 정의가 될 수 있다고 본다[18]. 하지만 정의는 그 중 하나를 정해서 약속을 한 것이고, 그에 맞추어서 이름을 만들었다("평행"사변형). 다른 성질도 정의가 될 수 있으나 굳이 대표하는 정의를 하나 정한 것이라 본다. 절대 바뀔 수 없다는 것은 아니다. 다만 공식적으로 약속을 고쳐야만 하겠지(태환). | -평행사변형의 정의는 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$만이 맞는 것 같다. 애초부터 그렇게 약속된 것이기 때문이다(재환). |
| -바뀔 수 있다. 평행사변형의 성질을 모두 정리하면, 평행사변형의 정의와 같은 뜻이 되어 모두 같은 뜻을 의미하는 것이다. 정의와 성질을 구분하는 것은 이러한 성질들이 정의를 기반으로 생기는 것이고, 일반적인 뜻이기 때문이다(정영). | -정의란 한 가지 조건으로 나머지 조건들을 설명할 수 있는 것이고, 한 가지 조건으로 나머지 조건을 설명할 수 없으면 성질이다. 정의가 먼저 있어야 나머지 조건들을 설명할 수 있는지 없는지를 따질 수 있으니까 정의와 성질은 바뀔 수 없다(준영). |

18) 태환이는 '그 도형만이 갖고 있는 성질' 의 예로, 평행사변형에서의 '마주보는 각은 같다' , '마주보는 변의 길이가 같다', '두 대각선이 이등분 한다'와 같은 성질을 예로 들었다.