

Floquet 이론과 섭동법에 의한 Mathieu Equation의 안정성해석

Stability Analysis of Mathieu Equation by Floquet Theory and Perturbation Method

박 찬 일[†]
Chan IL Park

(Received May 15, 2013 ; Revised July 18, 2013 ; Accepted July 18, 2013)

Key Words : Stability(안정성), Mathieu Equation(마티슈), Floquet Theory(플로케 이론), Perturbation Method(섭동법)

ABSTRACT

In contrast of external excitations, parametric excitations can produce a large response when the excitation frequency is away from the linear natural frequencies. The Mathieu equation is the simplest differential equation with periodic coefficients, which lead to the parametric excitation. The Mathieu equation may have the unbounded solutions. This work conducted the stability analysis for the Mathieu equation, using Floquet theory and numerical method. Using Lindstedt's perturbation method, harmonic solutions of the Mathieu equation and transition curves separating stable from unstable motions were obtained. Using Floquet theory with numerical method, stable and unstable regions were calculated. The numerical method had the same transition curves as the perturbation method. Increased stable regions due to the inclusion of damping were calculated.

1. 서 론

일정한 계수를 가진 운동방정식의 외부 가진은 그 가진 주파수가 선형 고유진동수가 일치할 때만 큰 응답을 주지만, 주기적으로 변하는 계수를 가진 운동방정식에서 매개 가진(parametric excitation)은 그 주파수가 선형 고유진동수와 멀리 떨어져 있을 때도 큰 응답이 발생한다⁽¹⁾. 이러한 매개 가진 시스템은 탄성체의 동적 좌굴운동, 위성과 로켓의 운동, 기어의 진동 등 기계진동 분야에 널리 적용된다. 매개 가진하고 주기적인 계수를 가진 가장 간단한 미분방정식이 Hill식 및 Mathieu식이다.

기어는 강성이 기어의 맞물림 주기에 의해 변하는 1자유도 계부터 6자유도 계까지의 운동방정식을 갖는다. 이 식은 주기적인 계수를 갖는 Hill식 및 Mathieu식과 비슷한 형태이다. 또한 Floquet 이론은 주기적으로 운동하는 시스템의 동적 안정성을 해석하기 위해 사용되며, 특히 매개 가진 하고, 주기적인 계수를 갖는 Mathieu식과 같은 선형 미분 방정식의 안정성을 판별하는데 유용하게 적용되고 있다⁽¹⁻³⁾.

관련 연구로 Mondo 등은 비선형 Mathieu식의 불안정의 해석적 조건 및 안정해의 크기를 유도하였다⁽⁴⁾. Cho 등은 주기적 물림강성과 백래시를 가진 기어 구동계를 1자유도계로 모델링하여 물림강성

[†] Corresponding Author ; Member, Department of Precision Mechanical Engineering, Gangneung-Wonju National University
E-mail : pci@gwnu.c.kr
Tel:+82-33-760-8723, Fax:+82-33-760-8721

A part of this paper was presented at the KSNVE 2013 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

의 1차 조화항만을 고려하여 조화균형 법으로 해를 구하고 안정해를 검토하였다⁽⁵⁾. Sika 등은 강성변동과 감쇠를 가진 1자유도계 기어 진동 모델에 Newmark법으로 안정구역을 검토하였다⁽⁶⁾. Chen 등은 마찰과 강성변동을 가진 1자유도계 기어 진동모델에 백래시 효과를 포함하여 안정성과 bifurcation을 조사하였다⁽⁷⁾.

Mathieu식의 섭동법(perturbation method)으로 근사 안정식은 발표되고 있으나⁽⁸⁾ 수치적인 방법의 접근은 보이지 않는다. 대부분의 매개 가지는 미분 방정식 형태는 Hill식과 같은 형태가 된다. 이 형태는 수학적 접근으로 안정성 식을 구하는 것이 어려울 수 있다. 따라서 안정성 식이 알려진 Mathieu식을 Floquet 방법을 이용하여 수치적으로 안정성을 구하는 방법이 확립되면 이 방법을 다른 경우에 적용할 수 있다. 이 연구에서는 기존 연구에서 수치적인 방법으로 안정성 해석을 하지 않았던 Mathieu식을 섭동법으로 조화함수 해와 안정과 불안정을 구분하는 변이곡선(transition curve)를 구하고 Floquet 이론을 수치해석 방법으로 구한 안전성 영역과 비교하여 수치해석 방법의 정확성을 검토한다. 이 검증된 해석 방법으로 감쇠의 변화에 따른 안정성 구역을 조사한다.

2. 이 론

Mathieu식의 안정성 해석을 하기 위해, Hill식과 Mathieu식을 소개한다. 먼저 Hill식은 다음의 미분 방정식 형태이다.

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, p(t+T) = p(t), \tag{1}$$

여기서 x, p 는 스칼라이고, $p(t)$ 는 주기 T 의 주기 함수이다.

$p(t) = \delta + \varepsilon \cos t$ 이면 Hill식의 특별한 경우로 다음과 같이 주기 2π 인 Mathieu식이 된다⁽⁸⁾.

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0. \tag{2}$$

일반화를 위해 식 (2)에 감쇠를 고려하면 다음 식으로 된다.

$$\ddot{x} + c\dot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0 \tag{3}$$

Mathieu식에 대한 주요한 관심은 파라미터 δ, ε 의 주어진 값에 대해 모든 해가 한정되는지 (bounded) 안되는 지에 있다. 각 δ 와 ε 값에 대해 모든 해가 한정되면 $\delta - \varepsilon$ 파라미터 평면에서 그 값으로 이루어진 점은 안정하다고 한다. 그러나 각 δ 와 ε 값에 대해 한정되지 않은 해(unbounded solution)가 존재하면 그 값으로 이루어진 점은 불안정이라고 한다. 안정되지 않는 해는 두 가지 형태로 분류될 수 있다. 한 형태는 크기가 시간에 따라 지수적으로 증가하면서 진동하는 경우이고, 다른 한 형태는 크기가 진동하지 않고 시간에 따라서만 지수적으로 증가한다.

2.1 Mathieu식 해의 근사 안정성

이 절에서는 Mathieu식의 안정을 구분하는 변이곡선을 섭동법으로 구한다^(8,9). 이를 위하여 식 (2)에서 ε 가 작다고 할 때, 해의 근사식을 다음과 같이 가정한다.

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \tag{4}$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \tag{5}$$

식 (4)를 식 (2)에 대입하여 ε 의 차수에 대해 정리하면

$$\varepsilon^0: \ddot{x}_0 + \delta_0 x_0 = 0. \tag{6}$$

$$\varepsilon^1: \ddot{x}_1 + \delta_0 x_1 + \delta_1 x_0 + \cos t x_0 = 0. \tag{7}$$

$$\varepsilon^2: \ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 + \delta_2 x_0 + \delta_1 x_1 + \cos t x_1 = 0. \tag{8}$$

식 (6)의 해는 다음 식으로 된다.

$$\cos \sqrt{\delta_0} t, \sin \sqrt{\delta_0} t. \tag{9}$$

또한 x_1 는 주기 2π 와 4π 를 가져야 하므로

$$x_0(t) = \cos \frac{n}{2} t, \sin \frac{n}{2} t, n=0,1,2,\dots. \tag{10}$$

식 (9)와 (10)은 같은 해이므로 $\sqrt{\delta_0} = \frac{n}{2}$ 가 되고 정리하면 다음 관계가 얻어진다.

$$\delta_0 = \frac{n^2}{4}, n=0,1,2,\dots. \tag{11}$$

n 의 경우에 따른 각각의 변이 곡선은 다음과 같이 구한다.

(1) $n=0$ 일 때

식 (11)에서 $\delta_0 = 0$ 가 되고 식 (9)에서

$$x_0 = 1. \tag{12}$$

이 관계를 식 (7)에 대입하면

$$\ddot{x}_1 + \delta_1 + \cos t = 0. \tag{13}$$

x_1 가 주기 함수 해가 되기 위해서 $\delta_1 = 0$ 가 되어야 한다. 그러면 해는 다음으로 된다.

$$x_1 = \cos t + \alpha, \alpha \text{는 상수.} \tag{14}$$

이 식을 식 (8)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_2 = -\delta_2 - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} - \alpha \cos t. \tag{15}$$

x_2 가 주기함수 해가 되기 위해서 $\delta_2 = -\frac{1}{2}$ 가 되어야 하고 따라서 안정과 불안정을 구분하는 변이곡선은

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots. \tag{16}$$

$$x_2 = -\frac{\cos 2t}{8} + \alpha \cos t + \alpha_2. \tag{17}$$

이 경우의 최종해는 다음으로 된다.

$$x = 1 + \varepsilon(\cos t + \alpha) + 0(\varepsilon^2). \tag{18}$$

(2) $n=1$ 일 때

식 (11)에서 $\delta_0 = \frac{1}{4}$ 가 되고 식 (9)에서

$$x_0 = \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \tag{19}$$

이므로 x_0 의 두 경우를 분리하여 변이곡선을 구한다.

(i) $x_0 = \cos \frac{t}{2}$ 일 때

이 식을 식 (7)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -\left(\frac{1}{2} + \delta_1\right)\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{3t}{2}. \tag{20}$$

이 식의 일반해(homogeneous solution)는 $x_1 = c_1 \cos \frac{t}{2} + c_2 \sin \frac{t}{2}$, 여기서 c_1, c_2 는 적분 상수 $\cos \frac{t}{2}$ 는 하중 함수기능뿐 아니라 일반해이므로 특이해(particular solution)은 $t \cos \frac{t}{2}$ 를 포함할 것이다. 이것은 주기 함수가 아니므로 $\cos \frac{t}{2}$ 의 계수가 사라져야 한다는 조건에서 $\delta_1 = -\frac{1}{2}$ 가 되고 따라서 미분방정식은 다음으로 된다.

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -\frac{1}{2}\cos \frac{3t}{2}. \tag{21}$$

특이해 $x_1 = A \cos \frac{3t}{2}$ 을 위 식에 대입하여 A를 구하면 최종적인 특이해는 다음과 같이 된다.

$$x_1 = \frac{1}{4}\cos \frac{3t}{2}. \tag{22}$$

이 식을 식 (8)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{4}x_2 = -\left(\delta_2 + \frac{1}{8}\right)\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\cos \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}\cos \frac{5}{2}t. \tag{23}$$

주기함수 해가 되기 위하여 $\delta_2 = -\frac{1}{8}$ 가 되어야 하고 따라서 변이곡선은

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots. \tag{24}$$

(ii) $x_0 = \sin \frac{t}{2}$ 일 때

이 식을 식 (7)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -\left(\delta_1 - \frac{1}{2}\right)\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin \frac{3t}{2}. \tag{25}$$

앞의 $\cos \frac{t}{2}$ 일 때와 마찬가지로 주기함수 해가 되
기 위해서 $\delta_1 = \frac{1}{2}$ 가 되어야 하고 미분방정식은 다음
으로 된다.

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -\frac{1}{2}\sin \frac{3t}{2}. \tag{26}$$

특이 해를 $y_1 = B \sin \frac{3}{2}t$ 라고 두면 위 식에 대입하
여 구하면 다음으로 된다.

$$x_1 = \frac{1}{4}\sin \frac{3}{2}t. \tag{27}$$

이 식을 식 (8)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{4}x_2 = -\left(\frac{1}{8} + \delta_2\right)\sin \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\sin \frac{3}{2}t + \frac{1}{8}\sin \frac{5}{2}t. \tag{28}$$

앞의 경우와 같이 주기함수 해가 되기 위하여
 $\delta_2 = -\frac{1}{8}$ 가 되어야 하고 따라서 변이곡선은

$$\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots. \tag{29}$$

(3) $n=2$ 일 때

식 (11)에서 $\delta_0 = 1$ 가 되고, 식 (9)에서

$$x_0 = \cos t, \sin t \tag{30}$$

이므로 x_0 의 두 경우를 분리하여 변이곡선을 구
한다.

(i) $x_0 = \cos t$ 일 때

이 식을 식 (7)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\delta_1 \cos t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t. \tag{31}$$

$\cos t$ 가 일반해이므로 위 식에서 $\cos t$ 의 항은
 $t \cos t$ 가 해가 된다. 이것은 주기성을 위반하므로 이
항을 제거하기 위해 $\delta_1 = 0$ 가 되어야 한다.

특이해를 $x_1 = A + B \cos 2t$ 로 가정하여 미정계수를
정하면 다음의 식이 얻어진다.

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2t. \tag{32}$$

이 식을 식 (8)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_2 + x_2 = (-\delta_2 + \frac{5}{12})\cos t - \frac{1}{12}\cos 3t. \tag{33}$$

주기함수 해가 되어야 한다는 조건에서 $\delta_2 = \frac{5}{12}$ 가
된다. 따라서 변이곡선은

$$\delta = 1 + \frac{5}{12}\varepsilon^2. \tag{34}$$

(ii) $x_0 = \sin t$ 일 때

이 식을 식 (7)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\delta_1 \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t. \tag{35}$$

주기 함수해 조건에서 $\delta_1 = 0$ 가 된다. 특이 해를
 $x_1 = B \sin 2t$ 이라 두면 대입하여 미정계수를 구하면
특이해는 다음으로 된다.

$$x_1 = \frac{1}{6}\sin 2t. \tag{36}$$

이 식을 식 (8)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\left(\delta_2 + \frac{1}{12}\right)\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t. \tag{37}$$

주기 함수해 조건에서 $\delta_2 = -\frac{1}{12}$ 가 되고 따라서
변이곡선은

$$\delta = 1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2. \tag{38}$$

2.2 Floquet 이론에 의한 안정성 해석

Floquet 이론을 적용하여 안정성 해석을 하기 위
하여 2차 상미분방정식인 식 (3)을 상태벡터(state

vector)를 이용하여 1차 상미분방정식으로 변환한다. 즉 $\dot{x} = y$ 로 치환하면, 식 (3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \delta + \varepsilon \cos t & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

식 (39)를 $\dot{u}(t)$ 에 대해 정리하면 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{u}(t) = F(t)u(t). \quad (40)$$

여기서

$$u(t) = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad F(t) = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \delta + \varepsilon \cos t & c \end{bmatrix}.$$

식 (2)는 2차 선형 미분방정식이므로 일반 해 $x(t)$ 을 서로 독립적인 두 개의 기본 해 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 의 선형 조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad (41)$$

여기서, c_1 과 c_2 는 상수이다.

기본 해 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 가 식 (2)의 해일 때, 시간 T 가 지난 후의 함수 $x_1(t+T)$ 과 $x_2(t+T)$ 도 식 (2)의 해이다. 함수 $x_1(t+T)$ 과 $x_2(t+T)$ 도 식 (2)의 해이기 때문에 다음과 같이 기본 해 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 의 선형조합으로 나타낼 수 있다.

$$u(t+T) = Au(t). \quad (42)$$

여기서 $u(t)$ 와 A 는 다음 식으로 정의된다.

$$u(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

벡터 $u(t)$ 을 모달행렬로 좌표 변환하여 얻어진 새로운 벡터를 적용할 수 있다. 이 관계를 이용하여 행렬 A 의 변환된 행렬이 얻어지며 이 행렬은 A 와 같은 고유치로 이루어진 대각행렬로 나타낼 수 있다⁽¹⁾.

벡터 $u(t)$ 을 좌표 변환하여 얻어진 새로운 벡터를 벡터 $v(t)$ 라 하고 이 때의 좌표변환행렬을 P^{-1} 라 하면 벡터 $u(t)$ 와 벡터 $v(t)$ 의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(t) = Pv(t). \quad (43)$$

식 (43)을 식 (42)에 대입하면 다음 식으로 되고,

$$Pv(t+T) = APv(t). \quad (44)$$

따라서, 식 (44)는 다음 식으로 다시 표현할 수 있다.

$$v(t+T) = Bv(t). \quad (45)$$

여기서

$$B = P^{-1}AP. \quad (46)$$

식 (46)은 유사변환(similarity transformation)을 나타내며, 선형대수학에서 잘 알려진 바와 같이 행렬 A 와 행렬 B 의 고유치는 서로 같다. 좌표변환행렬 P 를 모달 행렬 등으로 선택하면 행렬 B 를 다음과 같이 대각선화할 수 있다.

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

이 경우, 식 (45)는 다음으로 표현된다.

$$v_1(t+T) = \lambda_1 v_1(t), v_2(t+T) = \lambda_2 v_2(t). \quad (48)$$

또한 시간이 nT 지난 후의 해는 다음과 같다.

$$v_i(t+nT) = \lambda_i^n v_i(t) \text{ for } i=1,2. \quad (49)$$

식 (49)에서 보듯이 시간이 증가할수록 즉, n 이 증가할수록, λ_i 의 절대값이 1보다 작으면 응답 $v_i(t)$ 는 안정적(asymptotically stable)이고, 1보다 크면 불안정(unstable)하고, 1과 같으면 중립안정적(neutrally stable)이다.

또한 이 형태는 식 (40)을 수치 적분하여 시간 $t+T$ 일 때의 $u(t+T)$ 를 구하면 식 (42)와 같은 A 행렬을 가진 관계가 된다. 주기 T 에 대하여 식 (42)의 관계를 반복해서 적용하면, 초기조건에 무관하고 두 연속적인 주기 $(n-1)T$ 와 nT 의 해를 연결시키는 행렬 R 이 존재한다.

$$u(t+nT) = Ru(t+(n-1)T). \quad (50)$$

행렬 A 와 행렬 R 의 고유치는 서로 같기 때문에 Floquet 이론을 사용하여 응답의 안정성을 판별하려면, 식 (42)에 표현되는 관계식을 얻고 난 후에 행렬 A 의 고유치를 구하고 모든 고유치의 절대값이 1보다 작은지 아닌지를 판별 한다. 모든 고유치가 1보다 작으면 응답은 안정하고 하나라도 1보다 크면 불안정하다.

3. 해 석

위에서 설명한 Floquet 이론으로 Mathieu식에 적용하여 수치 적분하여 행렬 A 를 얻고 고유치를 계산해 고유치 크기에 따라 안정성을 계산하였다. 수치 적분 법은 오일러 법을 사용하였고, Matlab으로 프로그램 하였다. Fig. 1(a)는 이 결과를 δ - ε 평면에 안정한 구역을 **o**으로, 불안정한 구역은 **h**인 여백으로

두어 표시하였다. 이 결과의 검증을 위하여 앞에서 구한 Mathieu식의 안정성에 관한 변이곡선 식 (16)은 파란색, 식 (24)은 녹색, 식 (29)은 빨간색, 식 (34)은 보라색, 식 (38)은 하늘색으로 ε 의 범위 -1부터 1까지 Fig. 1에 표시하였다. 이 식은 ε 이 작은 구역에서 성립하는 안정성을 구분하는 식이며, 이 그림에서 수치해석 결과의 영역을 잘 표현하므로 해석 결과의 타당성이 입증된다.

이 방법으로 감쇠를 0.1, 0.2, 0.3, 0.4로 변화시키면서 안정성 해석을 하여 Fig. 1(b), (c), (d)에 각각 도시하였다. 그 결과 안정성은 감쇠가 커짐에 따라 그 영역이 커짐으로, 감쇠가 안정성에 기여한다는 기존의 연구를 확인할 수 있고⁽¹⁾ 그 안정 영역을 이 방법으로 제시하였다.

Fig. 2는 Fig. 1에서 감쇠에 따른 안정과 불안정 구역의 δ , ε 를 선정하여, Mathieu식의 변위를 Matlab

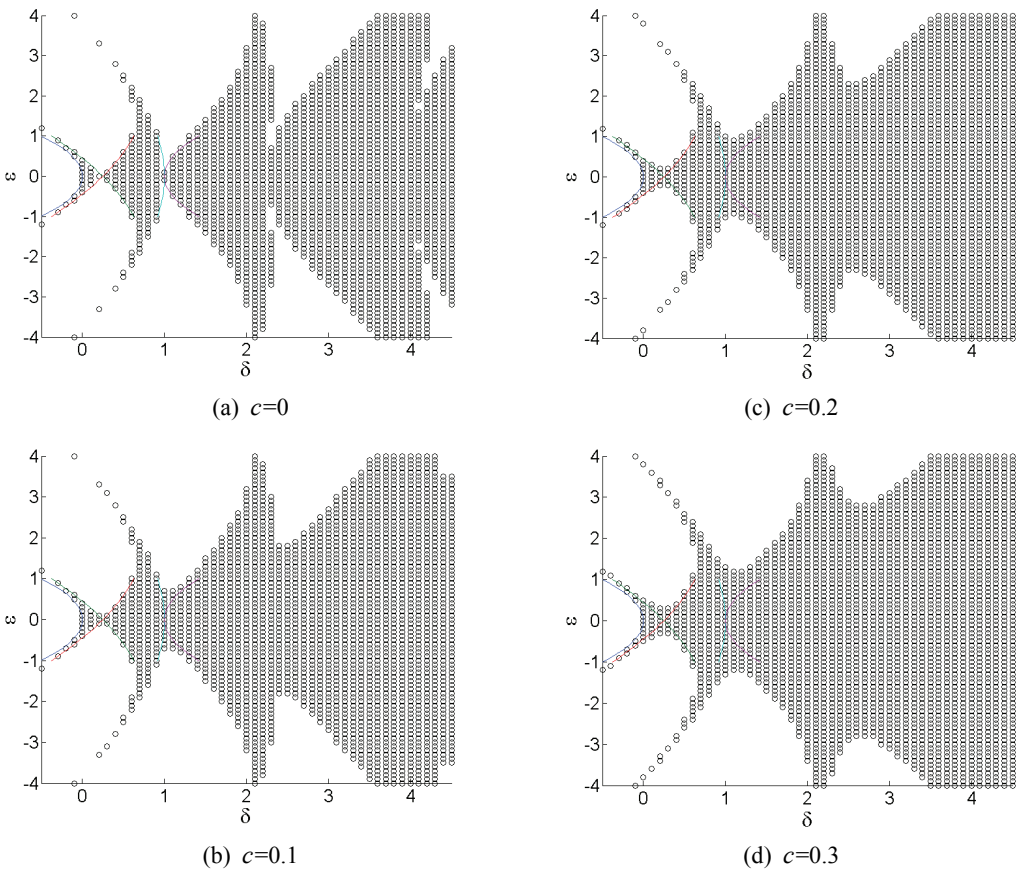


Fig. 1 Stable and unstable region in the δ - ε plane

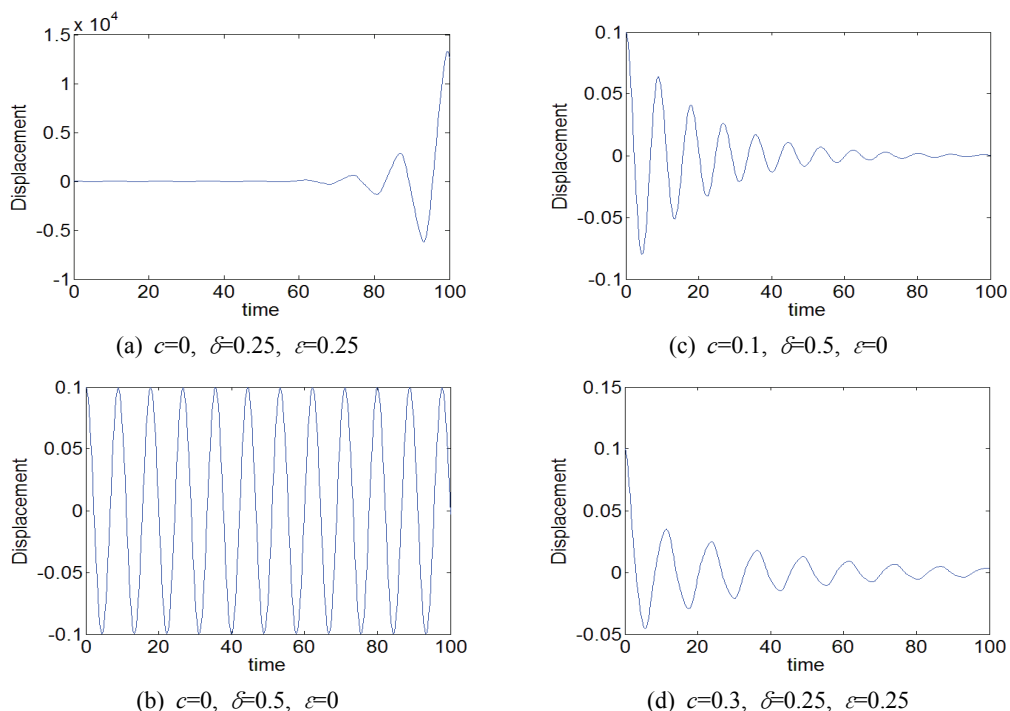


Fig. 2 Stable and unstable behavior by δ , ϵ and c

소프트웨어를 사용하여 계산한 그림이다. (a)는 불안정 영역인 $c=0, \delta=0.25, \epsilon=0.25$ 을 선택하여 해석 결과 시간이 지날수록 변위가 급격히 커지는 불안정 현상을 보이나 안정영역인 $c=0, \delta=0.5, \epsilon=0$ 일 때는 (b)와 같이 변위가 주어진 범위에서 변동한다. (c)와 같은 δ, ϵ 에서 감쇠가 0.1로 되었을 때는 변위는 시간이 증가함에 따라 감소한다. 감쇠를 $c=0.3$ 으로 증가시키고 (a)와 같은 $\delta=0.25, \epsilon=0.25$ 를 선택하였을 때는 Fig. 1(a)의 불안정영역은 Fig. 1(d)와 같이 안정영역이 되어 변위는 시간에 따라 감소한다.

4. 결 론

이 연구에서는 Mathieu식에 대해 Floquet 이론과 섭동법을 이용하여 안정성 해석을 하였다. 이를 위하여 식을 Floquet 이론에 적용할 수 있도록 변환하여 수치해석으로 안정성 해석을 하였다. 얻어진 결과는 기존의 안정성 식과 일치하여 그 결과의 정확성을 확인하였다. 감쇠의 증가는 안정 구역이 확대되는 효과를 확인할 수 있었고 그 안정영역을 이 방

법으로 제시하였다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No.2012-0006878).

References

- (1) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (2) Meirovitch, L., 1970, Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, New York.
- (3) Kim, W. S., Lee, D.-J. and Chung, J. T., 2005, Three-dimensional Modeling and Dynamic Analysis of an Automatic Ball Balancer in an Optical Disk Drive, Journal of Sound and Vibration, Vol. 285, No. 3, pp. 547~569.
- (4) Mondo, M. and Cederbaum, G., 1993, Stability Analysis of the Non-linear Mathieu Equation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 167, No. 1, pp. 77~89.

(5) Cho, Y. S. and Choi, Y. S., 2002, Nonlinear Dynamic Characteristics of Gear Driving Systems with Periodic Meshing Stiffness Variation and Backlash, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 12, No. 12, pp. 921~928.

(6) Sika, G. and Velez, P., 2008, Instability Analysis in Oscillators with Velocity-modulated Time-varying Stiffness-applications to Gears Submitted to Engine Speed Fluctuations, Journal of Sound and Vibration, Vol. 318, No. 1-2, pp. 166~175.

(7) Chen, S.-Y. and Tang, J.-Y., 2008, Study on a New Nonlinear Parametric Excitation Equation: Stability and Bifurcation, Journal of Sound and Vibration, Vol 318, No. 4-5, pp. 1109~1118.

(8) Stoker, J. J., 1950, Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, New York.

(9) Rao, S. S., 2004, Mechanical Vibrations, 4th ed. Pearson Education Inc., New Jersey.

(10) Park, C. I., 2013, Stability Analysis of Mathieu

Equation by Floquet Theory, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 267~268.



Chan IL Park, who received a B.S., an M.S. and a Ph.D. in mechanical engineering at Seoul National University, worked at Hyundai Motor Company for eight years. He has held positions as a post-doc. at the University of

Michigan in Ann Arbor, a visiting scholar at the Georgia Tech. and Ohio State University, and a dean of the College of Engineering at Kangnung National University. He is the president of KSME education division and a professor in the precision mechanical engineering at Gangneung-Wonju National University. His research interests are gear dynamics, plate, shell, optimal design, and acoustics.