

평판의 고정밀도 고유진동수 추출을 위한 개선된 MNDIF법 정식 개발

New Formulation of MNDIF Method for Extracting Accurate Natural Frequencies of Plates

강 상 욱*·윤 주 일†
S. W. Kang and J. I. Yon

(Received May 9, 2013 ; Revised June 19, 2013 ; Accepted July 25, 2013)

Key Words : Sub-domain Method(분할 영역법), MNDIF Method(개선된 무차원 동영향 함수법), Natural Frequency (고유진동수), Concave Plate(오목 평판)

ABSTRACT

An improved formulation of the MNDIF method is introduced to extract highly accurate natural frequencies of concave plates with arbitrary shape. Originally, the MNDIF method cannot yield accurate natural frequencies for concave plates. It can be applicable to only convex plates. To overcome this weak point, a new approach of dividing a concave plate into two convex domains and applying the MNDIF method to each domain is proposed and the validity and accuracy are shown in verification examples.

1. 서 론

임의 형상 평판의 고유진동수 추출에 가장 일반적으로 사용되는 방법은 유한요소법⁽¹⁾과 경계요소법⁽²⁾을 이용하는 것이다. 이들 방법들은 해석 대상 평판을 여러 개의 노드들로 분할한 후 노드들 사이에는 보간 함수를 사용한다. 그러나 이 보간 함수가 평판의 자유진동 지배방정식을 만족하지 않기 때문에, 얻어진 고유진동수의 정밀도는 어떤 한계를 가진다.

저자는 상기 단점을 극복하기 위해 NDIF법(non-dimensional dynamic influence function method)을

개발하여, 다양한 경계조건을 가진 임의 형상 멤브레인과 평판의 고정밀도 고유진동수를 얻을 수 있는 방법들을 제안하였다⁽³⁻⁹⁾. 그러나 NDIF법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 단점을 가진다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 저자는 NDIF법을 대수 고유치 문제로의 정식화하는 연구⁽¹⁰⁾를 수행하여, 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 문제점을 해결한 MNDIF법(modified NDIF법) 개발을 성공하였다.

그러나 개발된 MNDIF법은 평판의 형상이 오목한 형태일 때는 정확한 고유진동수를 제공하지 못함이 확인되었으며, 이를 극복하기 위한 새로운 연구

† Corresponding Author ; Member, Dept. of Mechanical System Engineering, Hansung University
E-mail : juilyoon@hansung.ac.kr
Tel : +82-2-760-8008, Fax : +82-2-760-4329

* Member, Dept. of Mechanical System Engineering, Hansung University

A part of this paper was presented at the KSNVE 2013 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor Sung Soo Na

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

가 이 논문에서 제안된다. 참고로 이 논문에서는 단 순지지 경계조건을 가진 임의의 형상 평판에 대한 이론 정식화가 이루어지며, 고정단이나 자유단 경계 조건을 가진 평판에 대한 이론 정식화는 향후 추가 연구에서 제안된다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

단순지지 경계조건을 가진 평판은 고정 경계 (fixed edges)를 가진 멤브레인과 이론적 유사성을 가지기 때문에, 평판의 자유진동 지배방정식은 식 (1)과 같이 멤브레인 지배방정식(헬름홀츠 방정식)으 로 대체될 수 있다^(10,11).

$$\nabla^2 W + \Lambda^2 W = 0, \tag{1}$$

여기서 W 는 평판의 진동변위를 나타내며 Λ 는 주 파수 파라미터를 의미한다.

식 (1)에 고정 경계 조건(변위가 0인 조건),

$$W_\Gamma = 0, \Gamma : \text{경계} \tag{2}$$

을 적용하는 방법에 의해 구해진 i 번째 고유치 Λ_i 를 식 (3)에 적용하여 최종적으로 평판의 i 번째 고유진동수 f_i 를 구할 수 있다^(10,11).

$$f_i = \frac{\Lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}} \tag{3}$$

여기서 ρ_s 는 평판의 면밀도, $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ 는 평판의 강성(flexural rigidity)을 뜻한다.

2.2 영역 분할 및 경계조건 적용

Fig. 1에서 실선으로 표시된 해석 대상 오목 평판 은 두 개의 볼록 영역 D_I 와 D_{II} 로 분할된다. 영역 D_I 의 경계 Γ_I 과 접경 Γ_a 는 각각 노드 $P_1^{(I)}, P_2^{(I)}, \dots, P_{N_I}^{(I)}$ 와 $P_1^{(a)}, P_2^{(a)}, \dots, P_{N_a}^{(a)}$ 로 이산화된 후, 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 진동 변위 응답은 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정된다⁽⁹⁾.

$$W_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_I} A_s J_0(\Lambda | \mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} |) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda | \mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} |) \tag{4}$$

여기서 J_0 는 제1종 0차 베셀 함수를 나타내며, A_s 와 $A_k^{(a)}$ 는 미지 상수이다. 그리고 $\mathbf{r}^{(I)}$ 는 영역 D_I 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내며, $\mathbf{r}_s^{(I)}$ 와 $\mathbf{r}_k^{(a)}$ 는 경계 Γ_I 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치 벡터와 접경 Γ_a 에 위치한 k 번째 노드에 대한 위치 벡터를 각각 나타낸다. 참고로 N_I 과 N_a 는 영역 D_I 의 경계 Γ_I 과 접경 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개 수를 각각 나타낸다.

가정된 진동 변위 응답 식 (4)는 지배방정식 식 (1)을 만족하므로, 경계조건 식 (2)를 식 (4)에 적용 하는 방법에 의해 자유진동 해를 구하고자 한다. 영역 D_I 의 경계 Γ_I 은 변위가 영(zero)인 경계조 건 식 (2)를 가지고 있으므로, 경계 Γ_I 위에 놓인 노드들은 다음과 같은 변위가 0인 경계 조건을 만 족한다.

$$W(\mathbf{r}_i^{(I)}) = 0, i = 1, 2, \dots, N_I. \tag{5}$$

진동 변위 응답 식 (4)를 경계조건 식 (5)에 대입 하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_I} A_s J_0(\Lambda | \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} |) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda | \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} |) = 0 \tag{6}$$

$$i = 1, 2, \dots, N_I.$$

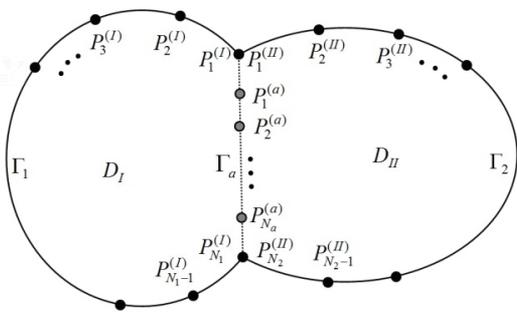


Fig. 1 Concave plate divided with 2 convex domains

이제 식 (6)에서 주파수 파라미터 Λ 를 베셀 함수 J_0 에서 분리해내기 위해, 베셀 함수는 다음과 같이 테일러 급수 전개⁽¹²⁾에 의해 근사화된다.

$$J_0(\Lambda|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|/2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2},$$

$$= \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(l)}(i, s), \tag{7}$$

$$J_0(\Lambda|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2},$$

$$= \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(la)}(i, k), \tag{8}$$

여기서 $\phi_j^{(l)}(i, s)$ 와 $\phi_j^{(la)}(i, k)$ 는 다음과 같다.

$$\phi_j^{(l)}(i, s) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|/2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}, \tag{9}$$

$$\phi_j^{(la)}(i, k) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}. \tag{10}$$

식 (7)과 식 (8)을 식 (6)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_l} A_s \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(l)}(i, s) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(la)}(i, k) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_l. \tag{11}$$

식 (11)에서 서메이션(summation) 기호의 순서를 바꾸어서 다음과 같이 정리한다.

$$\sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \sum_{s=1}^{N_l} A_s \phi_j^{(l)}(i, s) + \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_j^{(la)}(i, k) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_l. \tag{12}$$

다음으로, 식 (12)를 주파수 파라미터 Λ 에 대한 다항식의 형태로 다음과 같이 수정한다.

$$\lambda^0 \sum_{s=1}^{N_l} A_s \phi_0^{(l)}(i, s) + \lambda^1 \sum_{s=1}^{N_l} A_s \phi_1^{(l)}(i, s) + \dots + \lambda^M \sum_{s=1}^{N_l} A_s \phi_M^{(l)}(i, s) + \lambda^0 \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_0^{(la)}(i, k) + \lambda^1 \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_1^{(la)}(i, k) + \dots + \lambda^M \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_M^{(la)}(i, k) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_l, \tag{13}$$

여기서

$$\lambda = \Lambda^2. \tag{14}$$

마지막으로, 식 (13)을 행렬식의 형태로 표현하면, 영역 D_l 에 대한 경계조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \Phi_0^{(l)} + \lambda^1 \Phi_1^{(l)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(l)}) \mathbf{A} + (\lambda^0 \Phi_0^{(la)} + \lambda^1 \Phi_1^{(la)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(la)}) \mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{0}, \tag{15}$$

여기서, 크기 $N_l \times N_l$ 인 행렬 $\Phi_j^{(l)}$ 의 i 번째 행과 s 번째 열에 위치한 성분은 식 (16)에 의해 주어지며, 크기 $N_l \times N_a$ 인 행렬 $\Phi_j^{(la)}$ 의 i 번째 행과 k 번째 열에 위치한 성분은 식 (17)에 의해 주어진다.

$$\Phi_j^{(l)}(i, s) = \phi_j^{(l)}(i, s), \tag{16}$$

$$\Phi_j^{(la)}(i, k) = \phi_j^{(la)}(i, k). \tag{17}$$

그리고 식 (15)에서 벡터 \mathbf{A} 와 $\mathbf{A}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \{A_1 \ A_2 \ \dots \ A_{N_l}\}^T, \tag{18}$$

$$\mathbf{A}^{(a)} = \{A_1^{(a)} \ A_2^{(a)} \ \dots \ A_{N_a}^{(a)}\}^T, \tag{19}$$

여기서 $\{\dots\}^T$ 는 전치 행렬(transpose matrix)을 의미한다.

마찬가지 방법으로, 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 진동 변위를 경계 Γ_2 과 접경 Γ_a 에 놓인 노드들에 대한 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 식 (20)과 같이 가정한다. 참고로, 가정된 진동해 식 (20)도 지배방정식 식 (1)을 만족한다.

$$W_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) = \sum_{s=1}^{N_s} B_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \quad (20)$$

여기서 B_s 와 $B_k^{(a)}$ 는 미지 상수이며, $\mathbf{r}^{(II)}$ 는 영역 D_{II} 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내고 $\mathbf{r}_s^{(II)}$ 는 경계 Γ_2 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치 벡터를 나타낸다. 참고로 N_2 는 영역 D_{II} 의 경계 Γ_2 위에 놓여진 노드의 개수를 나타낸다.

다음으로 경계 Γ_2 에 놓인 노드들의 변위는 0을 만족한다는 경계조건 식 (21)을 식 (20)을 대입하면, 식 (22)를 얻을 수 있다.

$$W(\mathbf{r}_i^{(II)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \quad (21)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} B_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) = 0 \quad (22)$$

$i = 1, 2, \dots, N_2.$

이제 식 (22)에 있는 베셀 함수들을 식 (7), (8)과 같이 테일러 급수 전개하고, 영역 D_I 에 대해 수행한 식 (11~15)의 과정을 식 (22)에 적용하면, 영역 D_{II} 에 대한 경계조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \Phi_0^{(II)} + \lambda^1 \Phi_1^{(II)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(II)}) \mathbf{B} + (\lambda^0 \Phi_0^{(IIa)} + \lambda^1 \Phi_1^{(IIa)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(IIa)}) \mathbf{B}^{(a)} = \mathbf{0} \quad (23)$$

여기서 행렬 $\Phi_j^{(II)}$ 와 $\Phi_j^{(IIa)}$ 의 크기는 각각 $N_2 \times N_2$ 와 $N_2 \times N_a$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식 (24)과 식

(25)에 의해 각각 주어지며,

$$\Phi_j^{(II)}(i, s) = \phi_j^{(II)}(i, s), \quad (24)$$

$$\Phi_j^{(IIa)}(i, k) = \phi_j^{(IIa)}(i, k), \quad (25)$$

벡터 \mathbf{B} 와 $\mathbf{B}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \{B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{N_2}\}^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{B}^{(a)} = \{B_1^{(a)} \quad B_2^{(a)} \quad \dots \quad B_{N_a}^{(a)}\}^T. \quad (27)$$

2.3 접경에서의 연속 조건 적용

영역 D_I 와 D_{II} 의 접경 Γ_a 에서 진동 변위와 변위의 기울기가 같다는 연속 조건⁽¹³⁾을 고려한다. 접경 Γ_a 에 위치한 노드들에서의 변위 연속 조건은 식 (28)과 같이 표현될 수 있으며, 변위의 기울기 연속 조건은 식 (29)와 같이 표현될 수 있다.

$$W_I(\mathbf{r}_i^{(a)}) = W_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)}), \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (28)$$

$$\frac{\partial W_I(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i} = \frac{\partial W_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (29)$$

여기서 n_i 는 접경 위에 놓인 i 번째 노드의 법선 방향을 의미한다.

이제 두 영역에서의 변위 식 (4)와 식 (20)을 변위 연속 조건 식 (28)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{s=1}^{N_s} A_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) = \sum_{s=1}^{N_s} B_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \quad (30)$$

$i = 1, 2, \dots, N_a.$

식 (30)에 있는 베셀 함수들을 테일러 급수 전개하고, 앞의 식 (11~15)의 과정을 수행하면, 변위 연

속 조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (\lambda^0 \Phi_0^{(al)} + \lambda^1 \Phi_1^{(al)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(al)}) \mathbf{A} \\
 & + (\lambda^0 \Phi_0^{(a)} + \lambda^1 \Phi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(a)}) \mathbf{A}^{(a)} \\
 = & (\lambda^0 \Phi_0^{(all)} + \lambda^1 \Phi_1^{(all)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(all)}) \mathbf{B} \\
 & + (\lambda^0 \Phi_0^{(a)} + \lambda^1 \Phi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(a)}) \mathbf{B}^{(a)}
 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 행렬 $\Phi_j^{(al)}, \Phi_j^{(a)}, \Phi_j^{(all)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1, N_a \times N_a, N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식 (32~34)에 의해 각각 주어진다.

$$\Phi_j^{(al)}(i, s) = \phi_j^{(al)}(i, s), \quad (32)$$

$$\Phi_j^{(a)}(i, k) = \phi_j^{(a)}(i, k), \quad (33)$$

$$\Phi_j^{(all)}(i, s) = \phi_j^{(all)}(i, s). \quad (34)$$

다음으로 식 (4)와 식 (20)을 기울기 연속 조건 식 (29)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^{N_1} A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda | \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} |) \\
 & + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda | \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} |) \\
 = & \sum_{s=1}^{N_2} B_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda | \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} |) \\
 & + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda | \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} |) \\
 & i = 1, 2, \dots, N_a.
 \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)에서 범선 n_i 에 대한 미분을 수행하면 나타나는 베셀 함수 J_1 을 테일러 급수 전개 하고, 앞의 식 (11~15)의 과정을 수행하면, 기울기 연속 조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (\lambda^0 \Psi_0^{(al)} + \lambda^1 \Psi_1^{(al)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(al)}) \mathbf{A} \\
 & + (\lambda^0 \Psi_0^{(a)} + \lambda^1 \Psi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(a)}) \mathbf{A}^{(a)} \\
 = & (\lambda^0 \Psi_0^{(all)} + \lambda^1 \Psi_1^{(all)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(all)}) \mathbf{B} \\
 & + (\lambda^0 \Psi_0^{(a)} + \lambda^1 \Psi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(a)}) \mathbf{B}^{(a)}
 \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 $\Psi_j^{(al)}, \Psi_j^{(a)}, \Psi_j^{(all)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1, N_a \times N_a, N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식 (37~39)에 의해 각각 주어진다.

$$\Psi_j^{(al)}(i, s) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|}{\partial n_i}, \quad (37)$$

$$\Psi_j^{(a)}(i, k) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|}{\partial n_i}, \quad (38)$$

$$\Psi_j^{(all)}(i, s) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial |\mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|}{\partial n_i}. \quad (39)$$

2.4 고유치 문제로의 정식화

2.2절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식 (15)와 식 (23) 및 2.3절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식 (31)과 식 (36)을 모두 연립하면, 다음과 같은 하나의 시스템 행렬식으로 통합할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \lambda^0 \left[\begin{array}{cccc} \Phi_0^{(I)} & \Phi_0^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_0^{(II)} & \Phi_0^{(IIa)} \\ \Phi_0^{(al)} & \Phi_0^{(a)} & -\Phi_0^{(all)} & -\Phi_0^{(a)} \\ \Psi_0^{(al)} & \Psi_0^{(a)} & -\Psi_0^{(all)} & -\Psi_0^{(a)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{array} \right\} \\
 & + \lambda^1 \left[\begin{array}{cccc} \Phi_1^{(I)} & \Phi_1^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_1^{(II)} & \Phi_1^{(IIa)} \\ \Phi_1^{(al)} & \Phi_1^{(a)} & -\Phi_1^{(all)} & -\Phi_1^{(a)} \\ \Psi_1^{(al)} & \Psi_1^{(a)} & -\Psi_1^{(all)} & -\Psi_1^{(a)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{array} \right\} \\
 & + \dots \\
 & + \lambda^M \left[\begin{array}{cccc} \Phi_M^{(I)} & \Phi_M^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_M^{(II)} & \Phi_M^{(IIa)} \\ \Phi_M^{(al)} & \Phi_M^{(a)} & -\Phi_M^{(all)} & -\Phi_M^{(a)} \\ \Psi_M^{(al)} & \Psi_M^{(a)} & -\Psi_M^{(all)} & -\Psi_M^{(a)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \quad (40)$$

다음으로 위 식을 다음과 같이 간단한 형태로 표현한다.

$$\lambda^0 \mathbf{SM}_1 \mathbf{C} + \lambda^1 \mathbf{SM}_1 \mathbf{C} + \dots + \lambda^M \mathbf{SM}_M \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (41)$$

여기서

$$SM_j = \begin{bmatrix} \Phi_j^{(I)} & \Phi_j^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_j^{(II)} & \Phi_j^{(IIa)} \\ \Phi_j^{(aI)} & \Phi_j^{(a)} & -\Phi_j^{(all)} & -\Phi_j^{(a)} \\ \Psi_j^{(aI)} & \Psi_j^{(a)} & -\Psi_j^{(all)} & -\Psi_j^{(a)} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$C = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{Bmatrix}. \quad (43)$$

주파수 파라미터 λ 에 대한 고차 다항 행렬식 식 (41)은 다음과 같이 선형화될 수 있다⁽¹⁴⁾.

$$SM_L \mathbf{D} = \lambda SM_R \mathbf{D}, \quad (44)$$

여기서 시스템 행렬 SM_L 과 SM_R 그리고 미지 벡터 \mathbf{D} 는 다음과 같다.

$$SM_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} \\ -SM_0 & -SM_1 & -SM_2 & \dots & -SM_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$SM_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & SM_M \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbf{D} = \{ \mathbf{C}^T \quad \lambda \mathbf{C}^T \quad \lambda^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad \lambda^{M-1} \mathbf{C}^T \}. \quad (47)$$

마지막으로 식 (44)는 다음과 같이 변경된다.

$$SM_R^{-1} SM_L \mathbf{D} = \lambda \mathbf{D} \quad (48)$$

식 (48)을 다시 작성하면, 다음과 같이 대수 고유치 문제로 정식화된 최종 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$SM \mathbf{D} = \lambda \mathbf{D}, \quad (49)$$

여기서

$$SM = SM_R^{-1} SM_L. \quad (50)$$

식 (49)로부터 구한 고유치를 식 (14)에 대입하여 Λ 를 계산하고, 이 계산 값을 식 (3)에 대입하는 방법에 의해 해석 대상 평판의 고유진동수를 구할 수 있다. 참고로, 식 (49)에 있는 최종 시스템 행렬 SM 은 기존의 NDIF법과는 달리 주파수 파라미터에 무관함을 숙지하라.

3. 검증 예제

이 논문에서 제안된 방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해, 엄밀해가 존재하는 직사각형 평판과 엄밀해가 존재하지 않는 임의의 형상 오목 평판을 검증 예제로 선택하였다. 여기서 사용된 평판은 두께 (h)가 0.005 m, 영률(E)이 210 GPa, 푸아송비(ν)가 0.3, 밀도(ρ_s/h)가 7800 kg/m³인 물성치를 가진다.

3.1 직사각형 평판

Fig. 2와 같은 직사각형 평판(가로 1.2 m, 세로 0.9 m)을 두 영역 D_I 과 D_{II} 로 분할하여 논문에서 제안된 방법을 적용하였다. Fig. 2와 같이 영역 D_I 의 경계를 13개의 노드로 이산화하고(영역 D_{II} 의 경계도 13개 노드로 이산화), 두 영역의 접경은 3개의 노드로 이산화하여, 총 29개의 노드가 이 예제에서 사용되었다. 그리고 베셀 함수에 대한 테일러 급수의 개수는 15로 설정($M=15$)하였다. 상기 직사각형 평판에 대한 해석한 결과는 Table 1에 제시되었다.

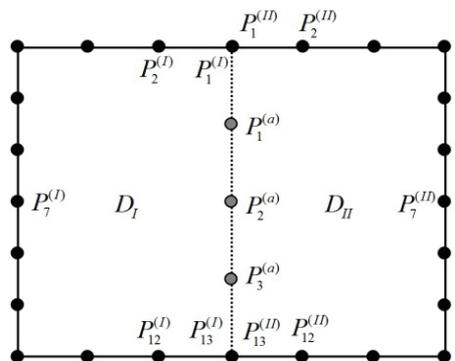


Fig. 2 Rectangular plate divided with 2 domains

Table 1에서 이 논문에서 제안된 방법(proposed method)에 의해 구해진 고유진동수가 엄밀해(exact solution)와 아주 잘 일치함을 확인할 수 있다. 첫 번째부터 네 번째 고유진동수까지는 엄밀해와 오차 없이 완전히 일치함을 확인할 수 있으며, 나머지 고유진동수는 엄밀해와 최대 0.34%의 오차를 가짐을 확인할 수 있다. Table 1에 제시되지 않았지만, 고차 고유진동수의 오차는 노드수 또는 테일러 급수 항의 수를 증가시킬 경우 감소함을 확인하였다. 반면에, 1238개의 많은 노드를 사용한 FEM(NASTRAN) 해석 결과는 제안된 방법에 비해 더 큰 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 엄밀해와 비교해 볼 때, 0.08~0.69% 범위의 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 결과적으로 이 논문에서 제안된 방법은 FEM에 비해 적은 노드(적은 수치 해석 계산량)를 사용함에도 불구하고 엄밀해와 거의 오차가 없는 매우 정밀한 고유진동수 해석 결과를 제공한다고 결론지을 수 있다.

또한, 저자가 제안한 분할영역법 기반 NDIF법⁽⁹⁾에 의한 결과도 Table 1에 제시하였다. 이 논문에서 제안된 방법은 분할영역법 기반 NDIF법⁽⁹⁾과 거의 같은 수준으로 아주 정확함을 확인할 수 있다. 참고로, 분할영역법 기반 NDIF법은 이 논문에서 제안된 방법에 비해 고유진동수 추출 방법이 수월하지 않은 단점⁽¹⁰⁾을 가진다.

Table 1 Natural frequencies(Hz) of the rectangular plate by the proposed method, the subdomain method, the exact solution, and FEM(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by the exact solution)

	Proposed method (29 nodes)	Subdomain method ⁽⁹⁾ (29 nodes)	Exact solution ⁽¹¹⁾	FEM (1238 nodes)
1	23.79(0.00)	23.79(0.00)	23.79	23.81(0.08)
2	49.48(0.00)	49.48(0.00)	49.48	49.60(0.24)
3	69.46(0.00)	69.46(0.00)	69.46	69.67(0.30)
4	92.30(0.00)	92.30(0.00)	92.30	92.87(0.62)
5	95.15(0.01)	95.16(0.00)	95.16	95.46(0.31)
6	137.9(0.07)	138.1(0.07)	138.0	138.7(0.51)
7	146.1(0.34)	145.4(0.14)	145.6	146.6(0.69)

3.2 깊은 노치를 가진 오목 평판

이 예제에서는 Fig. 3과 같이 폭 0.2 m와 깊이 0.45 m의 깊은 노치를 가진 가로 1.2 m, 세로 0.9 m인 직사각형 평판을 총 32개의 노드로 이산화한 후 해석을 수행하였다. 추가적으로, 총 노드의 개수가 30개와 28개인 경우에 대해서도 해석을 수행하여 노드 개수에 따라 고유진동수 결과가 어떻게 달라지는지도 살펴보았다.

Table 2는 이 논문에서 제안된 방법(proposed method)과 FEM(NASTRAN)에 의해 구해진 고유진동수 결과들을 보여주며, 이들 고유진동수 바로 우측에 제시된 괄호 안의 값들은 1701개의 노드를 사용한 FEM 해석 결과에 대한 오차를 의미한다. 제안

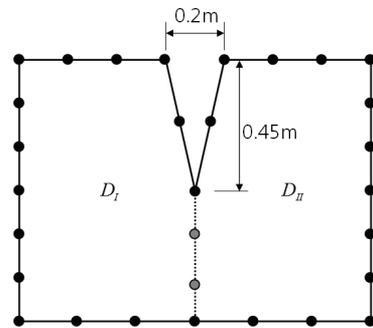


Fig. 3 Highly concave plate divided with 2 convex domains

Table 2 Natural frequencies(Hz) of the concave plate with a deep notch by the proposed method and FEM(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by FEM with 1701 nodes)

	Proposed method(M=15)			FEM		
	28 nodes	30 nodes	32 nodes	1701 nodes	976 nodes	451 nodes
1	43.70	43.32	43.44 (6.63)	40.74	40.88	41.17
2	51.21	51.30	51.29 (0.41)	51.50	51.66	51.82
3	83.43	83.90	83.87 (0.56)	83.40	83.61	84.22
4	98.34	98.48	98.49 (0.26)	98.75	98.97	99.42
5	124.1	123.7	123.7 (1.64)	121.7	122.2	123.5
6	157.1	157.6	157.6 (1.38)	159.8	160.7	163.2

된 방법에 의해 구해진 고유진동수들(32개 노드)을 FEM 결과(1701 노드)와 비교해볼 때, 첫 번째 고유진동수를 제외하고는 2% 이내의 적은 오차를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 참고로 1701개 노드를 사용한 FEM 해석은 충분히 수렴된 고유진동수를 제공함이 확인되었다.

또한, 노드의 개수가 증가함에 따라 제안된 방법에 의해 구해진 고유진동수들은 그 크기가 미소하게 변화됨을 확인할 수 있다. 이러한 크기의 변화는 모드 형상과 밀접한 관계가 있는 것으로 판단된다. 한 예로, 노드가 특정 모드의 노달 라인 근처에 놓여 있다면, 해당 고유진동수는 아주 정확해짐이 저자의 이전 연구에서 확인되었다⁽³⁾. 노드 개수의 증가에 따른 해의 수렴성 확보를 위한 추가 연구가 향후 진행될 예정이다.

3.3 비대칭 오목 평판

이 예제에서는 Fig. 4와 비대칭 형상을 가지는 오목 평판을 총 28개의 노드로 이산화 한 후 해석을 수행하여, 제안된 방법이 비대칭 오목 평판에 대해 타당한 결과를 제공하는지에 대해 확인하였다.

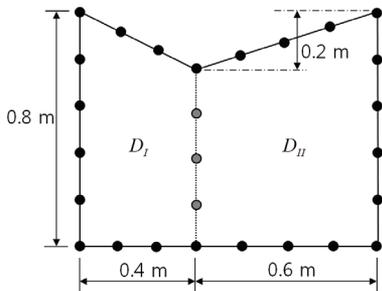


Fig. 4 Asymmetric plate divided with 2 convex domains

Table 3 Natural frequencies(Hz) of the asymmetric concave plate by the proposed method and FEM using 1267 nodes(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by FEM)

	1	2	3	4	5	6
Proposed method (M=15)	41.85 (0.75)	75.94 (0.03)	124.5 (0.08)	140.3 (0.00)	155.8 (0.13)	211.7 (0.70)
FEM	41.54	75.96	124.4	140.3	155.6	213.2

Table 3은 이 논문에서 제안된 방법과 FEM에 의해 구해진 고유진동수 결과들을 보여주며, 괄호 안의 값들은 FEM(NASTARN) 해석 결과에 대한 오차를 의미한다. Table 3에서 확인할 수 있듯이 두 해석 결과들 사이의 오차가 최대 0.75%로, 제안된 방법은 비대칭 오목 평판에 대해서도 타당한 고유진동수를 제공한다고 말할 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 기존 MNDIF법이 오목 평판에 대해 부정확한 단점을 보완하기 위하여, 해석 대상 오목 평판을 두 개의 볼록 영역으로 분할하는 방법에 의해 정확한 고유진동수를 얻을 수 있는 기법을 제안하였다. 다양한 예제 연구를 통해 이 논문에서 제안된 이론이 타당하고 정확함이 증명되었다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2012R1A1A2044327). 이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원과제 임(윤주일).

References

- (1) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.
- (2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New York.
- (3) Kang, S. W., Lee, J. M. and Kang, Y. J., 1999, Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function, Journal of Sound and Vibration. Vol. 221, No. 1, pp. 117~132.
- (4) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function, Journal of Sound and Vibration. Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.
- (5) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges using Wave-type Functions, Journal of

Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.

(6) Kang, S. W., 2002, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition using Non-dimensional Dynamic Influence Functions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(7) Kang, S. W., 2007, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.

(8) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2008, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Smoothly Varying Free Edges Using NDIF Method, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 130, No. 4, pp. 041010.1~041010.8.

(9) Kang, S. W. and Yoon, J. I., 2012, Development of the NDIF Method Using a Sub-domain Method Approach for Extracting Highly Accurate Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 22, No. 9, pp. 830~836.

(10) Kang, S. W. and Kim, J. G., 2009, A Formulation of NDIF Method to the Algebraic Eigenvalue Problem for Efficiently Extracting Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates with the Simply Supported Boundary Condition, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 19, No. 6, pp. 607~613.

(11) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Litton Educational Publishing, New York.

(12) Spiegel, M. R., 1983, Advanced Mathematics, McGraw-Hill, Inc, Singapore.

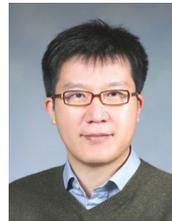
(13) Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Publishing, New York.

(14) Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, Matrix Polynomials, Academic Press, New York.



Sang-Wook Kang received a B.S., M.S. and Ph.D. degree in Dept. of Mechanical Design Engineering from Seoul National University in 1992, 1994 and 1999, respectively. He is currently working in Hansung University as a professor of the

mechanical system engineering. His research interests include the development of NDIF method for free vibration analysis of membrane, acoustic cavities, and plates with general shapes.



Juil Yoon received a B.S. degree and M.S. degree in Dept. of Mechanical Engineering from Yonsei University in 1994 and in 1996, respectively. In 2005, He received a Ph.D. degree Dept. of Mechanical Engineering from

University of Alberta. He is currently working in Hansung University as a professor of the mechanical system engineering. His research interests include Thermo-mechanical reliability of micro-electronic devices and micro-systems thin film mechanics, mechanics of the micro/nano structures in flexible macroelectronics, mechanics of carbon nanotubes, nanotube ropes and nanotube composite materials.